第 22 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 6
1996 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1996

短 文

广义系统极点配置的一种代数几何方法

唐万生　李光泉　郑丕谔
(天津大学系统工程研究所　天津　300072)

摘　　要

利用代数几何方法给出了可任意配置极点的条件，并证明了实数域上广义系统若存在复反馈配置极点，则一定存在实反馈配置极点.

关键词: 广义系统，反馈，极点配置.

1　引言及准备知识

关于广义系统的状态反馈极点配置问题，首先由文献[1]利用几何方法进行了研究；其后，文献[2—4]又采用代数方法研究了此类问题.

本文将以代数几何为工具，从理论上研究广义系统状态反馈极点配置问题.

1.1　有理映射

利用代数几何方法研究广义系统极点配置问题，主要是使用有理映射的概念及其性质.

这里所涉及到的有关代数几何概念，诸如代数集、闭集、开集、几乎所有的 (almost all) 子集、有理映和有理映射几乎到上等，可参见文献[5—7].

引理 1[5]. 设 C^N 到 C^M 的有理映射 ϕ 在 $X\subseteq C^N$ 上正则，如果存在 $x_0\in X$，使得 $d\phi(x_0)$为到上的，则 ϕ 为几乎到上的.

1.2　广义系统的等价

考虑如下广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $E, A\in C^{n\times n}$; $B\in C^{n\times m}$; $C\in C^{p\times n}$; $\det E = 0$; $\det(sE - A)\neq 0$.

设 $J_0(E) = \{P: PE = EP, P\in C^{n\times n}\}$，则 $J_0(E)$构成半群；设 $J(E) = \{P: PE = EP, P\in C^{n\times n}, \det P\neq 0\}$，则 $J(E)$ 构成群.

令 $P\in J(E)$，做变换 $x_1 = Px$，则(1)式可变成下列形式

本文于 1994 年 6 月 23 日收到

$$\begin{cases} E\dot{x}_1 = PAP^{-1}x_1 + PBu, \\ y = CP^{-1}x_1. \end{cases} \tag{2}$$

称广义系统(1)与(2)在 $J(E)$ 下等价.

定义 1. 如果存在 $P\in J(E)$, $K\in \boldsymbol{C}^{m\times n}$ 使得 $E_1=E$, $A_1=P(A+BK)P^{-1}$, $B_1=PB$, $C_1=CP^{-1}$, 则称 (E_1, A_1, B_1, C_1) 与 (E, A, B, C) 在 $J(E)$ 下反馈等价.

定义 2. 令 $GL(n,\boldsymbol{C})=\{M:M\in \boldsymbol{C}^{n\times n},\det M\neq 0\}$. 如果存在 P, $Q\in GL(n,\boldsymbol{C})$ 及 $F,K\in \boldsymbol{C}^{m\times n}$, 使得 $E_1=P(E+BF)Q$, $A_1=P(A+BK)Q$, $B_1=PB,C_1=CQ$, 则称 (E_1,A_1,B_1,C_1) 与 (E,A,B,C) 限制反馈等价.

2 广义系统极点配置

2.1 在 $J(E)$ 下的有限极点配置

考虑下列有理映射 $\phi:J(E)\times \boldsymbol{C}^{m\times n}\to \boldsymbol{C}^{n\times n}$,

$$\phi(P,K)=P(A+BK)P^{-1},\forall P\in GL(n,\boldsymbol{C}),K\in \boldsymbol{C}^{m\times n}. \tag{3}$$

引理 2[8]**.** $J_0(E)$ 为 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 中闭线性子空间,并且 $\dim J_0(E)=\sum_{ij} n_{ij}$, 其中 n_{ij} 为 E 的初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 和 $(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$ 的公因子的阶数.

引理 3. $J(E)$为 $J_0(E)$中的欧氏拓扑开集.

证明. 因为 $J(E)=J_0(E)\cap GL(n, \boldsymbol{C})$, 根据可逆矩阵的性质可知 $GL(n, \boldsymbol{C})$ 为 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 中的欧氏拓扑下的开集,所以 $J(E)$ 为 $J_0(E)$ 中的欧氏拓扑开集.

显然由(3)式定义的有理映射 ϕ 在 $J(E)\times \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 上为正则的. 如果有理映射 ϕ 为几乎到上的,则广义系统 (E,A,B,C) 可任意配置有限极点.

在 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 上如下定义内积

$$\langle X,Y\rangle = tr(X^*Y) \quad \forall X,Y\in \boldsymbol{C}^{n\times n}.$$

其中 X^* 为 X 的共轭转置, $tr(\cdot)$ 为矩阵的迹.

由引理 2 知 $J_0(E)\times \boldsymbol{C}^{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{C}^{n\times n}\times \boldsymbol{C}^{m\times n}$ 的闭线性子空间, 令 $\Omega=\{J_0(E)\times \boldsymbol{C}^{m\times n}\}^{\perp}$ 为它的正交补空间.

