

# 渐消卡尔曼滤波器的最佳 自适应算法及其应用

夏启军 孙优贤 周春晖  
(浙江大学)

## 摘 要

本文依据卡尔曼滤波器在使用最佳增益时,其余差序列互不相关的性质,开发了一种新的渐消滤波算法。该算法根据对象输出,在线自适应地调整遗忘因子,从而使滤波器在对象模型存在误差或对象受到外扰时,仍收敛并保持最佳性。该算法已应用于造纸机控制,取得较好效果。

**关键词**——卡尔曼滤波器,自适应滤波,状态估计,造纸机。

## 一、问题的提出

考虑离散时间线性多变量随机系统

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \quad (2)$$

式中  $\mathbf{x}(k) \in R^n$  和  $\mathbf{y}(k) \in R^m$  分别是系统的状态向量和输出向量。假设噪声向量  $\mathbf{w}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  分别是方差为  $Q(k)$  和  $R(k)$  的零均值高斯白噪声序列,初始状态  $\mathbf{x}(0)$  是均值为  $\hat{\mathbf{x}}(0)$ 、方差为  $P(0)$  的高斯随机变量,且与  $\mathbf{w}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  互不相关。

卡尔曼滤波器是高斯过程最优滤波的一种有效算法<sup>[1]</sup>。当对象模型足够准确时,性能较好;但当模型存在误差时,这种增长记忆滤波使“过老”的测量数据对现时的状态估计产生不良影响,甚至可能发散<sup>[2]</sup>。为了防止滤波器发散, Fagin<sup>[3]</sup> 和 Sorenson<sup>[4]</sup> 提出了渐消滤波算法,用遗忘因子限制卡尔曼滤波器的记忆长度,以充分利用现时的测量数据。其滤波估计算式为

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = A(k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1), \quad (3a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + K(k)[\mathbf{y}(k) - H(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]. \quad (3b)$$

滤波增益为

$$K(k) = P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}, \quad (4a)$$

$$P(k|k-1) = \lambda(k)A(k-1)P(k-1)A^T(k-1) + Q(k-1), \quad (4b)$$

$$P(k) = [I - K(k)H(k)]P(k|k-1). \quad (4c)$$

式中  $\lambda(k) \geq 1$  是遗忘因子。

从(3)、(4)式可知, 渐消卡尔曼滤波器与常规卡尔曼滤波器的不同在于前者在计算  $P(k|k-1)$  时多乘了遗忘因子  $\lambda(k)$ , 加重了现时测量数据在状态估计的作用, 从而避免滤波器发散。

在对象有不可测扰动时, 有人建议使用变遗忘因子更好。库索夫可夫按滤波器收敛判据选择遗忘因子<sup>[6]</sup>, 强制理论预计误差大于实际误差。Ydstie<sup>[5]</sup> 在自适应算法中用“记忆长度”决定遗忘因子, 在估计误差较大时选用较大的遗忘因子, 反之则选择小的遗忘因子。

上述算法都没有考虑滤波器的最佳性。在下节中提出一种新的渐消滤波算法, 该算法在对象模型存在误差或对象受到外扰时, 仍能收敛, 并使滤波器工作在最佳状态。

## 二、渐消滤波器的最佳自适应算法

为使渐消滤波器工作在最佳状态, 应根据滤波器的最佳性条件在线自适应地调整遗忘因子。

记估计误差为  $z(k)$ :

$$z(k) \triangleq y(k) - H(k)\hat{x}(k|k-1). \quad (5)$$

众所周知, 最佳滤波在不同时刻的余差互不相关, 用方程式表示为

$$C_j(k) \triangleq E[z(k+j)z^T(k)] \equiv 0, \quad (j \neq 0). \quad (6)$$

经一系列运算, 可推导出:

$$C_j(k) = H(k+j)A(k+j-1)[I - K(k+j-1)H(k+j-1)] \cdots A(k+1)[I - K(k+1)H(k+1)] \cdot A(k)[P(k|k-1)H^T(k) - K(k)C_0(k)], \quad (j \neq 0), \quad (7a)$$

$$C_0(k) = H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k). \quad (7b)$$

