第23卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 23, No. 3
1997年5月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1997

关于子带编码中的最优对称小波

贾沛璋　李海涛
（中国科学院系统科学研究所　北京　100080）

摘　要　线性相位的对称小波在信号或图像压缩中有广泛的应用. 对称小波有几个自由度的选择灵活性，可以依信号或图像类型选择最优小波. 文中讨论子带编码中的最优对称小波问题，其最优性能指标为编码增益 G_{SBC} 达极大. 对于平稳随机信号，最优小波唯一依赖信号的谱密度. 最后给出了几种典型谱密度分布所对应的最优对称小波.

关键词　最优小波，对称小波，子带编码.

1　引言

近年来，小波变换被引进到子带编码中，从而给出一种信号或图像压缩的新方法. 它与传统离散余弦变换的一个重要区别是，后者是一种固定的变换，而小波有几个自由度的选择灵活性，使得有可能按照信号或图像的类型来选择最优小波，以获得高的压缩比. 文献[1,2]讨论了子带编码中的最优正交小波问题. 这里将继续讨论子带编码中的最优对称小波. 在许多应用中，要求滤波器是线性相位的，因而对称小波愈来愈重视. 目前用得较多的是样条小波和接近正交的对称小波[3]. 当然，从最优小波的观点来看，它们不一定是最优的，这里最优的性能指标是编码增益 G_{SBC} 达极大. 由于正交小波变换相当于一个正交变换，它所对应的编码增益 G_{SBC} 有现成公式引用；而对称小波变换相当于一个非正交变换，这时的编码增益 G_{SBC} 无现成公式借鉴.

2　子带编码中的对称小波

对称小波不同于正交小波，它的分解小波与重构小波是不同的. 前者由低通滤波 $\{h_k\}$ 与高通滤波 $\{g_k\}$ 唯一确定；后者由另一组低通滤波 $\{\tilde{h}_k\}$ 与高通滤波 $\{\tilde{g}_k\}$ 唯一确定. 也可以说，分解小波与重构小波两者由低通滤波 $\{h_k\}$ 与 $\{\tilde{h}_k\}$ 唯一确定，因为有关系

$$\left.\begin{aligned}\tilde{g}_l &= (-1)^l h_{-l+1},\\ g_l &= (-1)^l \tilde{h}_{-l+1}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

两组滤波器彼此之间满足重构条件

收稿日期　1994-09-20

$$\left.\begin{aligned}&\sum_k \tilde{h}_k h_k = 1,\\&\sum_k \tilde{h}_{k-2n} h_{k-2m} = 0 \quad (n \neq m),\\&\sum_k \tilde{h}_{k-2n} g_{k-2m} = 0 \quad (\forall\, n,m),\\&\sum_k \tilde{g}_{k-2n} k_{k-2m} = 0 \quad (\forall\, n,m),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

且各自满足归一化条件

$$\left.\begin{aligned}&\sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \sqrt{2}/2,\\&\sum_k \tilde{h}_{2k} = \sum_k \tilde{h}_{2k+1} = \sqrt{2}/2,\\&\sum_k g_{2k} = -\sum_k g_{2k+1} = \sqrt{2}/2,\\&\sum_k \tilde{g}_{2k} = -\sum_k \tilde{g}_{2k+1} = \sqrt{2}/2.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

$$H(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k h_k e^{-ik\omega}, \quad G(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k g_k e^{-ik\omega},$$

$$\tilde{H}(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k \tilde{h}_k e^{-ik\omega}, \quad \tilde{G}(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k \tilde{g}_k e^{-ik\omega},$$

则(1),(2)式可等价地写成

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{G}^*(\omega) = -e^{i\omega} H(\omega+\pi),\\&G^*(\omega) = -e^{i\omega}\tilde{H}(\omega+\pi),\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$H(\omega)\tilde{H}^*(\omega) + H(\omega+\pi)\tilde{H}^*(\omega+\pi) = 1.\tag{5}$$

对称小波的低通滤波$\{h_k\}$和$\{\tilde{h}_k\}$具有对称性;而高通滤波$\{g_k\}$和$\{\tilde{g}_k\}$则有对称与反对称两种情形. 下面分别给出它们的一般构造形式.

