第 18 卷 第 6 期　自 动 化 学 报　Vol. 18, No. 6
1992 年 11 月　ACTA AUTOMATICA SINICA　Nov., 1992

短文

极大代数上的随机线性系统与 DEDS 的扰动分析[1)]

涂奉生　孙永华
(南开大学计算机与系统科学系，天津　300071)

摘　　要

本文给出了串行生产线的极大代数上的随机线性状态方程，证明了扰动分析适用于这类 DEDS 系统，并给出了其扰动分析的计算方法，该法是较为简单的.

关键词：离散事件动态系统，扰动分析，串行生产线，极大代数.

一、串行生产线的随机状态方程

考虑如图 1 所示的串行生产线.

图中 $J_k, k \in \underline{N}, M_i, i \in \underline{n}$ 分别为工件和机器. 设 $p_i(k, \theta_i)$ 为 J_k 在 M_i 上的加工时间，是带参数 θ_i 的互相独立的随机变量. $x_i(k)$ 为 J_k 离开 M_i 的时间，$y(k)$ 为 J_k 离开生产线的时间. 类似文献 [1] 可得到串行生产线的随机"线性"状态方程

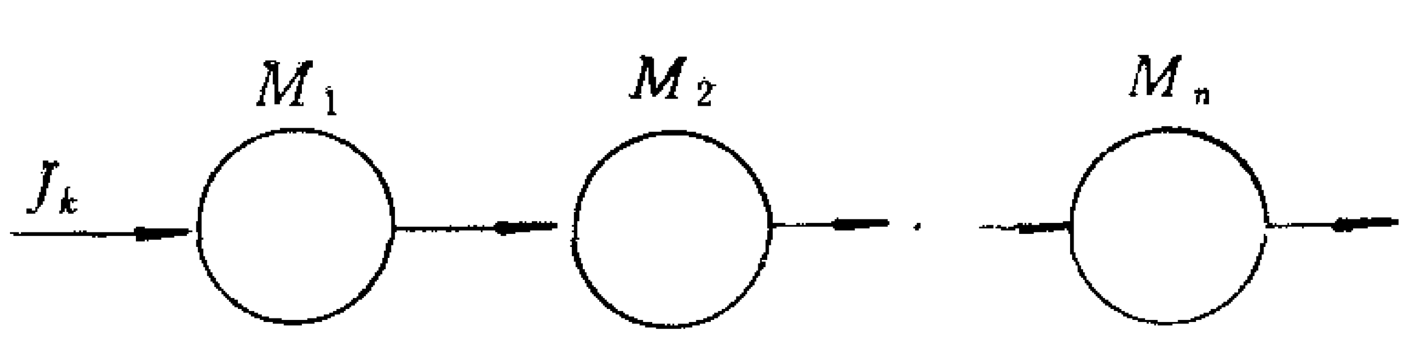

图 1　串行生产线

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k+1) \otimes x(k), & (1) \\ y(k) = c^T \otimes x(k), & (2) \end{cases}$$

其中

$$x^T(k) = (x_1(k), \cdots, x_n(k)), \tag{3}$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) & & & \\ p_{12}(k) & p_2(k) & & \varepsilon \\ \cdots & \cdots & & \\ p_{12\cdots n}(k) & p_{23\cdots n}(k) & \cdots & p_n(k) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$c^T = (\varepsilon, \cdots, \varepsilon, e), \varepsilon = -\infty, e = 0, \tag{5}$$

$$p_{i\cdots j}(k) = p_i(k) \otimes p_{i+1}(k) \otimes \cdots \otimes p_j(k). \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n \tag{6}$$

如果 $x(0) = x_0$ 已知，由状态方程可得到

$$y(k) = c^T \otimes A(k) \otimes A(k-1) \otimes \cdots \otimes A(1) \otimes x_0. \tag{7}$$

本文于 1991 年 7 月 22 日收到.
1) "863"计划自动化领域 CIMS 主题项目支持的课题.