欲使  $C_j(k) \equiv 0, (j \neq 0)$ , 须满足:

$$P(k|k-1)H^T(k) - K(k)C_0(k) \equiv 0. \quad (8)$$

式(8)构成了自动寻找最佳遗忘因子的基础。若令

$$S(k) \triangleq P(k|k-1)H^T(k) - K(k)C_0(k), \quad (9)$$

则滤波的最佳性可由下列标量指标衡量:

$$f(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S_{ij}^2(k), \quad (10)$$

其中  $S(k) = \{S_{ij}(k)\}$ 。显见  $f(k)$  愈小, 滤波性能愈佳。因此, 应选择  $\lambda(k)$  使  $f(k)$  最小。

**算法一**(求最佳遗忘因子的最速下降法)。最佳遗忘因子可由下列迭代算法求取:

$$\lambda^{l+1}(k) = \lambda^l(k) - \varphi \partial f^l(k) / \partial \lambda^l(k), \quad (11)$$

$$\lambda^0(1) = 1, \quad \lambda^0(k) = \lambda(k-1). \quad (12)$$

这里上标  $l$  表示某一时刻的迭代次数,  $0 < \varphi \leq 1$  是松弛系数。当  $p$  次迭代满足

$$|\lambda^p(k) - \lambda^{p-1}(k)| < \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0) \quad (13)$$

时, 退出迭代, 并置

$$\lambda(k) = \max(1, \lambda^p(k)), \quad (14)$$

其中  $\partial f^l(k)/\partial \lambda^l(k)$  按下列方程式计算:

$$\frac{\partial f^l(k)}{\partial \lambda^l(k)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m 2S'_{ij}(k) \left( \frac{\partial S^l(k)}{\partial \lambda^l(k)} \right)_{ij}, \quad (15a)$$

$$S^l(k) = P^l(k|k-1)H^T(k) - K^l(k)C_0(k), \quad (15b)$$

$$P^l(k|k-1) = \lambda^l(k)A(k-1)P(k-1)A^T(k-1) + Q(k-1), \quad (15c)$$

$$K^l(k) = P^l(k|k-1)H^T(k)[T^l(k)]^{-1}, \quad (15d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^l(k)}{\partial \lambda^l(k)} = & A(k-1)P(k-1)A^T(k-1)H^T(k)\{I - [T^l(k)]^{-1}C_0(k)\} \\ & + K^l(k)H(k)A(k-1)P(k-1)A^T(k-1)H^T(k) \\ & \cdot \{I + [T^l(k)]^{-1}C_0(k)\}, \end{aligned} \quad (15e)$$

$$T^l(k) \triangleq H(k)P^l(k|k-1)H^T(k) + R(k), \quad (15f)$$

$$P^l(k) = [I - K^l(k)H(k)]P^l(k|k-1). \quad (15g)$$

滤波误差方差的估计算式为

$$C_0(k) = G_1(k)/G_2(k), \quad (16a)$$

$$G_1(k) = G_1(k)/\lambda(k-1) + z(k)z^T(k), \quad G_1(0) = [0], \quad (16b)$$

$$G_2(k) = G_2(k)/\lambda(k-1) + 1, \quad G_2(0) = 0. \quad (16c)$$

算法的推导: (10) 式所示的标量函数  $f(k)$  是  $\lambda(k)$  的非线性函数, 求最佳遗忘因子的问题实际上是非线性极值问题, 可用最速下降法求解

$$\lambda(k+1) = \lambda(k) - \varphi \partial f(k)/\partial \lambda(k). \quad (17)$$

根据 (4)、(7) 式求  $f(k)$  对  $\lambda(k)$  的导数, 并对各式添加上标  $l$ , 整理之可得 (11)–(15) 式。

误差方差一般可用无偏估计算式

$$C_0(k) = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k z(i)z^T(i). \quad (18)$$

为更多地使用现时测量数据, 本文提出下列渐消估计算式:

$$C_0(k) = \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{i,k} z(i)z^T(i) + z(k)z^T(k) \right] / \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{i,k} + 1 \right], \quad (19)$$

式中  $\sigma_{i,k} = \prod_{j=i}^{k-1} 1/\lambda_j$ . 若记  $C_0(k) = G_1(k)/G_2(k)$ , 则可导出递推算式 (16). 算法推导毕。