第一种情形,滤波器$\{h_k\}$和$\{\tilde{h}_k\}$的长度为奇数,分别记为 $2M+1$ 与 $2\tilde{M}+1$,此时

$$\left.\begin{aligned}&H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-M}^{M} h_k e^{-ik\omega},\\&\tilde{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-M}^{M} \tilde{h}_k e^{-ik\omega},\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

其中 $h_k = h_{-k}, \tilde{h}_k = \tilde{h}_{-k}$.

由(1)式,高通滤波$\{g_k\}$和$\{\tilde{g}_k\}$有如下对称性

$$\tilde{g}_{-k+1} = \tilde{g}_{k+1}(-M \leqslant k \leqslant M), \quad g_{-k+1} = g_{k+1}(-\tilde{M} \leqslant k \leqslant \tilde{M}).$$

为了满足重构条件(2)式,$M+\tilde{M}$ 必须是奇数,这排除了取 $M=\tilde{M}$ 的可能. 实用中常选择 $\tilde{M}=M+1$,此时满足(1)—(3)式的对称小波的通解形式为

$$\left.\begin{aligned}&H(\omega) = \cos^2\frac{\omega}{2}\left(1+\sum_{l=1}^{M-1} a_l \sin^{2l}\frac{\omega}{2}\right),\\&\tilde{H}(\omega) = \cos^2\frac{\omega}{2}\left(1+\sum_{l=1}^{M-1} b_l \sin^{2l}\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中$\{a_l\}$,$\{b_l\}$满足约束方程

$$\left(1+\sum_{l=1}^{M-1}a_lx^l\right)\left((1+\sum_{l=1}^{M}b_lx^l\right)=1+2x+x^2\sum_{l=1}^{M-1}u_l\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2l-1}. \tag{8}$$

把方程两边展开为 x 的多项式,并令同次幂系数相等,即得约束方程组. 由此可解出 $\{a_l\}$,$\{b_l\}$ 表为 $\{u_l\}_{(1\leqslant l\leqslant M-1)}$ 的函数;或者消去 $\{u_l\}$,将 $\{b_l\}$ 表为 $\{a_l\}_{(1\leqslant l\leqslant M-1)}$ 的函数. 前者选择 $\{u_l\}_{(1\leqslant l\leqslant M-1)}$ 为自由参数,后者选择 $\{a_l\}_{(1\leqslant l\leqslant M-1)}$ 为自由参数. 对自由参数基本无约束,可在 $M-1$ 维空间(除一零测集外)自由选取.

例 1. $M=2$, $\widetilde{M}=3$ 的情形.

$$\left.\begin{aligned}H(\omega)&=\cos^2\frac{\omega}{2}\left(1+a_1\sin^2\frac{\omega}{2}\right),\\ \widetilde{H}(\omega)&=\cos^2\frac{\omega}{2}\left(1+b_1\sin^2\frac{\omega}{2}+b_2\sin^4\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$b_1=2-a_1,b_2=-\frac{2a_1b_1}{(a_1+2)}, \tag{10}$$

a_1 为自由参数,除 $a_1=-2$ 这一点外,可在实轴上自由选取. 若取 $a_1=0$,给出一次样条小波.

第二种情形,滤波器 $\{h_k\}$ 和 $\{\widetilde{h}_k\}$ 的长度为偶数,分别记为 $2M$ 与 $2\widetilde{M}$,此时有

$$\left.\begin{aligned}H(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-M+1}^{M}h_ke^{-ik\omega},\\ \widetilde{H}(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\widetilde{M}+1}^{\widetilde{M}}h_ke^{-ik\omega}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中 $h_k=h_{-k+1},\widetilde{h}_k=\widetilde{h}_{-k+1}$.

