第20卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 6
1994年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1994

短文

广义分散前馈控制系统有穷固定模的研究

李光泉 高志伟 陈国威 郑丕谔
(天津大学系统工程研究所 天津 300072)

摘 要

研究了广义分散前馈控制系统有穷固定模问题，提出根据传输零点判别和消除有穷固定模的算法.

关键词: 广义系统,分散控制,前馈控制,有穷固定模,传输零点.

1 引言

近年来,广义分散控制系统逐渐受到人们的重视，并取得了一些研究成果[1,2]. 有穷固定模是一个很重要的概念,它对于广义分散控制系统的极点配置和镇定性都很有影响. 因此，研究有穷固定模问题是很有意义的. 本文集中讨论广义分散前馈控制系统有穷固定模的判别和消除问题. 为了讨论方便,假定将要讨论的系统是R——能控且R——能观的[3].

2 预备知识

考虑广义分散前馈控制系统:

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i \boldsymbol{u}_i(t), \\ \boldsymbol{y}_i(t) = C_i\boldsymbol{x}(t) + \sum_{j=1}^{N} D_{ij}\boldsymbol{u}_j(t),\ i \in \underline{N} = \{1,2,\cdots,N\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 为状态矢量; $\boldsymbol{u}_i \in R^{m_i}$, $\boldsymbol{y}_i \in R^{l_i}$ 分别为第 i 个控制站的局部输入和输出矢量; $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$, $l = \sum_{i=1}^{N} l_i$, $A \in R^{n\times n}$, $E \in R^{n\times n}$, $\operatorname{rank} E < n$.

令系统(2.1)是正则的,即 $\det(sE - A) \neq 0$, $s \in \mathbb{C}$ (复平面).

记 $B = (B_1,\cdots,B_N)$, $C^T = (C_1^T,\cdots,C_N^T)$, $D = \begin{bmatrix} D_{11}\cdots D_{1N} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ D_{N1}\cdots D_{NN}\end{bmatrix}$.

本文于1992年3月2日收到.

对系统(2.1)施加静态分散输出反馈控制:

$$u = Ky,\ K \in \bar{K}. \tag{2.2}$$

其中 $\bar{K} = \{K \mid K = \mathrm{blockdiag}(K_1, \cdots, K_N),\ K_i \in R^{m_i \times l_i},\ i \in \underline{N},\ \det(I_l - DK) \neq 0$, 且 $\det[\lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C] \not\equiv 0\}$.

相应的闭环系统为

$$E\dot{x} = [A + BK(I_l - DK)^{-1}C]x. \tag{2.3}$$

定义 2.1. 对于给定的反馈结构 $\bar{K}$, 系统(2.1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的集合为

$$\Lambda = \bigcap_{K \in \bar{K}} \sigma\{E, A + BK(I_l - DK)^{-1}C\}, \tag{2.4}$$

这里 $\sigma(R,T) = \{\lambda \mid \det(\lambda R - T) = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda$ 有限$\}$.

显然,若取 $K = 0$, 则 $\sigma\{E, A + BK(I_l - DK)^{-1}C\} = \sigma(E, A)$,则必有 $\Lambda \subset \sigma(E, A)$.

定义 2.2. 对于系统(2.1)的一个 i 阶子系统 $G_j^i(\lambda)$, 多项式

$$z_j^i(\lambda) = \det\begin{bmatrix} A - \lambda E & B_\gamma^i \\ C_\alpha^i & D_{\alpha,\gamma}^i \end{bmatrix} = -P(\lambda) \cdot \det[G_j^i(\lambda)] \quad (j = 1, 2, \cdots, V_i) \tag{2.5}$$

称为它的零多项式. 其中 $G_j^i(\lambda)$ 为该子系统的传函阵, $Z_j^i(\lambda) = 0$ 的根为 i 阶子系统 $G_j^i(\lambda)$ 的传输零点; $P(\lambda) = \det(\lambda E - A)$; $\det[G_j^i(\lambda)] = \det[C_\alpha^i(\lambda E - A)^{-1}B_\gamma^i + D_{\alpha,\gamma}^i]$; $V_i = \dfrac{m!}{i!(m-i)!} \cdot \dfrac{l!}{i!(l-i)!}$.