此算法需要迭代求解, 未能得出一个计算  $\lambda(k)$  的显式, 可能不适应实时应用. 下面给出一种一步计算最佳遗忘因子的算法。

**算法二**(最佳遗忘因子的一步算法). 设系统满足条件:

- 1)  $Q(k)$ ,  $R(k)$ ,  $P(0)$  均为正定对称阵,
- 2) 输出矩阵  $H(k)$  满秩,

则最佳遗忘因子可以由下式求取:

$$\lambda(k) = \max \left\{ 1, \frac{1}{n} \text{SP}[N(k)M^{-1}(k)] \right\}. \quad (20)$$

式中 SP 是矩阵迹的符号, 矩阵  $M(k)$  和  $N(k)$  为

$$M(k) = H(k)A(k-1)P(k-1)A^T(k-1)H^T(k), \quad (21a)$$

$$N(k) = C_0(k) - H(k)Q(k-1)H^T(k) - R(k). \quad (21b)$$

算法的推导: 把 (4a) 式代入最佳性条件 (8), 得:

$$P(k|k-1)H^T(k)\{I - [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}C_0(k)\} = 0. \quad (22)$$

由条件 1)、2) 并式 (16) 知,  $P(k|k-1)$  和  $C_0(k)$  均为满秩对称阵, 因而可在 (22) 式两边左乘  $P^{-1}(k|k-1)$  及右乘  $C_0^{-1}(k)$ , 整理之有:

$$H^T(k)C_0^{-1}(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)] = H^T(k). \quad (23)$$

条件 2) 已假设  $H(k)$  满秩. 容易证明, (23) 式隐含下式成立:

$$C_0^{-1}(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)] = I, \quad (24)$$

或

$$H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k) = C_0(k). \quad (25)$$

将 (4b) 式代入 (25) 式:

$$\begin{aligned} \lambda(k)H(k)A(k-1)P(k-1)A^T(k-1)H^T(k) \\ = C_0(k) - H(k)Q(k-1)H^T(k) - R(k). \end{aligned} \quad (26)$$

定义  $M(k)$ 、 $N(k)$  如 (21) 式所示, (26) 式简化成:

$$\lambda(k)M(k) = N(k), \quad (27)$$

$$\lambda(k)I = N(k)M^{-1}(k). \quad (28)$$

上式两边取迹, 可得 (20) 式. 算法推导毕.

根据 (20) 式求  $\lambda(k)$ , 需要计算矩阵  $M(k)$  的逆阵. 为了避免求逆运算, 直接在 (27) 式两边取迹, 即

$$\lambda(k)\text{SP}[M(k)] = \text{SP}[N(k)], \quad (29)$$

由此得算法三.

**算法三**(最佳遗忘因子的简化算法). 在满足算法二中所述条件 1)、2) 的情况下, 最佳遗忘因子可由下式求取:

$$\lambda(k) = \max\{1, \text{SP}[N(k)]/\text{SP}[M(k)]\}. \quad (30)$$

在实际应用中, 可根据对计算量的限制取舍算法一一三.

从 (20) 式或 (30) 式可以明确地看到最佳遗忘因子的物理意义: 估计误差  $z(k)$  的增大引起误差方差阵  $C_0(k)$  增大(用 (16) 式计算)时, 最佳遗忘因子  $\lambda(k)$  相应增大, 使滤波器达到最佳. 在算法中限定  $\lambda(k)$  的下界为 1, 是从收敛性考虑出发的. 一般认为滤波的实际误差大于理论误差.

### 三、算法的数字仿真结果

对上节开发的算法进行了数字仿真, 在两种条件下比较了常规卡尔曼滤波算法和渐消滤波器最佳自适应算法的性能. 考虑标量对象:

$$x(k+1) = ax(k) + b(k) + w(k), \quad (31a)$$

$$y(k) = x(k) + v(k). \quad (31b)$$

式中  $b(k)$  是动态偏差, 噪声和初始状态的统计特性分别是  $w(k) \sim N(0, 0.1)$ ,  $v(k) \sim N(0, 0.5)$  和  $x(0) \sim N(2, 0.2)$ .

### 1. 对象模型系数存在误差的情况

设对象特性为  $a = 0.8$ ,  $b(k) = 0$ , 取滤波模型为  $\hat{a} = 0.4$ ,  $\hat{b}(k) = 0$ , 则仿真结果如图 1 所示.