由(1)式知,$\{\widetilde{g}_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 有如下反对称性

$$\widetilde{g}_k=-\widetilde{g}_{-k+1}\quad(-M+1\leqslant k\leqslant M),\quad g_k=-g_{-k+1}\quad(-\widetilde{M}+1\leqslant k\leqslant\widetilde{M}).$$

为了满足重构条件(2)式,$M+\widetilde{M}$ 必须是偶数. 实用中常选择 $M=\widetilde{M}$ 或 $\widetilde{M}=M+2$.

当取 $M=\widetilde{M}$,满足(1)—(3)式的对称小波的通解形式为

$$\left.\begin{aligned}H(\omega)&=e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\left(1+\sum_{l=1}^{M-1}a_l\sin^{2l}\frac{\omega}{2}\right),\\ \widetilde{H}(\omega)&=e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\left(1+\sum_{l=1}^{M-1}b_l\sin^{2l}\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中 $\{a_l\}$,$\{b_l\}$ 服从约束方程

$$\left(1+\sum_{l=1}^{M-1}a_lx^l\right)\left(1+\sum_{l=1}^{M-1}b_lx^l\right)=1+x\sum_{l=1}^{M-1}u_l\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2l-1}. \tag{13}$$

例 2. $M=\widetilde{M}=3$ 的情形.

$$\left.\begin{aligned}H(\omega)&=e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\left(1+a_1\sin^2\frac{\omega}{2}+a_2\sin^4\frac{\omega}{2}\right),\\ \widetilde{H}(\omega)&=e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\left(1+b_1\sin^2\frac{\omega}{2}+b_2\sin^4\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中

$$b_1=-\frac{(2a_1+a_2)(2a_1+3a_2)}{(a_1+a_2)(2a_1+a_2+4)},b_2=-\frac{2a_2(2a_1+a_2)}{(a_1+a_2)(2a_1+a_2+4)}, \tag{15}$$

a_1,a_2 为自由参数,除 $a_1+a_2=0$ 与 $2a_1+a_2+4=0$ 两直线外,可在二维空间中自由选取.如取 $a_2=0,a_1=-1$,则给出一种二次样条小波.

当取 $\widetilde{M}=M+2$,满足(1)—(3)式的对称小波的通解形式为

$$\left.\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\left(1+\sum_{l=1}^{M-1}a_l\sin^{2l}\frac{\omega}{2}\right), \\ \widetilde{H}(\omega) &= e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\left(1+\sum_{l=1}^{M-1}b_l\sin^{2l}\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中 $\{a_l\},\{b_l\}$ 服从约束方程

$$\left(1+\sum_{l=1}^{M-1}a_lx^l\right)\left(1+\sum_{l=1}^{M}b_lx^l\right)=1+2x+x^2\sum_{l=1}^{M-1}u_l\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2l-1}. \tag{17}$$

例 3. $M=2$, $\widetilde{M}=4$ 的情形.

$$\left.\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\left(1+a_1\sin^2\frac{\omega}{2}\right), \\ \widetilde{H}(\omega) &= e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}\left(1+b_1\sin^2\frac{\omega}{2}+b_2\sin^4\frac{\omega}{2}.\right) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中

$$b_1=2-a_1,\quad b_2=-\frac{2a_1b_1}{(a_1+2}), \tag{19}$$

a_1 为自由参数,除 $a_1=-2$ 这一点外,可在实轴上自由选取.如取 $a_1=-1$,则给出另一种二次样条小波.

