第22卷 第3期 | 自 动 化 学 报 | Vol. 22, No. 3
1996 年 5 月 | ACTA AUTOMATICA SINICA | May, 1996

建立 Hopfield 网络的一般方法

刘 晓 鸿
(北京邮电大学计算机系 北京 100088)

戴 汝 为
(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

摘 要

讨论了用离散的带反馈的 Hopfield 网络的极限环来表达概念，以及在给定不动点、极限环或迭代序列等限制下，用线性规划和遗传算法通过求解不等式组一般性地建立 Hopfield 网络的方法，从而也解决了网络联结的稀释问题. 最后给出了几个实例.

关键词: Hopfield 网络，极限环，椭球法，遗传算法，联结的稀释.

过去，对由线性阈值单元构成的带反馈的 Hopfield 网络的研究[1]，是以在 Hebb 规则基础上通过"外积规则"构造网络为基础的. 它有一定的生理学基础，产生的网络有许多很好的性质，对不动点有较为直观的解释，特别是通过与自旋玻璃的对比，严格地解出了网络联想记忆时的存贮容量[2]. 同时，用这种方式构造网络非常容易. 但是，这样构造系统也有很大的缺陷：有许多权矩阵是外积规则不能构造出的，而构造指定的序列或极限环就更困难，除非序列长度与网络规模相比非常之小时才可能给出[3]. 此外，没有明确给出极限环的意义. 本文将通过线性规划的方法和遗传算法去构造 Hopfield 网，只要给定的不动点、序列和极限环自身没有矛盾，就一定能够构造出这样的权矩阵. 虽然其计算较外积规则复杂，但它解决了一般的网络构造问题，并且该方法所产生的系统可以具有多样性.

1 极限环表达概念

在人的头脑中概念是如何表达的，神经生理学并未给出很好的回答，迄今为止仍是一个迷. 但 Freeman[4] 研究小组对兔子嗅觉过程的研究表明，对味道的识别并非象人们先前所想象的那样收敛到不动点上，而是收敛于一个奇异吸引子，即识别为一混沌过程. 对人脑脑电图的研究也表明：表面上毫无规律的脑电波并非噪声，而是低维的分形信号[5]，故可以从混沌动力学角度加以研究. 因而，仅仅研究网络的不动点是远远不够的. 在此，我们考虑用 Hopfield 网络上的极限环来表达概念.

本文于 1994 年 3 月 10 日收到.

概念形成是一个从具体到抽象的过程，是对大量同类事物归纳的结果。概念的实例非概念本身，但可以说明概念，构筑概念离不开具体的实例。人们认识概念时，首先从具体事物开始，然后性质相类似的划归一类。该过程不是一个分析的过程，而是一个综合的过程。通过对一个事物多方面的认识，加深了对概念的理解和认识，逐步精确。将一个事物的不同侧面做为极限环上的一点，通过将它们适当排序，产生一个与该事物相对应的极限环，该极限环就可表达这一概念。

在模式识别中，有许多概念用极限环来描述较为方便。客观世界中大部分对象都有多种表现形式，而所有这些形式之间并无哪一种比其它的更"标准"，即它们表现了对象的不同侧面。比如对人的脸的识别，姑且不去讨论该人在不同时期的面貌差异（因为即使对人类，这种识别亦是困难的），而只是简单地去识别该人同一时期的图像，但由于不同表情图像之间会显示出相当大的差别，比如哭、笑、痛苦、平静等诸多表情，要使所有这些不同的表情经过若干中间状态而最终收敛于该人的某个特定的图像，将是非常困难的。在实现上，它对某一个吸引子给出了极多的约束，这些约束对 Hopfield 网络而言很可能是矛盾的，即使其不矛盾，也可能使所生成的网络对应于该吸引子的吸引域非常之大，会把许多其他人也识别为该人，误识率将会非常之高；在逻辑上也不甚合理，破坏了概念的完整性，似乎只有不动点才被认为是该人，从外部人为地强加了一个标准，反应不出实际中存在的多样性。使用极限环将其串联起来则是恰当的，它较为完整的表达了该人的图像，不同的表情则反应了面貌的多个侧面，将其集成便全面反应了该人脸的各种表情这一概念。这样处理也和 Freeman 嗅觉研究的结论是吻合的。