引理 2.1. 对于系统(2.1)的闭环系统(2.3),有

$$\det[\lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C] = \det(I_l - DK)^{-1} \cdot \det(\lambda E - A) \cdot \det[I_l - G(\lambda)K]. \tag{2.6}$$

证明.

$$\det[\lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C] = \det\begin{bmatrix} \lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C & 0 \\ (I_l - DK)^{-1}C & I_l \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda E - A & BK \\ (I_l - DK)^{-1}C & I_l \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda E - A & BK \\ 0 & I_l - (I_l - DK)^{-1}C(\lambda E - A)BK \end{bmatrix}$$

$$= \det(I_l - DK)^{-1} \cdot \det(\lambda E - A) \cdot \det[I_l - G(\lambda)K].$$

证毕.

引理 2.2. [4]

$$\det[I_l - G(\lambda)K] = 1 - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{V_i} \det(K_j^i)^T \cdot \det[G_j^i(\lambda)]. \tag{2.7}$$

联立式(2.5),(2.6)和(2.7),有

$$\det[\lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C] = \det(I_l - DK)^{-1} \cdot \left[P(\lambda) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{V_i} \det(K_j^i)^T \cdot Z_j^i(\lambda)\right]. \tag{2.8}$$

因为 $\det(I_l - DK)^{-1} \neq 0$, 由式(2.8),并利用文[4]中定理 1 的证明方法,不难得到

如下定理。

定理 2.1. $\lambda_0 \in \sigma(E, A)$ 为系统 (2.1) 关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的充要条件是：矩阵 $\bar{K}^T$ 中所有非奇异子反馈阵所对应的一切子系统都以 λ_0 为公共传输零点。

3　有穷固定模的判定和消除

由定理 2.1 可知，在不以系统(2.1)的开环特征根 λ_0 为传输零点的所有子系统所对应的 $\bar{K}^T$ 的子反馈阵中，只要有一个是非奇异的，那么 λ_0 就不是系统(2.1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模；否则 λ_0 是有穷固定模。

首先讨论如何求取不以 $\lambda_0 \in \sigma(E, A)$ 为传输零点的子系统。

将系统(2.1)的输入、输出向量的下标集合分别记为 $I = (1, 2, \cdots, m)$，$J = (1, 2, \cdots, l)$；并记 $B = B_I = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$，$C^T = C_J^T = (c_1^T, c_2^T, \cdots, c_l^T)$，$D = D_{J,I} = \begin{bmatrix} d_{11} \cdots d_{1m} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ d_{l1} \cdots d_{lm} \end{bmatrix}$.

由于 λ_0 是系统(2.1)的开环特征根，所以 $\mathrm{rank}(A - \lambda_0 E) < n$. 不妨设 $(A - \lambda_0 E)$ 的降秩数为 $f(f > 0)$. 已知系统(2.1)是 R——能控且 R——能观的，因此，总可以从 B_I 和 C_J 中找到子集 $B_{I'}$ 和 $C_{J'}(I' = (i_1, i_2, \cdots, i_f)$，$J' = (j_1, j_2, \cdots, j_f))$，使

$$\mathrm{rank}(A - \lambda_0 E \quad B_{I'}) = n, \tag{3.1a}$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda_0 E \\ C_{J'} \end{bmatrix} = n. \tag{3.1b}$$

构造矩阵

$$Q = \left[\begin{array}{cc|c} A - \lambda_0 E & B_{I'} & B_{I-I'} \\ C_{J'} & D_{J',I'} & D_{J',I-I'} \\ \hline C_{J-J'} & D_{J-J',I'} & D_{J-J',I-I'} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

这里 $I - I' = (i_{f+1}, \cdots, i_m)$，$J - J' = (j_{f+1}, \cdots, j_l)$.

定理 3.1. $\lambda_0 \in \sigma(E, A)$，且满足式(3.1)，则由系统传函阵中的 I' 列和 J' 行构成的子系统 $\Sigma\begin{pmatrix} I' \\ J' \end{pmatrix}$ 不以 λ_0 为传输零点。

证明. 因 $\mathrm{rank}(A - \lambda_0 E) = n - f$，则

$$\mathrm{rank}\bar{A} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda_0 E & B_{I'} \\ C_{J'} & D_{J',I'} \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\left[\begin{array}{cc|c} I_{n-f} & 0 & B_{I'}^1 \\ 0 & 0 & B_{I'}^2 \\ \hline C_{J'}^1 & C_{J'}^2 & D_{J',I'} \end{array}\right].$$

由式(3.1)可知，$B_{I'}^2$ 和 $C_{J'}^2$ 是满秩的，则

$$\mathrm{rank}\bar{A} = \mathrm{rank}\left[\begin{array}{cc|c} I_{n-f} & 0 & B_{I'}^1 \\ 0 & 0 & I_f \\ \hline C_{J'}^1 & I_f & 0 \end{array}\right] = n + f.$$