上面给出的对称小波的通解形式只适用于子带编码,因为在子带编码中只用到滤波器 $\{h_k\},\{g_k\}$ 和 $\{\widetilde{h}_k\},\{\widetilde{g}_k\}$,而没有用到分解小波 $\psi(t)$ 和重构小波 $\widetilde{\psi}(t)$ 本身,因此在构造 $H(\omega)$ 与 $\widetilde{H}(\omega)$ 时,不必考虑使 $\psi(t),\widetilde{\psi}(t)\in L^2(\boldsymbol{R})$ 这一约束.

如记信号样本为 $\{s_l\}_{(1\leqslant l\leqslant N)}$,则子带编码中的小波分解公式为

$$\left.\begin{aligned} a_n^m &= \sum_k h_{k-2n}a_k^{m-1}, \\ b_n^m &= \sum_k g_{k-2n}a_k^{m-1} \quad (m\geqslant 1). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中 $a_k^0=s_k$. 小波重构公式为

$$a_k^{m-1}=\sum_n\widetilde{h}_{k-2n}a_n^m+\sum_n\widetilde{g}_{k-2n}b_n^m \quad (m\geqslant 1). \tag{21}$$

小波分解是分层进行的.首先,原 N 个信号样本被分解为 $(a_1^1,a_2^1,\cdots,a_{N/2}^1)$ 和 $(b_1^1,b_2^1,\cdots,b_{N/2}^1)$;在第二层,$(a_1^1,a_2^1,\cdots,a_{N/2}^1)$ 又被分解为 $(a_1^2,a_2^2,\cdots,a_{N/4}^2)$ 和 $(b_1^2,b_2^2,\cdots,b_{N/4}^2)$;在第三层,类似地再被分解;如此等等.重构将是它的逆过程.这种分解与重构方式是假定信号 $\{s_k\}$ 的能量主要分布于低频的情形,否则,分解与重构方式将随之改变.另外,一般地各层分解与重构时,可采用不同的小波.

3 子带编码中的最优对称小波

考虑平稳随机信号 $\{s_k\}$ 情形.记输入信号的谱密度为 $P(\omega)$,方差为 σ_s^2.假设小波分解三层,产生四个子带,这四个子带的输出依次为 $(b_1^1,b_2^1,\cdots,b_{N/2}^1)$;$(b_1^2,b_2^2,\cdots,b_{N/4}^2)$,$(b_1^3,b_2^3,$

$\cdots,b^3_{N/8}$)和$(a^3_1,a^3_2,\cdots,a^3_{N/8})$,其方差分别记为 $\sigma^2_1,{}^2_2,\sigma^2_3$ 和 σ^2_0. 不难导出

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \frac{2\sigma_s^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\widetilde{H}(\omega+\pi)|^2P(\omega)\mathrm{d}\omega,\\ \sigma_2^2 &= \frac{4\sigma_s^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\omega)|^2|\widetilde{H}(2\omega+\pi)|^2P(\omega)\mathrm{d}\omega,\\ \sigma_3^2 &= \frac{8\sigma_s^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\omega)|^2|H(2\omega)|^2|\widetilde{H}(4\omega+\pi)|^2P(\omega)\mathrm{d}\omega,\\ \sigma_0^2 &= \frac{8\sigma_s^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\omega)|^2|H(2\omega)|^2|H(4\omega)|^2P(\omega)\mathrm{d}\omega.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

下面推导编码增益 G_{SBC}的形式. 记

$$\boldsymbol{s} \triangleq (s_1,s_2,\cdots,s_N)^\tau,$$

$$\boldsymbol{\theta} \triangleq (b^1_1,b^1_2.\cdots,b^1_{N/2},b^2_1,b^2_2,\cdots,b^2_{N/4},b^3_1,b^3_2,\cdots,b^3_{N/8},a^3_1,a^3_2,\cdots,a^3_{N/8})^\tau.$$