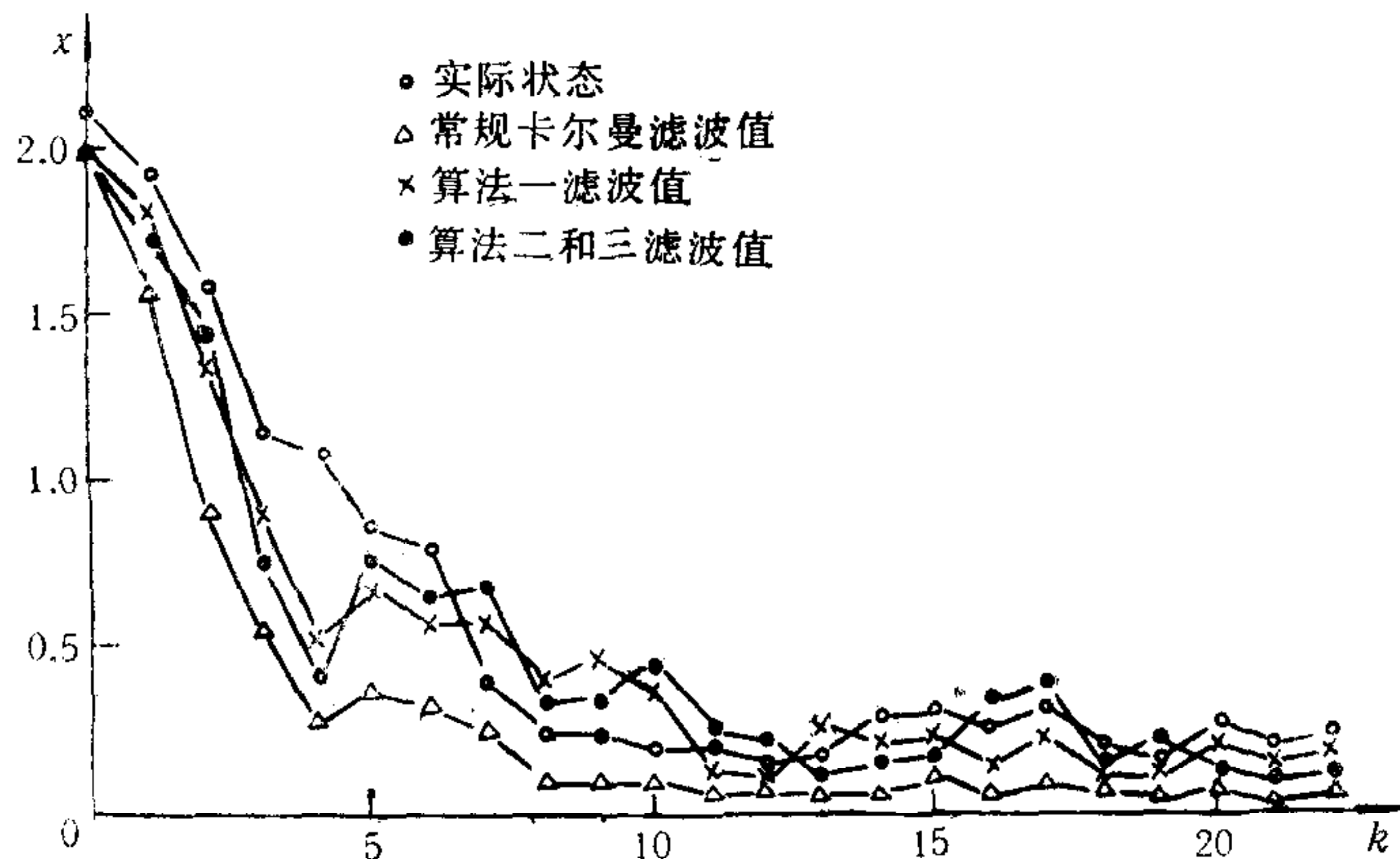


图 1 对象模型系数存在误差时的仿真曲线

### 2. 对象模型存在动态偏差的情况

动态偏差反映系统所受到的外界扰动. 设对象特性为  $a = 0.5$ ,  $b(k) = 0.4$ , 取滤波模型为  $\hat{a} = 0.5$ ,  $\hat{b}(k) = 0$ , 则仿真结果如图 2 所示.

