

研究论文

求解多维半透明介质内辐射传递的谱元法

赵军明, 刘林华

(哈尔滨工业大学能源科学与工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 直角坐标系下的辐射传递方程可以看作一类特殊的对流扩散方程, 且具有强对流特性。采用数值方法求解该问题需要特别的稳定技术, 否则计算结果往往会出现非物理振荡现象。本文发展了基于流向迎风彼得罗夫-伽辽金 (SUPG) 格式的谱元法来求解多维半透明介质内的辐射传递。采用 3 个算例对 SUPG 谱元法求解多维半透明介质内辐射传递的性能进行了检验。结果表明, 与伽辽金谱元法相比, SUPG 谱元法有效地消除了了解的非物理振荡现象, 同时与解析解及文献中的结果相比较, SUPG 谱元法对于求解多维半透明介质内的辐射传递有着很好的精度。

关键词: 辐射换热; 谱元法; 迎风格式

中图分类号: TK 124

文献标识码: A

文章编号: 0438-1157 (2007) 05-1110-05

Spectral element method for solving radiative heat transfer in semi-transparent media

ZHAO Junming, LIU Linhua

(School of Energy Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, Heilongjiang, China)

Abstract: Radiative transfer equation (RTE) in Cartesian coordinates can be considered as a special kind of convective-diffusive equation and is convection dominated. Numerical solution of the convection dominated problem often suffers from spurious oscillations. The spectral element method based on streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG) stabilization scheme was developed to solve multidimensional radiative heat transfer in semi-transparent media. Three test cases were taken as examples to verify the performance of the SUPG spectral element method for solving multi-dimensional radiative heat transfer in semi-transparent media. The SUPG spectral element method effectively diminished the spurious oscillations as compared with the Galerkin spectral element method. The distributions of radiative intensity and net wall heat flux were calculated and compared with the analytical results and data in references. By comparison, it was shown that the SUPG spectral element method developed in this paper had good accuracy in solving radiative heat transfer in semi-transparent media.

Key words: radiative heat transfer; spectral element method; upwind scheme

引 言

求解半透明介质内的辐射传递具有很广泛的工

程应用背景, 例如应用于燃气轮机燃烧室^[1]、锅炉与各种工业炉内的燃烧^[2]、太阳能利用^[3]、火箭推进^[4]、脉冲激光^[5]、生物工程^[6]等, 因此发展求解

2006-06-16 收到初稿, 2006-08-17 收到修改稿。

联系人: 刘林华。第一作者: 赵军明 (1980—), 男, 博士研究生。

基金项目: 国家自然科学基金项目 (50425619, 50336010)。

Received date: 2006-06-16.

Corresponding author: Prof. LIU Linhua. E-mail: lhliu@hit.edu.cn

Foundation item: supported by the National Natural Science Foundation of China (50425619, 50336010).

半透明介质内辐射传递的高效数值方法是一项重要的研究内容。近几十年来，已发展了许多数值方法求解半透明介质内的辐射换热，主要有蒙特卡洛法、区域法、离散坐标法^[7-8]、有限体积法^[9-11]等。但这些方法大都是低阶方法（一般仅具有 1 阶或 2 阶的精度），同时仅具有 h 收敛性，即为了获得更高的精度只能通过加密网格来实现，这往往需要繁杂的网格重新划分的操作。

谱元法首先由 Patera^[12] 提出并在之后被成功地应用于计算流体力学和传热等领域。该方法具有 hp 收敛特性。为了克服低阶方法的不足，谱元法受到重视并开始应用于半透明介质内辐射传递的求解。Pontaza 等^[13] 采用最小二乘 Legendre 谱元法求解了一维半透明介质内的辐射传递。Zhao 等^[14] 发展了一种最小二乘 Chebyshev 谱元法并应用于求解多维半透明介质内的辐射传递。这些工作显示出谱元法求解一维及多维辐射传递问题具有很好的前景。