另外一个典型的例子为汉字识别。每个字都有许多标准的字体，如楷体、宋体、篆体之类。当然，知道处理文件为某一种字体时，可以用专门识别该种字体的机器去识别，即对不同的字体可以采用单独识别的方法，这样还可以保证有较高的效率。但是，如果文件杂有多种字体，用单独识别某一种字体的系统来完成任务将是笨拙的，将需要大量的人工干预。用同时可识别多种字体的机器是恰当的选择。将不同字体串联成一极限环，用该字的若干种标准形态，表达了字的形态概念，即字形。这也保证了概念上的完整性。

使用极限环的另一个好处，便是可以增加系统的存储容量。对于不动点，除去以单位矩阵为权的网络有 2^N（N 为神经元的数目）个以自身为不动点外，实际应用的网络容量不大，但采用极限环时，它的容量可以有很大增加，极端的例子是由对角线上元素为-1，其余元素为 0 的权矩阵，即$-I$。它有 2^{N-1} 个周期为 2 的极限环，为同一模式的反转。这就大大增加了可存贮的信息。从技术上讲，利用极限环也使得吸引子的区域较容易控制。整个极限环的吸引域是极限环上各个点的吸引域的并集，即整个吸引域被分散在多个局部"不动点"上，使极限环上每一个点的吸引域不至于太大，符合分类的近邻原则，从而可以降低网络构造的难度，减少样本的可能冲突。

从动力学角度来看，即使是仅仅将网络视为一个非线性系统，也应该研究其所有的动力学特性：不动点，极限环，混沌。对于混沌，我们将另有专文讨论。由于考虑一般的非对称网络，其迭代结果最终落到哪个吸引子上一般都与迭代次序有关，故后文中要求网络同步运行。

2 建立给定约束的 Hopfield 网络

对于任一个神经网络，$x_{k+1} = \mathrm{sgn}(Wx_k - \theta)$. 其中 $x_k \in \{-1,1\}^m, W \in R^{m\times m}, \theta \in R^m$. 如果一矢量的迭代结果已知，即可给出权矩阵所满足的一组不等式(严格的或非严格的). 这样，对于给定的不动点、极限环、或指定的迭代序列，均可将其化为一系列关于神经网络权的不等式组，其中不仅有严格的不等式，也有不严格的. 事实上，总可以将约束中可能的等式去掉，去求解严格的不等式组. 这样，神经网络在给定样本下的训练(构造)又还原成了其最原始的数学面目——求解不等式组.

下面，将说明在给定不动点、极限环或者是一般的迭代序列后，如何去一般性地建立满足给定约束条件的网络. 首先讨论用椭球法[6]去求解，然后讨论用其他的线性规划方法和遗传算法求解.

2.1 椭球法

1979 年，在组合数学和计算复杂性领域，前苏联数学家哈奇扬构造了椭球法的算法，该算法可在多项式时间内求解线性规划，从而回答了线性规划是否为 NP 完全的这一长期困扰人们的问题. 该算法先将原规划问题转化为一系列不等式，然后选取一个包含解的足够大的椭球. 如某一不等式不被满足，则以该不等式对应的超平面为截面将原椭球划分成两个部分，称为半椭球，两个半椭球中有一个满足该不等式，构造新的椭球与这个半椭球相切且包含它，重复上述过程，得到一系列缩小了的椭球，且保证若不等式组可满足，则椭球内包含有解. 如果所有不等式都被满足，则当前椭球球心即为所求问题的解. 否则，当迭代足够多次后，椭球足够小时仍有不等式未被满足，说明原问题无解.

求解不等式组 $Ax < b$ 的椭球法算法如下:

1) (初始化) $j \leftarrow 0, t_0 \leftarrow 0, B_0 \leftarrow n^2 2^{2L} I$;

2) (检验)若 $Ax < b$，则返回 t_j，

若 $j \geqslant K = 16n(n+L)$，则返回“无解”;

否则

3) (迭代)选择矩阵 A 的某一行 a_k 满足 $a_k^T t_j \geqslant b_k$，记 a_k 为 a，

$$t_{j+1} \leftarrow t_j - \frac{1}{n+1}\frac{B_j a}{\sqrt{a^T B_j a}},$$

$$B_{j+1} \leftarrow \frac{n^2}{n^2-1}\left\{B_j - \frac{2}{n+1}\frac{(B_j a)(B_j a)^T}{a^T B_j a}\right\},$$

$j \leftarrow j+1$;

goto 2).