小波分解等价于一个非正交的线性变换,而重构等价于它的逆变换. 再记 $\boldsymbol{\theta}$ 的量化误差为 $\Delta\boldsymbol{\theta}$,重构误差为 $\Delta\boldsymbol{s}$,其各自的平均方差为

$$\sigma^2_{q,SBC} = \frac{1}{N}E(\Delta\boldsymbol{\theta})^\tau(\Delta\boldsymbol{\theta}),\quad \sigma^2_{r,SBC} \triangleq \frac{1}{N}E(\Delta\boldsymbol{s})^\tau(\Delta\boldsymbol{s}).$$

定义子带编码的信噪比为

$$\begin{aligned}SNR_{SBC}(\mathrm{d}B) &\triangleq 10\log\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2_{r,SBC}} = 10\log\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2_{r,PCM}} + 10\log\frac{\sigma^2_{r,PCM}}{\sigma^2_{r,SBC}}\\ &= SNR_{PCM}(\mathrm{d}B) = 10\log G_{SBC}.\end{aligned}$$

式中编码增益 G_{SBC}为

$$G_{SBC} \triangleq \frac{\sigma^2_{r,PCM}}{\sigma^2_{r,SBC}} = \frac{\sigma^2_{q,PCM}}{\sigma^2_{q,SBC}}\cdot\frac{\sigma^2_{q,SBC}}{\sigma^2_{r,SBC}}.$$

记 $\mu\triangleq\sigma^2_{r,SBC}/\sigma^2_{q,SBC}$,则在最优 bit 分配下,可导出

$$G_{SBC} = \frac{\sigma_s^2}{[(\sigma_1^2)^4(\sigma_2^2)^2(\sigma_3^2)(\sigma_0^2)]^{1/8}}\cdot\frac{1}{\mu}.\tag{23}$$

假定 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 各分量相互独立,且同分布,即

$$E(\Delta\boldsymbol{\theta})(\Delta\boldsymbol{\theta})^\tau = \boldsymbol{\sigma}^2_{q,SBC}\boldsymbol{I}.\tag{24}$$

记 $\boldsymbol{a}^1\triangleq(a^l_1,a^l_2,\cdots,a^l_{N/2^l})^\tau,\quad \boldsymbol{b}^l\triangleq(b^l_1,b^l_2,\cdots,b^1_{N/2^l})^\tau(l=1,2,3)$.

如忽略边界影响,则小波重构公式可表示为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}^2 &= \widetilde{H}^\tau_3\boldsymbol{a}^3 + \widetilde{G}^\tau_3\boldsymbol{b}^3,\\ \boldsymbol{a}^1 &= \widetilde{H}^\tau_2\boldsymbol{a}^2 + \widetilde{G}^\tau_2\boldsymbol{b}^2,\\ \boldsymbol{s} &= \widetilde{H}^\tau_1\boldsymbol{a}^1 + \widetilde{G}^\tau_1\boldsymbol{b}^1.\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

其中 $\widetilde{H}^\tau_l,\widetilde{G}^\tau_l$ 为$\frac{N}{2^{l-1}}\times\frac{N}{2^l}$维矩阵,分别有

$$\widetilde{H}^\tau_l = (\widetilde{h}_{n-2m})_{n,m} \text{ 和 } \widetilde{G}^\tau_l = (\widetilde{g}_{n-2m})_{n,m}.$$

现在被量化的是 $\boldsymbol{a}^3,\boldsymbol{b}^3,\boldsymbol{b}^2,\boldsymbol{b}^1$,各自的量化误差记为 $\Delta\boldsymbol{a}^2,\Delta\boldsymbol{b}^3,\Delta\boldsymbol{b}^2,\Delta\boldsymbol{b}^1$;它们组成 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 的各分量,由(23),(24)式得

$$E(\Delta\boldsymbol{a}^2)(\Delta\boldsymbol{a}^2)^\tau = \sigma^2_{q,SBC}(\widetilde{H}^\tau_3\widetilde{H}_3 + \widetilde{G}^\tau_3\widetilde{G}_3),$$