对具有有限存储器的生产线可类似文献[2]建立其随机状态方程。

二、扰动分析[3]原理

如果生产线共加工N个工件,则加工每个工件的平均时间T为

$$T = T(N,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} y(N,\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{\theta}^T = (\theta_1,\cdots,\theta_n). \tag{8}$$

假设 $p_i(k,\theta_i)$ 为连续型随机变量,其分布函数为 $F_i(t;k,\theta_i)$. 则可写为

$$p_i(k,\theta_i) = g_{ik}(r_{ik},\theta_i), \tag{9}$$

这里 r_{ik} 为区间[0,1]上的均匀分布的随机变量,

$$g_{ik}(r_{ik},\theta_i) = F_i^{-1}(r_{ik};k,\theta_i). \tag{10}$$

假定它们在 θ_i 处的期望和方差都存在,并且

1) $\dfrac{\partial g_{ik}(r_{ik},\theta_i)}{\partial\theta_i}$ 以概率 $1(w.p.1)$ 存在,即

$$g_{ik}(r_{ik},\theta_i+\Delta\theta_i) - g_{ik}(r_{ik},\theta_i) = \frac{\partial g_{ik}(r_{ik},\theta_i)}{\partial\theta_i}\cdot\Delta\theta_i + O(r_{ik},\Delta\theta_i);w.p.1 \tag{11}$$

2) $$\lim_{\Delta\theta_i\to 0}\frac{EO(r_{ik},\Delta\theta_i)}{\Delta\theta_i} = 0, \tag{12}$$

记

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) = \{g_{ik}(r_{ik},\theta_i)\,|\,i\in\underline{n},k\in\underline{N}\}. \tag{13}$$

可以证明如下引理:

引理. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})$ 中的随机变量经有限次$\oplus$和$\otimes$运算所得到的随机变量仍然满足式(11)和(12).

定理. 对于串行生产线(1),(2),在式(11),(12)的假定下,有

$$\frac{\partial ET(N,\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i} = E\,\frac{\partial T(N,\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i},\ i\in\underline{n} \tag{14}$$

证明的梗概：由于 $T(N,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}y(N,\boldsymbol{\theta})$，而 $y(N,\boldsymbol{\theta})$ 由 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})$ 中的随机变量经有限次$\oplus$和$\otimes$运算得到，根据引理可知 $T(N,\boldsymbol{\theta})$ 满足式(11)和(12). 由 C_{ao}. x_{i-ren} 在文献[4]中的定理 6,可知式(14)成立.

上述定理表明扰动分析法[3]适用于串行生产线，对具有有限存储的串行生产线也适用.

三、扰动分析的计算

设 $\boldsymbol{\theta}$ 中仅有一个参数 θ_i 在 θ_i^0 处扰动. 记

$$y = y(N,\boldsymbol{\theta}) = y(N,\theta_i,g),\ \ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}). \tag{15}$$

在 θ_i^0 处对 $\boldsymbol{r}$（即对 r_{ik}, $i\in\underline{n}$, $k\in\underline{N}$）取S个样本 r_{ik}^j, $j\in\underline{S}$，便可得到y的S个样本 $y(N,\theta_i^0,\boldsymbol{g}^j)$, $j\in\underline{S}$，其中 $\boldsymbol{g}^j$ 为对应于 $r_{ik}^j, i\in\underline{S}$，的样本. 应用扰动分析法，性能指标

$ET(N,\boldsymbol{\theta})$ 相对于 θ_i 在 θ_i^0 处的灵敏度可计算如下:

$$\frac{\partial ET(N,\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i} = E\,\frac{\partial T(N,\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial y(N,\theta_i,\boldsymbol{g}^j)}{\partial\theta_i}\bigg|_{\theta_i=\theta_i^0}, \tag{16}$$

而 $\dfrac{\partial y(N,\theta_i,g^j)}{\partial\theta_i}$ 的计算步骤如下:

1) 求出由初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 到 $y(N,\theta_i^0,\boldsymbol{g}^j) = x_n(N,\theta_i^0,\boldsymbol{g}^j)$ 的关键路径 ω^*

$$\omega^* = O_1O_2\cdots O_{n+N-1}, \tag{17}$$

其中 O_i 为加工事件(工件在每台机器上加工称为一个加工事件), 令 $P(O_i)$ 为 O_i 的加工时间,则[1]

$$y(N,\theta_i^0,\boldsymbol{g}^j) = P(\omega^*) = P(O_1) + P(O_2) + \cdots + P(O_{n+N-1}); \tag{18}$$

2) 设 ω^* 中在 M_i 上加工的事件,即与参数 θ_i 有关的事件共有 τ 个. 不妨设为 $O_{q+1},O_{q+2},\cdots,O_{q+\tau}$, 则

$$y(N,\theta_i^0,\boldsymbol{g}^j) = g_{i_{k+1}}(r^j_{i_{k+1}},\theta_i^0) + \cdots + g_{i_{k+\tau}}(r^j_{i_{k+\tau}},\theta_i^0) + P^*(\omega^*), \tag{19}$$