目前，对于谱元法应用较为广泛的稳定格式除了最小二乘法（least square, LS），主要还有流向迎风格式（streamline upwind, SU）^[15]，流向迎风彼得罗夫伽辽金格式（streaming upwind Petrov Galerkin, SUPG）^[15]。与 SU 格式相比，SUPG 格式因满足一致性，同时具有良好的稳定特性而在计算流体力学等领域得到了广泛的应用^[15-17]。

本文发展了基于 SUPG 迎风格式的谱元法来求解多维半透明介质内的辐射传递。采用 3 个算例对 SUPG 谱元法求解多维半透明介质内辐射传递的性能进行了检验。

1 辐射传递的离散坐标方程

考虑吸收、发射和散射灰介质内的辐射传递，离散坐标形式的辐射传递方程可以写为

$$\boldsymbol{\Omega}^m \cdot \nabla I^m + \beta I^m = S^m \quad (1)$$

其中，源项 S^m 定义为

$$S^m = \kappa_a I_b + \frac{\kappa_s}{4\pi} \sum_{m'=1}^M I^{m'} \Phi^{m',m} \omega_{\omega}^{m'} \quad (2)$$

对不透明漫射边界（ $\boldsymbol{\Omega}^m \cdot \mathbf{n}_w > 0$ ）给定边界条件：

$$I_w^m = \epsilon_w I_{bw} + \frac{1 - \epsilon_w}{\pi} \sum_{\mathbf{n}_w \cdot \boldsymbol{\Omega}^{m'} < 0} I_w^{m'} |\mathbf{n}_w \cdot \boldsymbol{\Omega}^{m'}| \omega_{\omega}^{m'} \quad (3)$$

其中， \mathbf{n}_w 为壁面内法向矢量， $\boldsymbol{\Omega}$ 为辐射方向矢量。若将 $\boldsymbol{\Omega}^m$ 看作速度矢量，则算子 $\boldsymbol{\Omega}^m \cdot \nabla$ 可以认为是一个对流算子。因此对每一个 $\boldsymbol{\Omega}^m$ ，式（1）可以看作是具有强对流特性的特殊对流扩散方程。对流项

的出现会导致求解过程的不稳定，若不作特殊稳定处理，数值解会出现非物理振荡。

2 谱元法离散及稳定格式的施加

2.1 谱元近似

谱元法在各单元上以正交函数系作为基函数。本文采用 Chebyshev 多项式作为基函数。定义在一维标准单元 $[-1, 1]$ 上的 $N-1$ 阶节点基函数为通过 N 个 Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) 节点的拉格朗日插值多项式。CGL 节点由式（4）给出

$$\zeta_j = -\cos\left(\frac{j-1}{N-1}\pi\right), j = 1, \dots, N \quad (4)$$

通过使用重心插值公式，拉格朗日插值多项式可以写为^[18]

$$h_i(\zeta) = \frac{\frac{a_i}{\zeta - \zeta_i}}{\sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\zeta - \zeta_j}}, \zeta \in [-1, 1] \quad (5)$$

其中

$$a_j = (-1)^{j-1} \delta_j, \delta_j = \begin{cases} 1/2, j = 1 \text{ or } N \\ 1, \text{ otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

对于多维情形，基函数通过张量积来得到。谱元近似节点形函数的构造见文献 [14]。基于谱元近似各节点形函数 ϕ_i ， $\boldsymbol{\Omega}^m$ 方向的辐射强度 I^m 可以近似为

$$I^m(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{sol}}} I_i^m \phi_i(\mathbf{x}) \quad (7)$$