$$E(\Delta \boldsymbol{a}^1)(\Delta \boldsymbol{a}^1)^\tau = \widetilde{H}_2^\tau E(\Delta \boldsymbol{a}^2)(\Delta \boldsymbol{a}^2)^\tau \widetilde{H}_2 + \sigma_{q,SBC}^2 \widetilde{G}_2^\tau \widetilde{G}_2,$$

$$E(\Delta \boldsymbol{s})(\Delta \boldsymbol{s})^\tau = \widetilde{H}_1^\tau E(\Delta \boldsymbol{a}^1)(\Delta \boldsymbol{a}^1)^\tau \widetilde{H}_1 + \sigma_{q,SBC}^2 \widetilde{G}_1^\tau \widetilde{G}_1.$$

从而

$$\sigma_{r,SBC}^2 = \frac{1}{N}\mathrm{trace} E(\Delta \boldsymbol{s})(\Delta \boldsymbol{s})^\tau,$$

$$\mu = \frac{1}{N}\mathrm{trace}\{\widetilde{H}_1^\tau[\widetilde{H}_2^\tau(\widetilde{H}_3^\tau \widetilde{H}_3 + \widetilde{G}_3^\tau \widetilde{G}_3)\widetilde{H}_2 + \widetilde{G}_2^\tau \widetilde{G}_2]\widetilde{H}_1 + \widetilde{G}_1^\tau \widetilde{G}_1\}.$$

最后求得

$$\begin{aligned}\mu = & \frac{1}{2}Q_0 + \widetilde{Q}_0\Big[\frac{1}{8}\sum_k \widetilde{Q}_{2k}(\widetilde{Q}_k + (1-)^k Q_k)\ \frac{1}{4}Q_0\Big] \\ & + \widetilde{Q}_2\Big[\frac{1}{8}\sum_k(\widetilde{Q}_{2k-1} + \widetilde{Q}_{2k+1})(\widetilde{Q}_k + (-1)^k Q_k) - \frac{1}{2}Q_1\Big] \\ & + \widetilde{Q}_4\Big[\frac{1}{8}\sum_k(\widetilde{Q}_{2k-2} + \widetilde{Q}_{2k+2})(\widetilde{Q}_k + (-1)^k Q_k) + \frac{1}{2}Q_2\Big] \\ & + \cdots \\ & + \widetilde{Q}_{2n}\Big[\frac{1}{8}\sum_k(\widetilde{Q}_{2k-n} + \widetilde{Q}_{2k+n})(\widetilde{Q}_k + (-1)^k Q_k) + (-1)^n Q_n\Big].\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $Q_l = \sum\limits_k h_{k-l}h_k$;$\widetilde{Q}_l = \sum\limits_k \tilde{h}_{k-1}\tilde{h}_k$;右端方括号中"$\sum\limits_k$"表示"$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}$". 实际上,因滤波器$\{h_k\}$和$\{\tilde{h}_k\}$是有限长的,只有有限个$\{Q_l\}$. 当$\{\widetilde{Q}_l\}$取非零值时,(26)式右端也仅包含有限项.

由(1)—(3)式容易看出,如果把对称小波的滤波器$\{h_k\}$改为$\{\lambda h_k\}$,$\{\tilde{h}_k\}$改为$\left\{\frac{1}{\lambda}\tilde{h}_k\right\}$,相应地$\{g_k\}$改为$\left\{\frac{1}{\lambda}g_k\right\}$,$\{\tilde{g}_k\}$改为$\{\lambda\tilde{g}_k\}$,则(1),(2)式仍满足,只是归一化条件(3)式的右端不再等于$\sqrt{2}/2$,这没有任何影响. 当λ取不同值,尽管对(23)式右端的$[(\sigma_1^2)^4(\sigma_2^2)(\sigma_3^2)(\sigma_0^2)]^{1/8}$没有影响,但$\mu$将不同,这里存在一个最优的$\lambda$,使$\mu$达极小. 实用中,常采用次优方法,取$\lambda$满足

$$\sum_k(\lambda h_k)^2 = \sum_k\left(\frac{1}{\lambda}\tilde{h}_k\right)^2, \tag{27}$$