其中

$$g_{i_{k+1}}(r^j_{i_{k+1}},\theta_i^0) = P(O_{q+1}),\cdots,g_{i_{k+\tau}}(r^j_{i_{k+\tau}},\theta_i^0) = P(O_{q+\tau}), \tag{20}$$

$$P^*(\omega^*) = P(O_1) + \cdots + P(O_q) + P(O_{q+\tau+1}) + \cdots + P(O_{n+N-1}), \tag{21}$$

显然 $P^*(\omega^*)$ 与 θ_i 无关. 当 $|\Delta\theta_i|$ 足够小时,不会引起关键路径的改变. 即存在 $\delta > 0$, 当 $\theta_i \in (\theta_i^0 - \delta,\theta_i^0 + \delta)$ 时有[1]

$$y(N,\theta_i,\boldsymbol{g}^j) = [g_{i_{k+1}}(r^j_{i_{k+1}},\theta_i) + \cdots + g_{i_{k+\tau}}(r^j_{i_{k+\tau}},\theta_i)] + P^*(\omega^*), \tag{22}$$

式(22)为关于 θ_i 的一曲线段;

3) 由式(22)计算

$$\frac{\partial y(N,\theta_i,\boldsymbol{g}^j)}{\partial\theta_i}\bigg|_{\theta_i=\theta_i^0} = \sum_{l=1}^{\tau}\frac{\partial g_{i_{k+l}}(r^j_{i_{k+l}},\theta_i)}{\partial\theta_i}\bigg|_{\theta_i=\theta_i^0}. \tag{23}$$

由上面的讨论可看出如下几点:

1) 对一个固定的采样, $y(N,\ \theta_i,\ \boldsymbol{g}^j)$ 关于 θ_i 是一条由一些曲线段所组成的曲线,如图 2 所示. 如果多取几个 θ_i^0 值,则可得到相应的多条曲线段. 由此曲线段所组成的曲线可作为 $y(N,\theta_i,\boldsymbol{g}^j)$ 的近似替代曲线. 因而可近似计算出 $\partial y(N,\theta_i,\boldsymbol{g}^j)/\partial\theta_i$, $-\infty < \theta_i < +\infty$, 而不仅是一点 θ_i^0 的值.