其中， I_i^m 表示 I^m 在节点 i 处的数值， N_{sol} 为求解节点总数。

2.2 SUPG 迎风格式离散

谱元法以谱元近似结合加权余量法对偏微分方程进行求解。对于 SUPG 格式，加权余量法权函数 W_j 取为

$$W_j = \phi_j + \alpha \boldsymbol{\Omega}^m \cdot \nabla \phi_j \quad (8)$$

其中， α 为迎风因子或称为流向扩散系数。将谱元近似式（7）带入式（1）并应用加权余量法，线性算子方程（1）的 SUPG 离散形式可写为

$$\mathbf{K}^m \mathbf{I}^m = \mathbf{H}^m \quad (9)$$

其中，刚度矩阵 \mathbf{K}^m 及方程右边向量 \mathbf{H}^m 定义为

$$\begin{aligned} K_{ji}^m &= \int_V (\phi_j \boldsymbol{\Omega}^m \cdot \nabla \phi_i) dV + \int_V (\beta \phi_j \phi_i) dV \\ &+ \int_V \alpha (\boldsymbol{\Omega}^m \cdot \nabla \phi_j \boldsymbol{\Omega}^m \cdot \nabla \phi_i) dV \\ &+ \int_V \alpha (\beta \phi_j \boldsymbol{\Omega}^m \cdot \nabla \phi_i) dV \end{aligned}$$

$$H_j^m = \int_V S^m \phi_j dV + \int_V \alpha (\Omega^m \cdot \nabla \phi_j S^m) dV \quad (10)$$

对于边界条件, 采用配点法^[14]进行施加。式(9)给出的各方向的矩阵方程采用直接高斯消去法求解, 而各方向之间的耦合采用文献 [14] 中给出的迭代方案进行求解。

3 结果与分析

3.1 算例 1: 具有高斯形源项的黑体平行平板

考虑一维无散射无限长黑体平板间的辐射传递。介质内的辐射源项为具有高斯函数的形式。此问题可以采用辐射传递方程描述为

$$\mu \frac{dI}{dx} + \kappa_a I = e^{-(x-c)^2/\gamma^2}, \quad x, c \in [0, 1] \quad (11)$$

当 $\mu > 0$ 时边界条件按式 (12) 给定:

$$I(0, \mu) = \kappa_a^{-1} e^{-c^2/\gamma^2} \quad (12)$$

这里研究 $c = 0.5$ 和 $\gamma = 0.02$ 时的情形。应用 SUPG 谱元法求解此问题, 空间离散采用 4 个单元, 基函数取为 10 阶 Chebyshev 多项式。图 1 给出了当 $\mu = 1$, $\kappa_a = 0.1$ 及迎风因子 α 分别取为 0.1 和 0.01 时辐射强度的计算结果并与解析解 (analytical) 及相同空间离散时最小二乘谱元法 (LSSEM) 及伽辽金谱元法 (GSEM) 进行了比较。与解析解相比, 伽辽金谱元法的计算结果有明显的非物理振荡, 而 SUPG 谱元法及最小二乘谱元法有效地消除了非物理振荡。同时随着迎风因子 α 从 0.01 增大到 0.1, 由于扩散作用增强, SUPG 谱元法的稳定性略有提高, 接近于最小二乘谱元法的计算结果。相对于精确解 SUPG 谱元法的最大相对误差小于 0.9%。

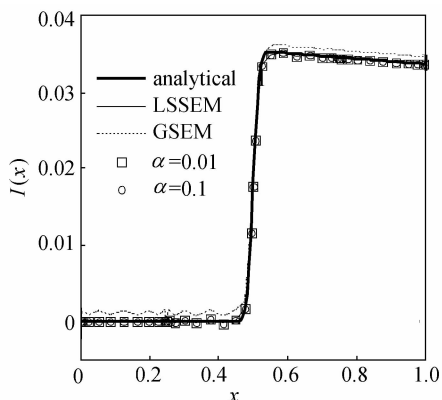


图 1 平板间的辐射强度分布

Fig. 1 Radiative intensity distribution between parallel plates

3.2 算例 2: 黑体方腔内的各向异性散射

为了检验由 SUPG 格式迎风效应带来的附加扩散对辐射散射特性的影响, 考虑二维黑体方腔内的各向异性散射问题。基于方腔边长 $L = 1$ 的光学厚度 ($\tau_L = \beta L$) 为 1.0。介质温度 $T_g = 1000$ K, 各壁面均保持为 0 K。散射特性由 F2 散射相函数描述, 其不对称因子为 0.66972。

