极小代数上串行生产线的数学模型及性能分析[1)]

刘丹 陈东 涂菶生
(南开大学计算机系，天津)

关键词: 极小代数,串行生产线,稳定性,扰动分析.

一、极小代数上串行生产线的建模

考虑由 m 台机器组成的串行生产线，M_i 表示第 i 台机器；B_i 表示第 i 个存储器，它有 b_i 个存储单元(其中包括机器 M_i 在内)，$b_m = +\infty$，$b_i \geqslant 1$，$i = 1, 2, \cdots, m-1$.

假定 m 台机器的加工时间分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_m$，不妨设其均为整数. 令 $c_i(t)$ 表示机器 M_i 在 t 时刻所加工完毕并且输出的工件的个数,那么

$$
\begin{aligned}
&c_1(t) = 1 \cdot c_1(t - p_1) \oplus b_1 c_2(t),\\
&c_2(t) = c_1(t - p_2) \oplus 1 \cdot c_2(t - p_2) \oplus b_2 c_3(t),\\
&\cdots\cdots\\
&c_{m-1}(t) = c_{m-2}(t - P_{m-1}) \oplus 1 \cdot c_{m-1}(t - p_{m-1}) \oplus b_{m-1} c_m(t),\\
&c_m(t) = c_{m-1}(t - p_m) \oplus 1 \cdot c_m(t - p_m).
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

其中符号"$\oplus$"表示 min，"$\cdot$"表示普通加法+(可省略). 不难证明 $(R, \oplus, \cdot)$ 构成一个代数——极小代数，$\varepsilon = +\infty$ 为其零元；$e = 0$ 为其单位元. 这时，串行生产线可视为极小代数上的线性系统. 给出初始值

$$c_i(t) = 0,\ \ t < \sum_{j=1}^{i} p_j;\ \ c_i(t) = 1,\ \ t = \sum_{j=1}^{i} p_i,\ \ i = 1, 2, \cdots, m, \tag{1.2}$$

就可递推算出 $c_i(t)$，$i = 1, 2, \cdots, m$，$t = 1, 2, \cdots$.

二、稳 定 性

定义. 如果存在 $T > 0$ 和 $p > 0$,使得当 $t \geqslant T$ 时,

$$c_m(t) = 1 \cdot c_m(t - p). \tag{2.1}$$

则称上述的串行生产线是输出稳定的. p 称为输出周期. 显然，输出稳定的实际意义就

本文于 1988 年 12 月 20 日收到.
1) 本文曾在 1988 年北京 DEDS 理论及其在 CIMS 中的应用学术讨论会上宣读.

是每间隔时间 p,系统就输出一个工件.

定理. (1.1)式所示的串行生产线是输出稳定的,其输出周期为 $p=\max(p_1,p_2,\cdots,p_m)$.

证明略.

三、系统的状态表和扰动分析

根据(1.1)式算出的 $c_i(t)$,定义函数

$$s_i(t)=\begin{cases}0, & c_{i-1}(t-1)<1\cdot c_i(t-1);\\ c_i(t-1)+1, & c_{i-1}(t-1)\geqslant 1\cdot c_i(t-1),\ b_ic_{i+1}(t-1)\geqslant 1\cdot c_i(t-1-p_i);\\ -1, & c_{i-1}(t-1)\geqslant 1\cdot c_i(t-1),\ b_ic_{i+1}(t-1)<1\cdot c_i(t-1-p_i);\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,m;\ t=1,2,\cdots. \tag{3.1}$$

这里, $s_i(t)=0$ 表示机器 M_i 在 t 时刻处于空闲状态; $s_i(t)=-1$ 表示机器 M_i 在时刻 t 处于阻塞状态; $s_i(t)=c_i(t-1)+1$ 表示机器 M_i 在 t 时刻正在加工第 $c_i(t-1)+1$ 个工件;反之亦然. $s_i(t)$ 称为状态函数.

由 $s_i(t)$ 的定义可得

$$c_i(t)=\begin{cases}\max\limits_{t_0\leqslant t}\{s_i(t_0)\}, & s_i(t+1)>s_i(t)>0 \text{ 或 } s_i(t+1)=0,\\ \max\limits_{t_0\leqslant t}\{s_i(t_0)\}-1, & \text{其它}.\end{cases} \tag{3.2}$$

由状态函数 $s_i(t)$ 构造系统的状态表 S 如下:

$$S=\begin{bmatrix}s_1(1) & s_1(2) & \cdots & s_1(t) & \cdots\\ s_2(1) & s_2(2) & \cdots & s_2(t) & \cdots\\ \vdots & & & & \\ s_m(1) & s_m(2) & \cdots & s_m(t) & \cdots\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

由(1.1)式容易得到状态表的如下性质:

1) 若 $s_i(t)>0$,则当 $s_i(t+1)\neq 0$ 或 -1 时, $s_i(t+1)=s_i(t)+1$ 或 $s_i(t)$;

2) 若 $s_i(t)>0$, $s_j(t)>0$,则 $i>j$ 时, $s_i(t)<s_j(t)$;

3) 对任 $i<m$, $t>0$,有 $\max\limits_{t_0\leqslant t}\{s_i(t_0)\}-\max\limits_{t_0\leqslant t}\{s_{i+1}(t_0)\}<b_i$.

对于标称系统,当其某一参数发生扰动时,新的系统不产生新的空闲与阻塞, 也不消除旧的空闲与阻塞,则称扰动系统与标称系统是相似的,满足这个条件的扰动称为无穷小扰动. 显然,如果不考虑相邻的同一数字的个数,相似的系统具有完全相同的状态表.

我们知道,某台机器上产生的扰动通过该机器所引起的其它机器的阻塞与空闲,分别向其前后的机器传播; 而某台机器上的扰动的传播是通过其它机器引起的空闲与阻塞终止的. 根据这个规则,通过修正标称系统的状态表,就可得到扰动系统的状态表 S'.

MATHEMATICAL MODEL AND EVALUATION ANALYSIS OF SERIAL PRODUCTION LINE OVER MIN-ALGEBRA

LIU DAN　CHEN DONG　TU FENGSHENG
(*Nankai University*)

Key words: Min-algebra; serial production line; stability; perturbation analysis.