即取

$$\lambda^2 = \sqrt{\widetilde{Q}_0/Q_0}. \tag{28}$$

(26)式中包含的Q,$\widetilde{Q}_l$又可表示为

$$Q_l = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\omega)|^2 e^{-il\omega}\mathrm{d}\omega, \tag{29}$$

$$\widetilde{Q}_l = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\widetilde{H}(\omega)|^2 e^{-il\omega}\mathrm{d}\omega.$$

由(22),(23),(26),(29)式可见,编码增益G_{SBC}仅依赖自由参数$\{a_l\}_{(1\leqslant l\leqslant M-1)}$,和信号的谱密度$P(\omega)$. 一旦$P(\omega)$给定,最优小波问题将是选择$\{a_1\}_{(1\leqslant l\leqslant M-1)}$,使编码增益$G_{SBC}$达极大值.

最后要指出的是,$\{h_k\}$,$\{g_k\}$与$\{\tilde{h}_k\}$,$\{\tilde{g}_k\}$的位置可以交换,交换前后将给出不同的最

优对称小波,且各自有不同的编码增益 G_{SBC}的最优值.

4　计算结果

对于几种典型的谱密度分布——均匀分布、截断的拉普拉斯分布和截断的高斯分布,其谱密度分别为

$$\left.\begin{aligned} &P_1(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_0, \quad 0 < \omega_0 < \pi, \\ 0, & \omega_0 < |\omega| \leqslant \pi; \end{cases} \\ &P_2(\omega) = e^{-c|\omega|}\cos\frac{\omega}{2}, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \pi; \\ &P_3(\omega) = e^{-c\omega^2}\cos\frac{\omega}{2}, \quad 0 \leqslant |\omega| \leqslant \pi, \quad c > 0. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式中未对 $P(\omega)$归一化. 下面给出部分计算结果,如表 1—3 所示. 其中 $\max G_{SBC}^1$,$\max G_{SBC}^2$,$\max G_{SBC}^3$分别对应例 1—3 中的小波;例 1 和例 3 中的$\{h_k\}$,$\{g_k\}$还可与$\{\tilde{h}_k\}$,$\{\tilde{g}_k\}$交换,交换前后对应的 $\max G_{SBC}$差别不大,但最优的自由参数 a_1 取值不同.

1)均匀分布谱密度 $P_1(\omega)$.

表 1

ω_0	$2\pi/16$	$3\pi/16$	$4\pi/16$	$5\pi/16$	$6\pi/16$	$8\pi/16$
$\max G_{SBC}^1$	42.0dB	28.3dB	19.2dB	12.0dB	5.58dB	2.32dB
$\max G_{SBC}^2$	41.8dB	26.5dB	15.4dB	10.7dB	7.27dB	2.82dB
$\max G_{SBC}^3$	32.5dB	23.1dB	16.6dB	11.6dB	7.39dB	2.27dB

表 2

C	0.15	0.3	0.5	0.8	1.5	3.0
$\max G_{SBC}^1$	0.59dB	0.83dB	1.2dB	1.8dB	3.7dB	8.3dB
$\max G_{SBC}^2$	0.55dB	0.78dB	1.2dB	1.8dB	3.8dB	8.9dB
$\max G_{SBC}^3$	0.45dB	0.68dB	1.0dB	1.7dB	3.5dB	8.6dB

表 3

C	0.2	0.5	1.0	2.0	4.0	10.0
$\max G_{SBC}^1$	1.2dB	2.5dB	4.7dB	8.4dB	16.4dB	29.8dB
$\max G_{SBC}^2$	1.1dB	2.6dB	5.2dB	9.5dB	15.4dB	29.6dB
$\max G_{SBC}^3$	1.0dB	2.4dB	4.8dB	9.6dB	16.2dB	26.0dB

$\max G_{SBC}^1$对应的 a_1 取值范围为$[-1.2, 0.006]$和$[1.6, 1.9]$;$\max G_{SBC}^2$对应的 $a_1 \in [1.0, 3.0]$,$a_2 \in [-1.0, 6.0]$;$\max G_{SBC}^3$对应的 a_1 取值在$[-1.2, -0.8]$和$[0.4, 1.6]$.

