



含二维临界部分 系统的李亚普诺夫函数构造

苗 原

李春文

(清华大学计算机系 北京 100084) (清华大学自动化系 北京 100084)

关键词 中心流形, 稳定性, 非线性系统, 李亚普诺夫函数.

1 引言

李亚普诺夫函数不仅是重要的判稳工具, 还与使系统镇定的控制律^[1,2]有着密切的联系. 然而在这一领域的研究中丰富的理论结果^[3,4]与难以见到的实用算法形成了巨大反差. 随机给出一个含临界部分的非线性系统, 要判定其稳定性都是十分困难的. 本文在文[5]的基础上, 对含不超过二维的中心流形上的临界部分的李亚普诺夫函数提出了构造算法, 该算法的计算程序实现具有良好的实用效果.

2 主要结果

2.1 问题描述

考查自治系统

$$\dot{x} = f(x). \quad (1a)$$

其中 $x \in R^n$, f 解析, $f(0) = 0$. 若系统含二维临界部分, 则可以表示为分量形式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, \quad (1b)$$

或

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = Bx_2 + f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (1c)$$

其中 A 的特征实根实部为负, B 的特征实根实部为0, $x_1 \in R^{n-2}$, $x_2 \in R^2$. 本文将要对这样一类非线性系统建立判稳算法, 使其对大多数随机给出的系统, 均能判定其稳定性.

2.2 降阶

由中心流形定理^[6]可知, 某邻域 $V \subset R^2$ 中, 存在适当的解析映射 $\pi: V \rightarrow R^{n-2}$ 满足

$$\pi(0) = 0, \frac{\partial \pi}{\partial x_2}(0) = 0, \quad (2)$$

则 $S = \{(x_1, x_2) \in R^{n-2} \times V : x_1 = \pi(x_2)\}$ 为系统(1a)的中心流形. 系统在原点附近是渐近稳定的, 或者是不稳定的, 当且仅当系统局限在中心流形上是渐近稳定的, 或者是不稳定的. 这样, 系统(1)的稳定性问题即可转化为中心流形上的系统

$$\frac{dx_2}{dt} = Bx_2 + f_2(\pi(x_2), x_2) \quad (3)$$

的稳定性问题.

2.3 临界系统稳定判定

由于 $\frac{dx_2}{dt} = Bx_2 + f_2(\pi(x_2), x_2) + R(x_2)$ 是一个高阶临界系统, 一般而言, 只有构造李亚普诺夫函数来判别其渐近稳定性或不稳定性. 在构造李亚普诺夫函数时, 文[5]中的结果使得约束比传统方法减少一半.

定理1. 设存在连续可微函数 $V(x)$, $V(0) = 0$, 满足沿系统(1)轨线的导数 DV 在原点的某个邻域内是正定. 则若 $V(x)$ 负定, 系统(1)是渐近稳定的, 否则系统(1)是不稳定的.

定理1中这种特殊的李亚普诺夫函数称为正则判别函数. 在李亚普诺夫函数搜索过程中, 需要对 DV 的定号性作出判定. 设所含临界部分, 也即中心流形是2维的, 记

$$\begin{aligned} x_2 &= (z_1, z_2), \\ DV &= P_k + P_{k+1} + P_{k+2} \cdots \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $z_1, z_2 \in R^1$, P_k, P_{k+1}, P_{k+2} 分别为 DV 中的 k 次, $k+1$ 次, $k+2$ 次齐次项, k 偶数. 首先要对 P_k 的定号性作出判断. 令

$$P_k = z_2^k \left(a_0 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + \cdots + a_k \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^k \right), \quad (5)$$

那么, 若 $a_0 \cdot a_k > 0$, 关于 l 的方程 $\tilde{P}(l) = a_0 + \cdots + a_n l^k = 0$ 没有实根, 则 P_k , 也就是说 DV 是正定的. $\tilde{P}(l)$ 含有奇次重实根, 则 P_k , 也就是说 DV 是不定的. 若方程只含有偶次重实根, 设实根的集合为 $R = \{r_1, \cdots, r_m\}$, 那么, 若 $DV - P_k$ 中代入 $z_1 = r_i z_2, i = 1, \cdots, m$ 均有 $DV - P_k$ 上正定, 则 DV 是正定的.

定理2 二元多项式 $P(z_1, z_2) = \sum_{i=k}^n P_i(z_1, z_2)$, $P_k = z_2^k \left(a_0 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + \cdots + a_k \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^k \right)$ 正定的充分必要条件是

- 1) $a_0 \cdot a_k > 0, a_0 > 0$.

- 2) (a) 关于 l 的方程 $a_0 + \cdots + a_n l^k = 0$ 没有实根, 或 (b) 关于 l 的方程 $a_0 + \cdots + a_n l^k = 0$ 只含有偶次重复实根, 设实根的集合为 $R = \{r_1, \cdots, r_m\}$, $DV - P_k$ 中代入 $z_1 = r_i z_2, i = 1, \cdots, m$, 得到的一元方程均有首项次数为偶次且系数为正.

3 算法

根据上节的结果, 对于最多含二维临界部分解析系统的稳定性, 可按如下算法判断其稳定性.

