第21卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 21, No. 3
1995年5月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1995

问题讨论

关于文"LQ 逆问题研究"的问题讨论

傅 诒 辉
(华中理工大学自控系　武汉　430074)

关键词： LQ 逆问题，加权矩阵，极点配置.

文[1]定理 2 给出了连续系统 LQ 逆问题有解的充分条件以及确定加权矩阵 Q 和 R 的参数化方法. 本文构造性地给出了满足文[1]定理 2 全部条件的参数阵 (S, T_1, T_2)，但由其参数化方法确定的加权矩阵 Q 和 R 却非其相应的连续系统 LQ 逆问题解的一个反例. 这就表明该定理的条件是不充分的.

例. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in R^{2\times 2}$, $B=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，状态反馈增益阵 $K=2\cdot I_2$，加权矩阵 $R=I_2$，参数阵 $T_1=I_2$，$T_2=2\cdot I_2$，$S=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，期望稳定闭环极点集 $\Lambda_c=\{-3,-1\}$，则有系统 (A,B) 可控.

$$A_c=A-B\cdot K=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=S, \tag{1}$$

$$\Lambda_c=\sigma(A_c)=\{-3,-1\},\ \sigma(A)=\{-1,1\}, \tag{2}$$

$$F(s)^{[2]}=I_2+K\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}(s+1)^{-1}\cdot(s+3) & 0\\ 0 & (s-1)^{-1}\cdot(s+1)\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\phi(s)^{[2]}=R^{-\frac{1}{2}}\cdot F(-s)^T\cdot F(s)\cdot R^{-\frac{1}{2}}-I_2=\begin{pmatrix}8\cdot(1-s^2)^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

由式(2)⇒文[1]定理 1 中的式(5)满足，以及 $K=2\cdot I_2$ 为稳定的配置闭环极点反馈增益阵[2]. 由式(4)⇒$\phi(i\cdot w)\geqslant 0$，$\forall w\in R$ 成立.　(5)
其中 $i^2=-1$. 应用文[1]定理 2 确定 LQ 逆问题的加权矩阵为

$$Q=-(A^T\cdot T_2+T_2\cdot S)\cdot T_1^{-1}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\geqslant 0. \tag{6}$$

至此，给定的线性系统 (A,B) 和状态反馈增益阵 K 使 $A_c=A-B\cdot K$ 具有指定的期望稳定极点集 Λ_c，参数阵 $S=A_c$ 满足文[1]定理 2 的题设条件，$T_1=I_2$ 为非奇异阵，$R=I_2>0$，参数阵 T_1, T_2 满足矩阵方程 $A\cdot T_1-T_1S=2\cdot I_2=B\cdot R^{-1}\cdot B^T\cdot T_2=T_2$，即上述给出的参数阵 (S,T_1,T_2) 以及由文[1]定理 2 参数化方法确定的加权矩阵 Q 满足文[1]定理 2 的全部假设条件. 依据文[1]定理 2，对于上述确定的加权矩阵 Q（满足

式(6))应有K为最优反馈增益矩阵[2]. 但是另一方面,由系统 (A, B) 可控,K为稳定的配置闭环极点反馈增益阵,以及式(5)—(6)成立,可知文[2]命题 3.1 (这是大家熟知的关于 LQ 逆问题的一个结果) 的假设条件全部满足. 因此,若K为最优反馈增益矩阵(即Q、R为给定系统(A,B)和状态反馈增益阵K的 LQ 逆问题的解)则必有下式成立:

$$Q = C^T \cdot C, C \in R^{1\times 2},\ \mathrm{rank}(C) = \mathrm{rank}(Q) = 1, (A,C)\ \text{能检测}^{[2]}, \tag{7}$$

事实上,若Q满足式(7), (A,C) 能检测[3]⇒

$$\mathrm{Ker}(A - sI_2) \cap \mathrm{Ker}(Q) = \{O_2\},\ \forall \mathrm{Re}(s) \geqslant 0\ \text{成立}. \tag{8}$$

取 $s_0 = 1$, 则有 $\mathrm{Re}(s_0) = 1 > 0$,

$$\mathrm{Ker}(A - s_0 I_2) \cap \mathrm{Ker}(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \beta \in R \right\} \neq \{O_2\}. \tag{9}$$

此式与式(8)矛盾,所以满足式(6)的加权矩阵Q不满足式(7).

参 考 文 献

[1] 李人厚,谢宋和,朱荣华. LQ 逆问题研究,自动化学报,1992,**18**(4): 475—481.

[2] Fujii T, Narazaki M. A complete optimality condition in the inverse problem of optimal control, *SIAM J. Control and Optimization*, 1984, **22**(2): 327—341.

[3] 韩京清,何关钰,许可康. 线性系统理论代数基础,辽宁科学技术出版社,1985.

COMMENTS ON "A STUDY ON THE LQ INVERSE PROBLEMS"

FU YIHUI

(*Dept. of Automatic Control, Huazhong University of Science and Technology Wuhan* 430074 *China*)

Key words: LQ inverse problem, weighting matrix, pole placement.