即 $\bar{A}$ 为满秩，则子系统 $\Sigma\begin{pmatrix}I'\\J'\end{pmatrix}$ 不以 λ_0 为传输零点。 证毕。

对矩阵 Q 进行线性变换：

$$Q=\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{C} & \bar{D}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\bar{A} & 0\\ 0 & M\end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

其中 $M=-\bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{B}+\bar{D}$，则有

定理 3.2. $\lambda_0\in\sigma(E,A)$，并对矩阵 Q 进行如式(3.3)的线性变换。如果矩阵 M 中的非奇异子阵 $\bar{M}$ 对应的列下标集 I'' 和行下标集 J''，与 I', J' 一起构成输入，输出下标集 I^* 和 J^*，即 $I^*=(I'I'')$, $J^*=(J'J'')$，则子系统 $\Sigma\begin{pmatrix}I^*\\J^*\end{pmatrix}$ 不以 λ_0 为传输零点。

证明。由于

$$\det\begin{bmatrix}A-\lambda_0E & B_{I^*}\\ C_{J^*} & D_{J^*,I^*}\end{bmatrix}=\det\left[\begin{array}{cc|c}A-\lambda_0E & B_{I'} & B_{I''}\\ C_{J'} & D_{J',I'} & D_{J',I''}\\ \hline C_{J''} & D_{J'',I'} & D_{J'',I''}\end{array}\right]$$

$$=\det\begin{bmatrix}\bar{A} & 0\\ 0 & \bar{M}\end{bmatrix}=\det\bar{A}\cdot\det\bar{M}\neq 0$$

所以，子系统 $\Sigma\begin{pmatrix}I^*\\J^*\end{pmatrix}$ 不以 λ_0 为传输零点。 证毕。

由定理 3.1 和 3.2，便可以给出求取系统(2.1)不以 $\lambda_0\in\sigma(E,A)$ 为传输零点的子系统的算法。

算法 3.1. 求取不以 $\lambda_0\in\sigma(E,A)$ 为传输零点的子系统的集合。

步骤 1. 构造矩阵 $Q=\begin{bmatrix}A-\lambda_0E & B_I\\ C_J & D_{J,I}\end{bmatrix}$，经过线性变换找出所有满足式(3.1)的输入下标集 $I'_i(i=1,2,\cdots)$ 和输出下标集 $I'_j(j=1,2,\cdots)$。

步骤 2. 对每对输入集和输出集 I'_i 和 J'_j（为书写方便，简写成 I' 和 J'）做如式(3.3)的线性变换，从 M 中找出所有非奇异子阵，并找出对应的列下标集 I'' 和行下标集 J''，与 I' 和 J' 一起构造子系统，便得到了系统(2.1)不以 λ_0 为传输零点的全部子系统。

算法 3.2. 判别和消除有穷固定模 $\lambda_0\in\sigma(E,A)$。

步骤 1. 用算法 3.1 求出所有不以 λ_0 为传输零点的子系统的集合。

步骤 2. 当这些子系统所对应的 $\bar{K}^T$ 的子反馈阵中只要有一个是非奇异的，则 λ_0 就不是有穷固定模；否则，λ_0 是系统(2.1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模，转步骤 3。

步骤 3. 把这些子系统所对应的 $\bar{K}^T$ 的子反馈阵中降秩数为最少的一个变为非奇异，便消除了有穷固定模 λ_0，且所增加的反馈信息通道最少。

参 考 文 献

[1] 王恩平，刘万泉。广义分散控制系统的有穷固定模。自动化学报，1990，**16**(4): 358—361

[2] Xie X K. On fixed modes in singular systems. Proc. of the Amercian Contr. Conf., 1988, 1550—1551.

[3] Yip E L, Solvability. Controllabilty and observability of continuous descriptor system. *IEEE Trans. AC*, 1981, **26**(3):702—706.
[4] Tarokh M. Fixed modes in multivariable systems using constrained controllers. *Automatica*, 1985, **21**(4):495—497.

RESEARCH ON FINITE FIXED MODES IN SINGULAR FEEDFORWARD DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS

Li Guangquan　Gao Zhiwei　Chen Guowei　Zheng Pi'e
(Institute of Systems Engineering, Tianjing University, Tianjin 300072)

Abstract

Problems of finite fixed modes in singular feedforward decentralized control systems are discussed. A new effective algorithm to determine and eliminate finite fixed modes is proposed in terms of the concept of transmission zeros.

Key words: Singular systems, decentralized control feedforward control, finite fixed modes, transmission zeros.