椭球法在解决线性规划问题时的时间复杂度为 $O(n^{4.5L})$，其中

$$L = 1 + \log(mn) + \sum_{i,j}\log(1+|a_{ij}|) + \sum_i \log(1+|b_i|)$$

为问题规模(公式中 log 以 2 为底). 它解决小规模问题的效果不如单纯形法，在解决大规模的问题时亦不如 Karmarkar 法或其它的内点法，因而在实际求解线性规划时很少

使用. 但它所解决的恰是不等式,并且为严格的不等式,这正是构造网络所需要的. 实际中,当满足约束的网络存在时,通常在不太长的时间内即可求得解;在遇到矛盾情形时,通常不等到迭代至K次,程序就会告诉我们样本是矛盾的.

2.2 其它线性规划方法和遗传算法

其它求解线性规划的方法,如单纯形法、Karmarkar 投影法和其它内点法均可用于求线性解不等式组. 并且它们都可以对有无解做出判断.

对线性不等式组 $A^Ty \leqslant C$,可以通过求下面的规划来实现:

$$\max z,$$
$$s.t.\begin{cases}A^Ty + ez \leqslant C,\\ z \leqslant 0.\end{cases}$$

文[7]给出了基于内点法的一个解法. 它要求矩阵A的行数小于等于列数,其秩等于其行数. 该算法有时会遇到退化情形,因矩阵无逆而无法继续进行. 另外,由于它们不是解严格的不等式,对小于 0 的不等式必须引入参数,而这一变换前后可能不等价. 一些实际矛盾的条件即显示了这样的结果. 比如下面的问题(样本的第一行是异或函数)

$$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},$$

对"<0"严格不等式引入 $\varepsilon > 0$ 化成 "$\leqslant \varepsilon$" 的非严格不等式,可以求得一解,但它显然不满足给定的约束,因为原问题无解.

用线性规划方法可以明确判定样本是否矛盾;与之不同,遗传算法则做不到这一点,因而是不完全的. 遗传算法[8]借用了达尔文进化论中的自然选择,选取适当的适应性函数,通过交叉 (crossover),突变 (mutation) 和选择 (selection) 运算,优胜劣汰,经过许多代的进化,可得到一个较好的结果. 遗传算法缺点之一是难以给出恰当的适应性函数,并需要大量的个体进行进化和大量的迭代运算,即经过许多代才能达到.

用遗传算法求解不等式时,将适应性函数定义为所得矢量对样本的吻合程度. 如果共须满足 n 个不等式,其中有 k 个已被满足,其适应程度为 k. 找到适应程度为 n 的矢量时便停止.

实际应用中需要较多的基因个体,否则会发生退化现象,即全部基因个体成了不多的几个基因,长期陷入局部极值点. 另外,表示权值的染色体的长度亦须恰当选择,太短会将真实解斥于所给的染色体可能空间之外;太长时则占用空间多,并且加大了运算量.

3 若干特性

与传统 Hebb 规则方法相比,上述方法具有通用性、多样性和稳定性的特点,并可进行网络的"稀释 (dilution)". 在一些方面显示了其优越性.

3.1 通用性

Hopfield 在文[1]中就一般性地考虑了极限环和迭代序列下网络的训练,其方法与外积规则类似:

$$w_{ij}=\sum_s x_i^{s+1}x_j^s,$$

其中 x_i^s 表示样本序列中第 s 个样本矢量的第 i 个分量．这种方法有很大局限性：与不动点训练时类似，有许多网络用这种方法是构造不出的，下面的例 4.1(1) 即如此．椭球法则不然，它可以判定严格线性不等式组解的存在性．从而，只要样本不矛盾，就可构造相应的网络．

3.2 多样性和稳定性

用这些方法也使得建立的系统有了多样性．满足同样要求的网络通常是有多个的，即它们在给定要求之外是不同的．多样性可通过两个途径获得：其一是由算法本身给出，遗传算法是最典型的，一些与初值有关的其它算法也有这样的性质；另外则可通过加入新的限制来得到，通常的 Hebb 规则类的算法原则上也可做到这一点，但却因为得不到解而告失败，而利用规划方法则显然可以完成这一工作．智能系统的多样性在这里得到了充分体现．多样性使我们真正得到了一种有生命力的系统，这使得系统大为丰富．