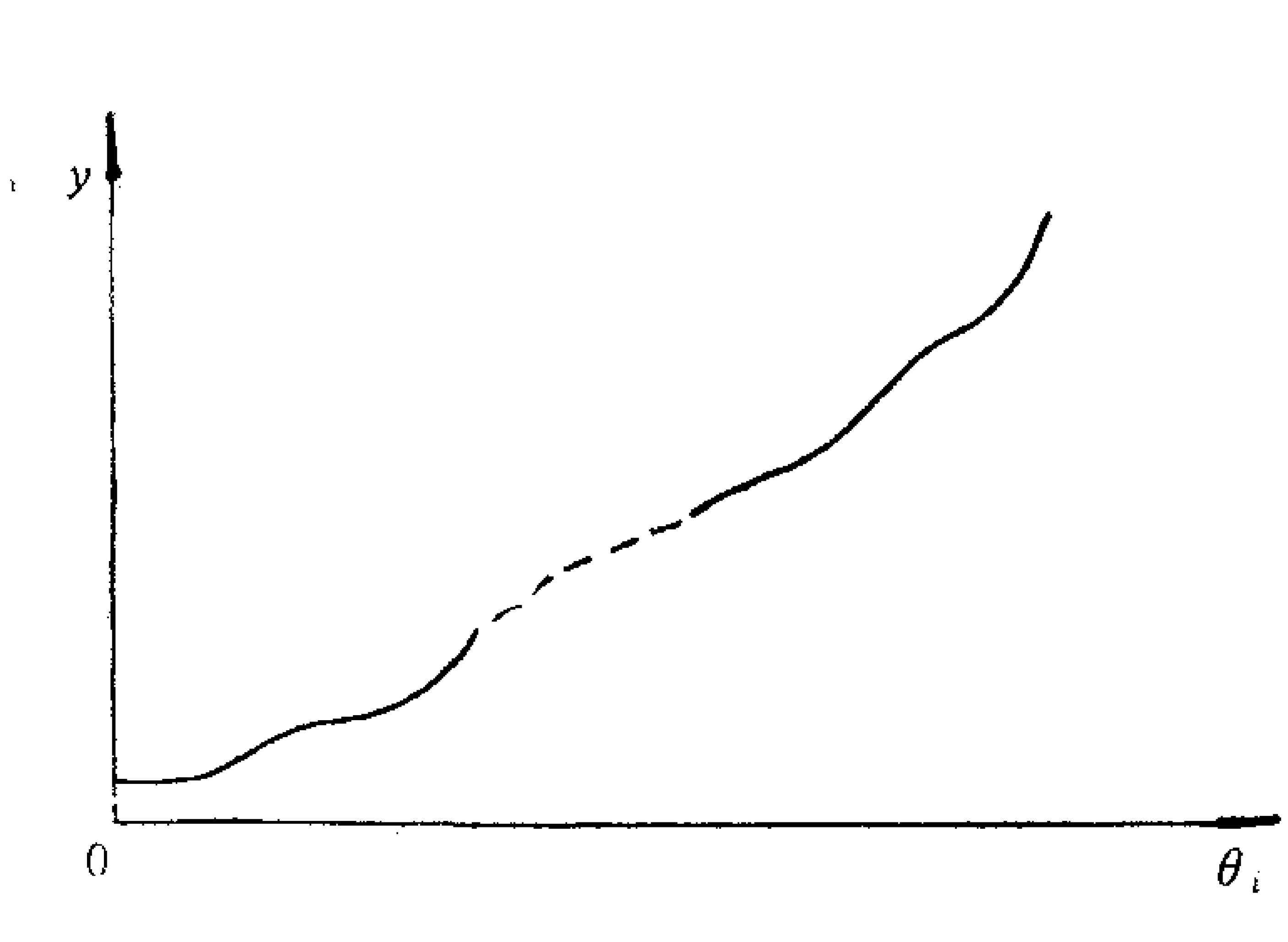

图 2. $y(N,\theta_i,g^j)$ 相对于 θ_i 的近似曲线

2) 对于 θ_i^0, 可得 $y(N,\theta_i,\ \boldsymbol{g}^j)$ 一曲线段,当 θ_i 继续增大或减少,则其关键路径 ω^* 将发生变化. 根据新的关键路径,又能求出相邻的 $y(N,\theta_i,\boldsymbol{g}^j)$ 的另一曲线段. 如此下去,可得到 $y(N,\theta_i,\boldsymbol{g}^j)$ 关于 θ_i 的整条曲线.

3) 若 $p_i(k,\theta_i)$ 服从负指数分布, θ_i 为参数则

$$g_{ik}(r_{ik},\theta_i) = -\theta_i l_n(1 - r_{ik}). \tag{24}$$

并且(23)式变成

$$\frac{\partial y(N,\theta_i,g^i)}{\partial \theta_i} = -[l_n(1 - r_{ik+1}) + \cdots + l_n(1 - r_{ik+\tau})]. \tag{25}$$

故 $y(N,\theta_i,g^i)$ 在 $(\theta_i^0 - \delta, \theta_i^0 + \delta)$ 内为一直线，即 $y(N,\theta_i,g^i), (-\infty < \theta_i < +\infty)$ 是一条折线。

参　考　文　献

[1] 涂奉生，串行生产线的数学模型及其性能估算，自动化学报，16(1990)，(6).

[2] 涂奉生、乞敬换，具有存贮器的生产线的状态方程描述及其性能分析，系统科学与数学，11(1991)，(2)，177—186.

[3] Y. C. HO. and Cassandras, C., A New Approach to the Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, *Automatic*, 19(1983), (2).

[4] Cao. Xi-ren., Convergence of Parameter Sensitivity Estimates in a Stochastic Experiment *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-24** (1985), (9).

STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS OVER MAX-ALGEBRA AND A PERTURBATION ANALYSIS OF DEDS

Tu Fengsheng　　Sun Yonghua

(Dcpt. of Computer and System Sciences Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract

In this paper, the stochastic linear state equation over Max-algebra for a serial production line is given. It is proven that a perturbation analysis is suitable for this kind of DEDS and a simple algorithm of the perturbation analysis is proposed.

Key words: Diecrete event dynamic sy tem; perturbation analysis; serial production line; max-algebra.