第1步 将系统展开成级数形式;

第2步 对系统进行相似变换, 使线性部分化为 Jordan 标准形;

第3步 若特征根均具有负实部, 则系统原点渐近稳定, 转第6步;

若某特征根具有正实部,则系统在原点不稳定,转第6步;

第4步 按公式求取非零中心流形近似 π ,系统函数在中心流形上为(5)式,若 $\dim(x_2)=1$,那么若首项次数为奇次且系数为负,则系统原点渐近稳定,否则,不稳定,转第6步;

第5步 $\dim(x_2)=2$,按2.2,2.3的结果构造正则判别函数,并利用判定函数的符号判断系统的稳定性;

第6步 输出结果,结束.

其中第5步可以利用第二节的结果和非线性规划算法求解判定函数,也可以使用随机搜索的方法,事实上,随机搜索的方法的效果已经是十分令人满意的.下述算法对随机产生的中心流形上的百余个临界系统,均顺利地找到了判定函数.

第5.1步 随机产生 V 的系数,

第5.2步 计算 $DV = P_k + P_{k+1} \dots$, k 为偶数,

第5.3步 计算 P_k 的 a_0, a_k ,若 $a_0 \cdot a_k \leq 0$,转5.1步,
若有奇重实根,转5.1步,
若无实根,转5.5步,

第5.4步 求出有偶重实根 r_1, \dots, r_m ,令 $i=1$

第5.4.1步 令 $x_1 = r_i x_2$,代入 $DV - P_k$,若首次系数不为正或首项次数不为偶数,转5.1步,

第5.4.2步 $i=i+1$ 若 $i \leq m$,转5.4.1步;

第5.5步 输出得到的 V .

4 结论与讨论

本文对含二维临界部分的系统给出了一个稳定性判别算法,该算法的计算机实现对随机生成的系统的判定效果证明了它有良好的实用性.本文算法的一个限制条件是判定函数必须存在,对于渐近稳定的系统,判定函数总是存在的^[7],对不稳定的系统却不一定,进一步改进算法可以在扇区上构造判定函数.

参 考 文 献

- [1] Lin Y, Sontag E D. A universal formula for stabilization with bounded controls, *System & Control Letters*, 1991, **16** (6): 393—397.
- [2] Sontag E D. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization, *System & Control Letters*, 1989, **13**(2): 117—123.
- [3] 黄琳,于年才,王龙.李亚普诺夫方法的发展与历史性成就.自动化学报,1993, **19**(5): 587—594.
- [4] 舒仲周,王照林.运动稳定性的研究进展和趋势.力学进展,1993, **23**: 424—431.
- [5] Li Chunwen, Miao Yuan, Miao Qinghai. A Method to judge the stability of dynamical system, In: Proceeding of YAC'95 IFAC, Beijing. Pergamon press, 1995. 101—106.
- [6] Alberto Isidori. Nonlinear Control System. Springer-Verlag, 1991.
- [7] 贺建勋.常微分方程.长沙:湖南科学技术出版社,1991.
- [8] Маякин. Теория устойчивости Движения. МОСКВА: ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», 1966.

STABILITY DETERMINATE FOR NONLINEAR SYSTEMS INCLUDING 2-DIMENSION CRUCIAL PART

MIAO YUAN

LI CHUNWEN

(Computer Dept., Tsinghua Univ., Beijing 100084) (Automation Dept., Tsinghua Univ., Beijing 100084)

Key words Center manifold, crucial system, stability, Lyapunov function, nonlinear systems.



98'《中国控制会议》征文通知

98'《中国控制会议》拟定于一九九八年八月在浙江宁波举行。会议由中国自动化学会控制理论专业委员会主办,由 IEEE 北京分部及中国自动化学会旅英分会协办。具体事宜如下:

一、**征文范围**:控制理论及其应用未发表的论文,内容包括下列领域的理论与应用:

线性系统	非线性系统	随机控制系统	计算机集成制造系统
专爱系统	分布参数系统	离散事件系统	社会经济系统
大系统	H_∞ 控制	适应控制	生态环境系统
鲁棒控制	预测控制	智能控制	机器人控制
模糊控制	神经网络	容错控制	系统辨识与建模
模型降阶	稳定性分析	最优估计	计算机辅助设计
工业控制	计算机辅助设计	通讯系统	

二、**截止日期**:收稿截止日期为1998年2月28日。

三、**会议请奖**:凡申请《中国控制会议》第五届《关肇直奖》的论文,需在投稿时注明,交论文一式九份,并附工作证(或学生证)和身份证复印件,及至少一份同行教授级专家推荐意见(参见142页《关肇直奖》条例)。

四、**说明**:

1. 投稿时请注明文章所属的研究方向(见上述征文范围)。
2. 会议录用的文章将于3月底通知作者。
3. 请作者自留底稿,无论是否录取,一律不退稿。

五、**联系人**:刘智敏

通讯地址:中国科学院系统科学研究所(北京中关村 100080)

电话:(010)62532161 传真:(010)62587343 电子信箱:1sc@iss03.iss.ac.cn

中国自动化学会
控制理论专业委员会
一九九七年十一月