设

$$M=\begin{bmatrix} I\otimes\bar{A}-A^*\otimes I \\ B^*\otimes I \end{bmatrix},$$

其中 $\bar{A}$ 为 A 的共轭,⊗表示 Kronecker 积.

定理 1. 如果 $M^{-1}\Omega=\{0\}$, 则由(3)式定义的有理映射 ϕ 为几乎到上的. 即广义系统 (E,A,B,C) 可任意配置有限极点.

证明. 对 $\forall P\in J(E),\forall G\in J_0(E),\forall K,F\in \boldsymbol{C}^{m\times n}$,由 $J(E)$为 $J_0(E)$中的开集,可取充分小的 $t\in R^1$,使得 $(P+tG)\in J(E)$,即 $(P+tG)^{-1}$ 存在. 因此有

$$\mathrm{d}\phi(P, K)(G, F)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(P+tG)(A+B(K+tF))\cdot(P+tG)^{-1}]|_{t=0}.$$

化简后可得

$$d\phi(P,K)(G,F)=G(A+BK)P^{-1}-P(A+BK)P^{-1}GP^{-1}+PBFP^{-1}.$$

取 $P=I,K=0$,则有 $d\phi(I,0)(G,F)=GA-AG+BF$.

令 $\psi(G,F)=d\phi(I,0)(G,F)$,$\psi$ 为到上的等价于 $\langle X,R(\psi)\rangle=0\Rightarrow X=0$,其中 $R(\psi)$ 为 ψ 的值域.

对 $\forall(G,F)\in J_0(E)\times \boldsymbol{C}^{m\times n}$, 如果

$$0=trX^*(GA-AG+BF)=tr(XA^*-A^*X)^*G+tr(B^*X)^*F,$$

则 (XA^*-A^*X,B^*X) 与 (G,F)正交. 由 (G,F) 的任意性有

$$\begin{bmatrix} I\otimes\bar{A}-A^*\otimes I \\ B^*\otimes I \end{bmatrix}\vec{X}\in\Omega,$$

其中 $\vec{X}$ 为 X 的按行拉直,$\otimes$为矩阵 Kronecker 积.

因为 $M^{-1}\Omega=\{0\}$,所以 $\vec{X}=0$,即 $X=0$. 由引理 1 知 ϕ 为几乎到上的,故此广义系统可任意配置有限极点.

2.2 限制等价下的极点配置

考虑下列有理映射

$$\begin{aligned}&\phi:GL(n,\boldsymbol{C})\times GL(n,\boldsymbol{C})\times \boldsymbol{C}^{m\times n}\times \boldsymbol{C}^{m\times n}\to \boldsymbol{C}^{n\times n}\times \boldsymbol{C}^{n\times n},\\ &\phi(P,Q,F,K)=(P(E+BF)Q,P(A+BK)Q),\\ &\forall P,Q\in GL(n,\boldsymbol{C}),\ \forall F,K\in \boldsymbol{C}^{m\times n}.\end{aligned}\tag{4}$$

显然,由(4)式定义的 ϕ 是正则的.

在 $\boldsymbol{C}^{n\times n}\times \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 上如下定义内积

$$\langle (X,Y),(W,V)\rangle=trX^*W+trY^*V,\forall(X,Y),(W,V)\in \boldsymbol{C}^{n\times n}\times \boldsymbol{C}^{n\times n},$$

经计算可得

$$\begin{aligned}d\phi(I,I,0,0)(\Delta P,\Delta Q,\Delta F,\Delta K)=(&\Delta PE+E\Delta Q+B\Delta F,\\ &\Delta PA+A\Delta Q+B\Delta K),\forall\Delta P,\Delta Q\in \boldsymbol{C}^{n\times n},\forall\Delta F,\Delta K\in \boldsymbol{C}^{m\times n}.\end{aligned}$$

令 $\psi(\Delta P,\Delta Q,\Delta F,\Delta K)=d\phi(I,I,0,\ 0)\ (\Delta P,\ \Delta Q,\ \Delta F,\ \Delta K)$, 则 ψ 为 $\boldsymbol{C}^{n\times n}\times \boldsymbol{C}^{n\times n}\times \boldsymbol{C}^{m\times n}\times \boldsymbol{C}^{m\times n}$ 到 $\boldsymbol{C}^{n\times n}\times \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 的线性映射,ψ 为到上的等价于 ψ^* 为 1—1 的. 计算得

$$\psi^*(X,Y)=(XE^*+YA^*,E^*X+A^*Y,B^*X,B^*Y),\forall X,Y\in \boldsymbol{C}^{n\times n}.$$

定理 2. 如果下列矩阵M列满秩，则由(4)式定义的有理映射 ϕ 为几乎到上的，即广义系统 (E,A,B,C) 可任意配置极点. 这里

$$M=\begin{bmatrix} I\otimes\bar{E} & I\otimes\bar{A} \\ E^*\otimes I & A^*\otimes I \\ B^*\otimes I & 0 \\ 0 & B^*\otimes I \end{bmatrix}.$$

证明. ψ^* 为 1—1 的等价于下列矩阵方程,只有零解

$$\begin{cases} XE^*+YA^*=0, \\ E^*X+A^*Y=0, \\ B^*X=0, \\ B^*Y=0. \end{cases}$$

将上述矩阵方程按行拉直即可得到结论.