应用 SUPG 谱元法求解此问题, 空间离散采用 16 个四边形单元, 基函数取 4 阶 Chebyshev 多项式, 角度离散取为 S_8 。图 2 中给出了不同迎风因子时下壁面的量纲 1 净辐射热流分布, 同时与文献 [19] 中 DOM 的计算结果进行对比。两种迎风因子时的计算结果与文献 [19] 中的结果均符合很好, SUPG 谱元法的最大相对误差小于 0.7%。当迎风因子 α 从 0.01 增大到 0.1 时 SUPG 谱元法的计算结果差别较小。

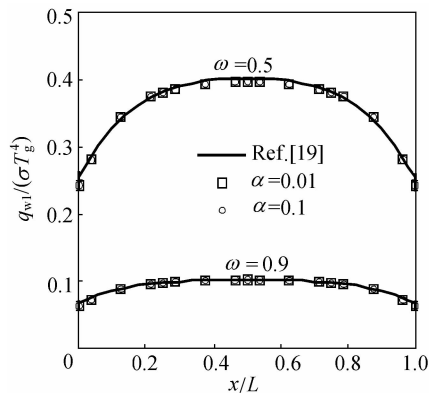


图 2 下壁面量纲 1 净辐射热流分布

Fig. 2 Dimensionless net wall radiative heat flux distribution along bottom wall

3.3 算例 3: 充满无散射灰体介质的梯形域

考虑充满无散射灰体介质的黑体梯形域内的辐射传递。梯形域下壁面的宽度为 $L = 1$ m。介质温度为 $T_g = 1000$ K, 所有壁面温度保持为 0 K。空间划分分别采用 3 和 27 个单元两种方案, 基函数均取为 4 阶多项式, 角度离散取为 S_8 。图 3 给出了当单元数为 3 时单元划分及谱节点的分布。

图 4 给出了不同光学厚度, 不同迎风因子及不同离散方案时下壁面量纲 1 净辐射热流分布并与文献 [20] 中给出的精确解进行了比较。从图 4 中可以看出在空间划分单元数为 3 和 27 两种方案下 SUPG 谱元法的计算结果与文献 [20] 的精确解均符合很好, SUPG 谱元法的最大相对误差小于

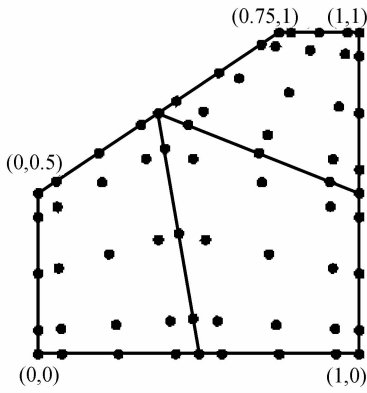


图 3 梯形域网格划分及谱节点分布 ($N_{el}=3$)
Fig. 3 Domain decomposition and spectral node distribution of trapezoidal enclosure ($N_{el}=3$)

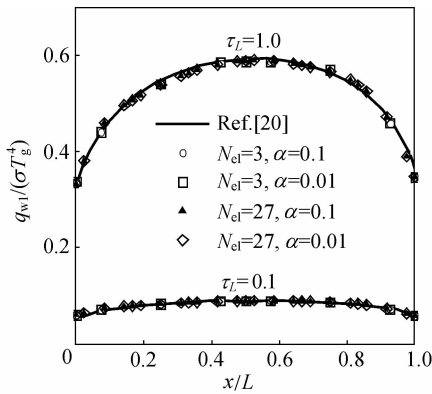


图 4 下壁面量纲 1 净辐射热流分布
Fig. 4 Dimensionless net wall radiative heat flux distribution along bottom wall

2%，说明该算法不依赖网格。当迎风因子 α 从 0.01 增大到 0.1 时 SUPG 谱元法的计算结果差别较小。

4 结 论

辐射传递方程可以看作是一种具有强对流特性的对流扩散方程。这类方程的解往往会出现大梯度甚至间断。对于该类方程的求解需要特别的稳定技术，否则结果可能会出现非物理振荡。本文发展了基于流向迎风彼得罗夫-伽辽金 (SUPG) 格式的谱元方法来求解半透明介质内的多维辐射传递。采用 3 个算例对 SUPG 谱元法求解多维半透明介质内辐射传递的性能进行了检验。与伽辽金谱元法相比，SUPG 谱元法可以有效地消除解的非物理振荡现象，同时与解析解及文献中结果比较，SUPG 谱元法对于求解多维半透明介质内的辐射传递有着很好的精度。