另一方面是系统的稳定性，即给定初值后加入一定的扰动，系统是否将仍然收敛于原来的不动点和极限环？显然，在记忆对象足够多时，不存在这种稳定性．比如以 $-I$ 为权矩阵的网络，样本矢量的任一值改变之后，都不可能再回到原来的极限环上，而会落到新的极限环上．记忆对象较少时，有一定的稳定性，但也难以严格刻划．对于网络中训练样本之外的不动点、极限环，我们所可能知道的甚少．已经证明[11]，给定网络不动点的计数的复杂度是 #-P，故对吸引子及相关吸引域的判定是极其困难的．因而，我们尚需对椭球法得到的解的特点进行更深入的研究．目前，只能采取动力系统中的一般研究方法，针对具体对象进行具体研究．

3.3 关于网络联结的"稀释"

人脑中约有 10^{11} 个神经元，平均联结数目只有数千，因而其联结权是稀疏的．但 Hopfield 网络是全联结的．所谓网络联结的"稀释"就是要降低网络的联结单元数目，使其成为部分联结的．由 Hebb 规则得到的网络，弱"稀释"是随机除去一部分联结，即将相应的权置为 0；而强"稀释"则只保留原来权中极小的一部分．对此，有人从统计物理角度进行了分析[9,10]，但并没有给出网络联结在"稀释"情形下的算法，而利用上面的方法可以很好地解决网络的"稀释"问题：选定要保留的权，解相应的不等式即可．

4 若干实例

下面的例子是用椭球法计算所得．

4.1 过一个顶点的正方形

（1）设计如下的极限环：从左上角的点开始，边长依次加一，且矩形中空，至最大一个时，要求其下一次迭代结果为初始的左上角点．这恰是过左上角的所有正方形．图 1 是 $n=5$ 时的情形．此时系统还有图 2 所示的一个极限环．