2)拉普拉斯谱密度 $P_2(\omega)$.

$\max G_{SBC}^1$对应的 a_1 取值范围为$[-0.3, 0.5]$和$[1.1, 1.9]$;$\max G_{SBC}^2$对应的 $a_1 \in [0.3, 1.2]$,$a_2 \in [-0.8, -1.2]$;$\max G_{SBC}^3$对应的 a_1 取值在$[-1.0, -0.4]$和$[0.003,$

0.8].

3)高斯分布谱密度 $P_3(\omega)$.

$\max G_{SBC}^1$对应的 a_1 取值范围为[−1.1, 0.3]和[1.3, 1.9];$\max G_{SBC}^2$对应的 $a_1\in$[0.4, 3.0],$a_2\in$[−0.9, 7.9];$\max G_{SBC}^3$对应的 a_1 取值在[−1.0, −0.5]和[0.1, 1.5].

由以上计算结果可得如下结论:

1)对例 1 中的小波,$a_1=0.85$ 时对称小波接近正交;对例 3 中的小波,$a_1=0$ 时接近正交.如记接近正交时 a_1 的值为 a_1^*,则当用$\{h_k\}$,$\{g_k\}$为分解滤波时,最优小波的 a_1 取值在 a_1^* 的右侧;当用$\{\tilde{h}_k\}$,$\{\tilde{g}_k\}$为分解滤波时,最优的 a_1 取值在 a_1^* 的左侧.谱密度曲线愈平坦,最优的 a_1 愈接近 a_1^*;反之,$P(\omega)$的通带愈窄,最优的 a_1 愈远离 a_1^*.

2)当谱密度通带较窄时,用$\{\tilde{h}_k\}$,$\{\tilde{g}_k\}$为分解滤波,$\max G_{SBC}$的值明显高于用$\{h_k\}$,$\{g_k\}$为分解滤波的情形.

3)当谱密度曲线较平坦时,编码增益 G_{SBC}的值随自由参数的变化较缓慢;反之,当 $P(\omega)$通带较窄时,G_{SBC}随自由参数变化较快.

4)与文[2]中支撑为 6 的正交小波相比,最优对称小波的 $\max G_{SBC}$比最优正交小 的 $\max G_{SBC}$要高一些.

参 考 文 献

[1] Disarte P, Macq B, Slock D T M. Signal-adapted multiresolution transform for ımage coding. *IEEE Trans. Infor. Theory*, 1992, **38**(2): 897—904.

[2] 贾沛璋,李海涛. 关于子带编码中的最优正交小波. 自动化学报,1997,**23**(2):180—186.

[3] Cohen A, Daubechies I, Feauveou J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Applied Math.*, 1992, **45**: 485—560.

ON THE OPTIMAL SYMMETRICAL WAVELET IN SUBBAND CODING

JIA PEIZHANG LI HAITAO

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract The symmetrical wavelets with linear phase are extensively applied in signal or image compression. It has the flexibility in basis selection. This makes it possible to design signaladapted wavelet. The problem of optimal symmetrical wavelet in subband coding is investigated in the paper. The optimal objective measure is the coding gain G_{SBC}. For a stationary random signal the optimal wavelet depends only on the power spectral density (PSD) of the signal. The calculated results corresponding to three typical PSD are given.

Key words Optimal wavelet, symmetrical wavelet, subband conding.

贾沛璋,李海涛 简介见本刊第 23 卷第 2 期.