References

- [1] Sutton W H, Chen X L. A general integration method for radiative transfer in 3-d non-homogeneous cylindrical media with anisotropic scattering. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 2004, **84**: 65-103
- [2] Zheng B, Lin C X, Ebdian M A. Combined turbulent forced convection and thermal radiation in a curved pipe with uniform wall temperature. *Numer. Heat Transfer A*, 2003, **44** (2): 149-167
- [3] Lahsani S, Kouhila M, Mahrouz M, Idlimam A, Jamali A. Thin layer convective solar drying and mathematical modeling of prickly pear peel. *Energy*, 2004, **29**: 211-224
- [4] Zhang Wenpu (张文普), Feng Zhenping (丰镇平). Numerical simulation of flow field and thermal analysis for stage separation of multistage missile. *Journal of Propulsion Technology* (推进技术), 2003, **24** (3): 240-243
- [5] Longtin J P, Tien C L. Saturable absorption during high-intensity laser heating of liquids. *ASME J. Heat Transfer*, 1996, **118**: 924-930
- [6] Yamada Y. Light-tissue interaction and optical imaging in biomedicine. *Annual Review of Heat Transfer*, 1995, **6**: 1-59
- [7] Fiveland W A. Discrete-ordinates solution of the radiative transport equation for rectangular enclosures. *ASME J. Heat Transfer*, 1984, **106**: 699-706
- [8] Liu Linhua (刘林华), Yu Qizheng (余其铮), Ruan Liming (阮立明), Tan Heping (谈和平). Discrete ordinate solutions of radiative transfer equation. *Chinese Journal of Computational Physics* (计算物理), 1998, **15** (3): 337-343
- [9] Chai J C, Lee H S. Finite-volume method for radiation heat transfer. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 1994, **8** (32): 419-425
- [10] Hao Jinbo (郝金波), Ruan Liming (阮立明), Tan Heping (谈和平). Radiative heat transfer in two-dimensional anisotropic rectangular media by finite-volume method. *Journal of Chemical Industry and Engineering (China)* (化工学报), 2003, **54** (7): 896-901
- [11] He Zhihong (贺志宏), Tan Heping (谈和平), Liu Linhua (刘林华). Finite volume method for coupled radiation and conduction in scattering non-gray medium. *Journal of Chemical Industry and Engineering (China)* (化工学报), 2001, **52** (5): 434-439
- [12] Patera A T. A spectral element method for fluid dynamics-laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, 1984, **54**: 468-488
- [13] Pontaza J P, Reddy J N. Least-squares finite element formulations for one-dimensional radiative transfer. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 2005, **95** (3): 387-406
- [14] Zhao J M, Liu L H. Least-squares spectral element method

- for radiative heat transfer in semitransparent media. *Numer. Heat Transfer B*, 2006, **50** (5): 473-489
- [15] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with special emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1982, **32**: 199-259
- [16] Owens R G, Chauvière C, Philips T N. A locally-upwinded spectral technique (LUST) for viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2002, **108** (1/2/3): 49-71
- [17] Ilinca F, Hetu J F, Pelletier D. On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2000, **188** (1): 235-255
- [18] Berrut J P, Trefethen L N. Barycentric Lagrange interpolation. *SIAM Review*, 2004, **46** (3): 501-517
- [19] Kim T K, Lee H. Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional rectangular enclosures. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1988, **31** (8): 1711-1721
- [20] Byun D Y, Baek S W, Kim M Y. Prediction of radiative heat transfer in a 2D enclosure with blocked-off, multi-block, and embeded boundary treatments. *ASME J. Heat Transfer*, 2000, **366**: 119-126

《化工学报》 赞助单位

四川大学化工学院

浙江大学化学工程与生物工程学系

大连理工大学化工学院

浙江工业大学化工学院

湘潭大学化工学院

上海化工研究院

上海交通大学化学化工学院

华南理工大学化工学院

武汉工程大学