由于约束远远小于系统规模，解的空间可能是非常大的．当采用 Hebb 规则时，边长为 4 的正方形即不可解，而用椭球法可很快求得边长远大于 4 的解．

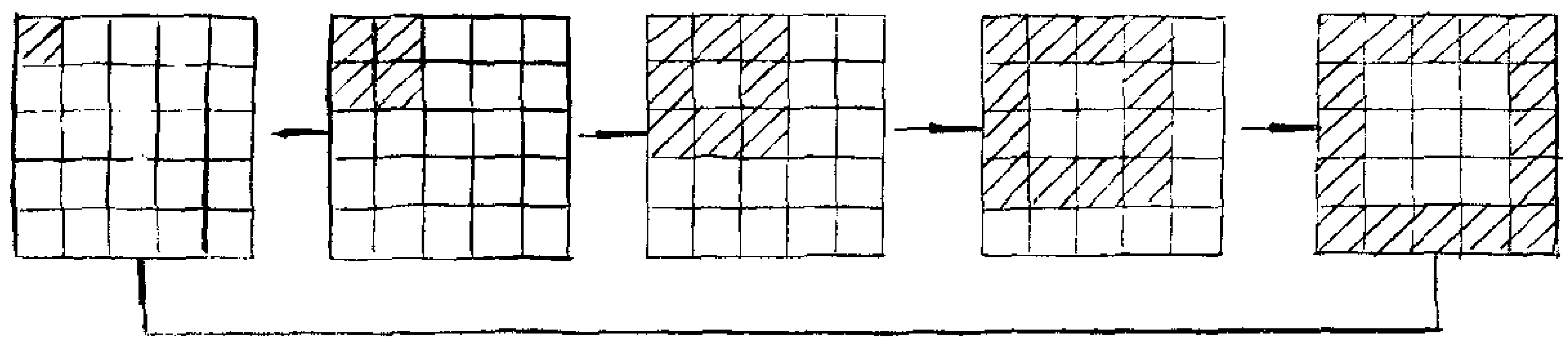

图 1

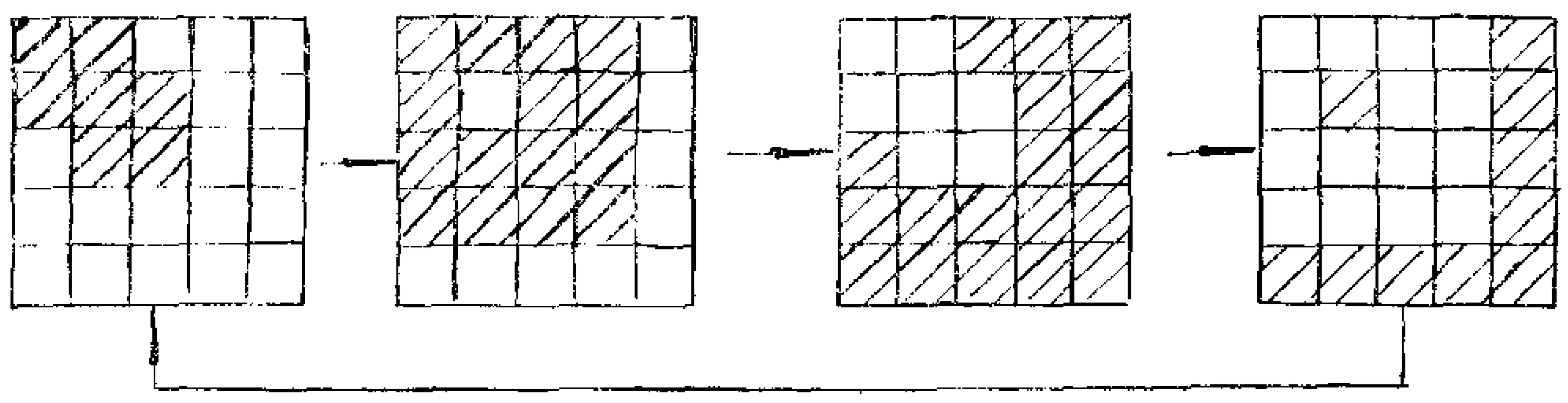

图 2

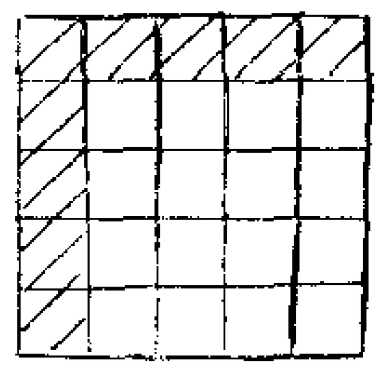

图 3

(2) 上同，但要求矩形中间是填充了的，亦可求得.

(3) 对(1)，每一个神经元都与其最邻近的八个相联结时(顶点和四边分别为三个和五个)，不存在计算该函数的神经网络. 当不要求构成极限环时，生成的网络有图 3 所示的不动点. 因而，(1)所列举的性质是一种大范围的性质.

4.2 过 4 个顶点的正方形

正方形与 4.1 (1) 构造类似，从 4 个顶点出发，要求其最终都收敛于最大的正方形. 所得网络至少还有另外一个不动点和两个周期为 12 的极限环.

4.3 一个字库的例子

这里设计了十个数字、26 个英文字母的 10 × 10 的点阵，其中加有一个周期为 2 的

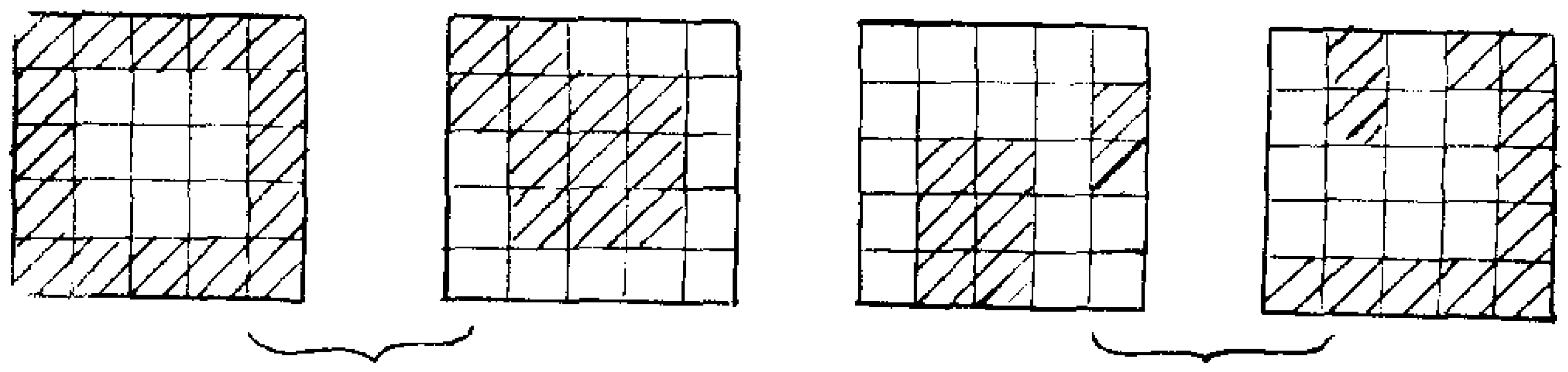

图 4

极限环，不到 4 分钟便在 486 微机上求得结果. 在原来要求的基础上，还增添了一些新的不动点和极限环，吸引子的吸引区域变化较大，有的对扰动敏感，有些则不大敏感. 同时，还进行了“稀释”，用最邻近的八个点进行联结，也构造出了一个满足要求的网络，而数据量大大减少.