3 复反馈与实反馈

因为有关有理映射的结果只是在复数域上成立，所以前面的讨论都是在复数域上进行的. 但在实际中广义系统的系数矩阵 E,A,B 均为实矩阵，在下面讨论中均假定 E，A,B 为实值矩阵.

定理 3. $(A+BF)$ 在 $J(E)$ 下等价于实值矩阵 D 的充要条件是存在实值矩阵 K，使得 $(A+BK)$ 在 $J(E)$ 下等价于 D.

证明. 设 $F=F_1+iF_2$，F_1，F_2 均为实值矩阵. 不失一般性，假定 $F_1=0$，则 $F=iF_2$. 设 $P\in J(E)$ 使得 $(A+BF_2i)P=PD$. 令 $P=P_1+iP_2$，其中 P_1，P_2 均为实值矩阵. 由 $PE=EP$ 可得 $P_jE=EP_j(j=1,2)$，所以有

$$(A+BF_2i)(P_1+iP_2)=(P_1+iP_2)D.$$

根据实部、虚部分别相等得

$$AP_1-BF_2P_2=P_1D, \tag{5}$$

$$AP_2+BF_2P_1=P_2D. \tag{6}$$

将(6)式两边同乘以实数 β，再与(5)式相加，可得

$$A(P_1+\beta P_2)+BF_2(-P_2+\beta P_1)=(P_1+\beta P_2)D.$$

因 $\det(P_1+iP_2)\neq 0$，故关于 β 的多项式 $\det(P_1+\beta P_2)\not\equiv 0$，所以可选取 $\beta\in R^1$，使得 $\det(P_1+\beta P_2)\neq 0$. 因此有

$$A+BF_2(-P_2+\beta P_1)(P_1+\beta P_2)^{-1}=(P_1+\beta P_2)D(P_1+\beta P_2)^{-1}.$$

令 $K=F_2(-P_2+\beta P_1)(P_1+\beta P_2)^{-1}$，则 $(A+BK)$ 在 $J(E)$ 下等价于 D. 反之亦然.

定理 4. 设 A,B,D 均为实矩阵，$(A+BF)$ 限制等价于 D 的充要条件是存在实值矩阵 K，使得 $(A+BK)$ 限制等价于 D.

定理 5. 设 E,A,B,G,D 均为实值矩阵，存在可逆矩阵 $P,Q\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 及 $K,F\in \mathbf{C}^{m\times n}$，使得 $(E+BK)P=QG,(A+BF)P=QD$ 的充要条件是存在实阵 K_0,F_0 及可逆实阵 P_0,Q_0，使得 $(E+BK_0)P_0=Q_0G,(A+BF_0)P_0=Q_0D$.

参 考 文 献

[1] Cobb J D. Feedback and pole placement in descriptor variable systems. *Int. J. Control*, 1981, **33**: 1135—1146.

[2] Armentano V A. Eigenvalue placement for generalized linear systems. *Systems and Control Letters*, 1984, **4**: 199—203.

[3] Wang Y Y *et al*. Pole Placement and compensator design of generalized systems. *Systems and Control Letters*, 1987, **8**: 205—209.

[4] Blanehini F. Controllability analysis and eigenvalue assignment for generalized state-space systems. *Systems and Control Letters*, 1990, **15**: 285—293.

[5] Hermann R *et al*. Application of algebraic geometry to systems theory (Part I). *IEEE Trans*. 1977, **AC-22**: 19—25.

[6] Shafarevich I R. Basic Algebraic Geometry. Spring-verlag, 1977.

[7] 唐万生，李光泉等. 广义系统输出极点配置的代数几何方法. 天津大学学报，1995，**28**: 163—167.
[8] 李 乔. 矩阵论八讲. 上海科学技术出版社，1988.

THE POLE ASSINGEMENT OF SINGULAR SYSTEMS WITH ALGEBRAIC GEOMETRY METHOD

TANG WANSHENG LI GUANGQUAN ZHENG PI'E
(*Institute of Systems Engineering, Tianjin University, Tianjin* 300072)

ABSTRACT

In this paper, the problems of pole assignment of singular systems are investigated by algebraic geometric method. The sufficient conditions for assignment of finite poles and other kinds of poles are developed. In addition, equivalence of the existence of a complex state feedback to the real state feedback is proved.

Key words: Singular systems, feedback, poles assignment.

(上接第 680 页)