5 结束语

经典 Hebb 规则构造系统的算法极其简单，很容易得到. 但该种简单性使得大量系

统都无法构造出来. 利用线性规划的方法和遗传算法，则从根本上克服了以上矛盾，使得对一般的权构造成为可能. 这就使更一般地研究 Hopfield 网络成为可能，为更深入地研究提供了基础.

参 考 文 献

[1] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. In Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 1982, **79**: 2554—2558.

[2] Amit D, Gutfreund H, Sompolinsky. Information storage in neural networks with low levels of acativity. *Physical Review*, 1987, **A-35**: 2293—2303.

[3] Buhmann J, Schulten K. Noise-driven temproal association in neural networks. *Europhysics Letters*, 1987, **4**: 1205—1209.

[4] Freeman W J, Yao Y, Burke B. Central pattern generating and recording in olfactory bulb: a correlation learning rule. *Neural Networks*, 1988, **1**(4): 277—288.

[5] 徐京华. 人脑功能的混沌动力学, 科学杂志, 1990, **42**(4): 266—270.

[6] Khachiyan L G. A polynomial algorithm for linear programming. Reports of Acadamy of Sciences, USSR, 1979, **244**: 1093—1096.

[7] 魏紫銮, 吴力. 计算线性不等式组可行解的方法. 数值计算与计算机应用, 1992, **13**(1): 65—72.

[8] Holland J H. Adaption in natural and artificial systems. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.

[9] Derrida B, Gardner E, Zippelius. An exactaly soluble asymmetric neural network model: *Europhysics Letters*, 1987, **4**: 167—173.

[10] Canning A, Gardner E. Partially connected models of neural networks. *Journal of Physics*, 1988, **A-21**: 3275—3284.

[11] Floreen P, Orponen P. Counting stable and sizes of attraction domain in hopfield network is hard. In International Joint Confe. on Neural Networks, 1989, **1**: 395—399.

GENERAL METHODS OF CONSTRUCTION OF HOPFIELD NEURAL NETWORKS

LIU XIAOHONG

(Dept. of Computer Engr., Beijing Univ. of Post & Teleco., Beijing 100088)

DAI RUWEI

(Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing 100080)

ABSTRACT

In this paper, we discusses the concept representation with limit cycles in the discrete recurrent Hopfield Networks. We also consider the construction of a Hopfield Network with linear programming and genetic algorithms by solving inequality systems, under constraints of fixed points, limit cycles and iteration sequences, and thus solve the problem of dilution of connections. Finally, some examples are given.

Key words: Hopfield Networks, limit cycles, ellipsoid method, genetic algorithms, dilution of connections.

刘晓鸿 1966年出生，1988年毕业于西北电讯工程学院计算机系。同年，进入中科院自动化所攻读硕士学位，之后，又在本所攻读博士学位，进行有关神经网络和复杂性科学的研究，1994年获得博士学位。目前研究兴趣为神经网络、图像处理及多媒体技术等。

戴汝为 照片及简介见本刊第19卷第5期。

在韩国召开的第二届亚洲控制会议（ASCC）征文通知

会议时间、地点：1997年7月22—25日，韩国汉城。

内容范围：系统与控制理论，专家系统与智能控制，神经元网络与模糊控制，故障诊断与容错控制，大规模系统，以及人机系统、传感器与机器视觉、机电一体化、计算机集成控制设计等控制技术，还包括自动控制在机器人、航天、制造工业、交通、环境、生物医学等等方面的应用。

投稿办法：请用英文，时间要求如下。

专题小组申请：一式四份1000单词的申请及5—6篇250单词的一组论文摘要，1996年9月1日截止；

一般论文：一式四份1000单词的详细摘要，可附有至多两页插图，1996年10月1日截止。

投稿申请请注明作者的地址、电话、传真和 E-mail。需要进一步信息请联系：

The Seccetariate of ASCC'97
c/o INTERCOM Convention Service, INC
4Fl Jisung Bldg #645-20 Yoksam 1-dong
Komgnam-Ku, Seonl 135-081, Korea
Tel: +82-2-567-3810,566-6339, Fax: +82-2-565-2434
Email: ICONIP @ cair. kaist. ac. kr

（郑应平）