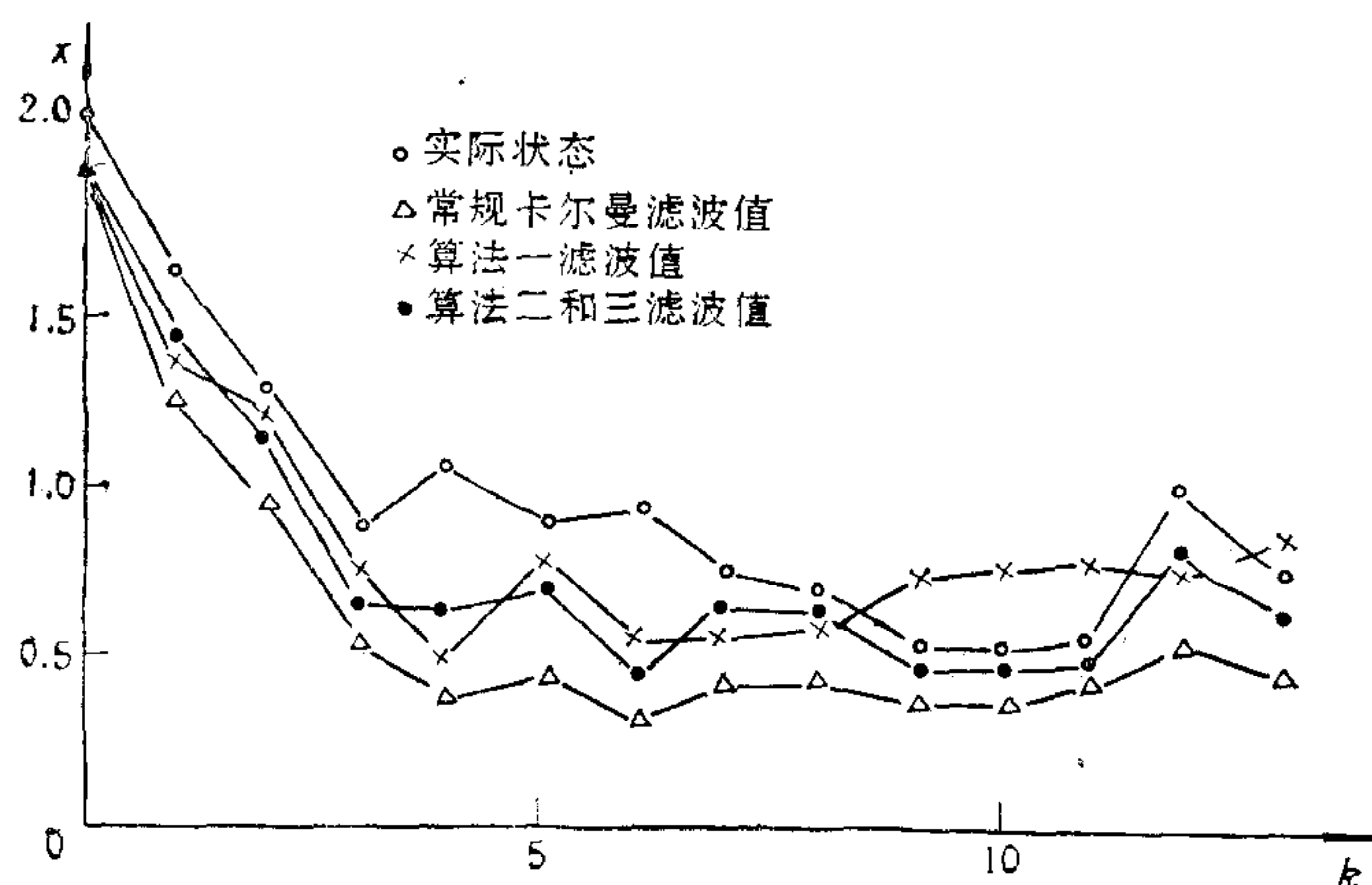


图 2 对象模型存在动态偏差时的仿真曲线

从图 1 和图 2 可见, 最佳自适应算法的性能优于常规卡尔曼滤波器. 它不但具有较好的动态性能, 且能基本消除滤波余差. 需要指出: 对标量对象, 算法二和算法三是等同的.

#### 四、算法在造纸过程中的应用

图 3 是造纸机的简图。成纸定量和水份是造纸机控制系统中两个最重要的品质指标。定量由网前部浆门控制。在网前部,来自网下的白水和中浓浆混合,配制成低浓浆,以接近网速的流速从网前箱流上铜网。成纸定量取决于上网浆量和浓度。

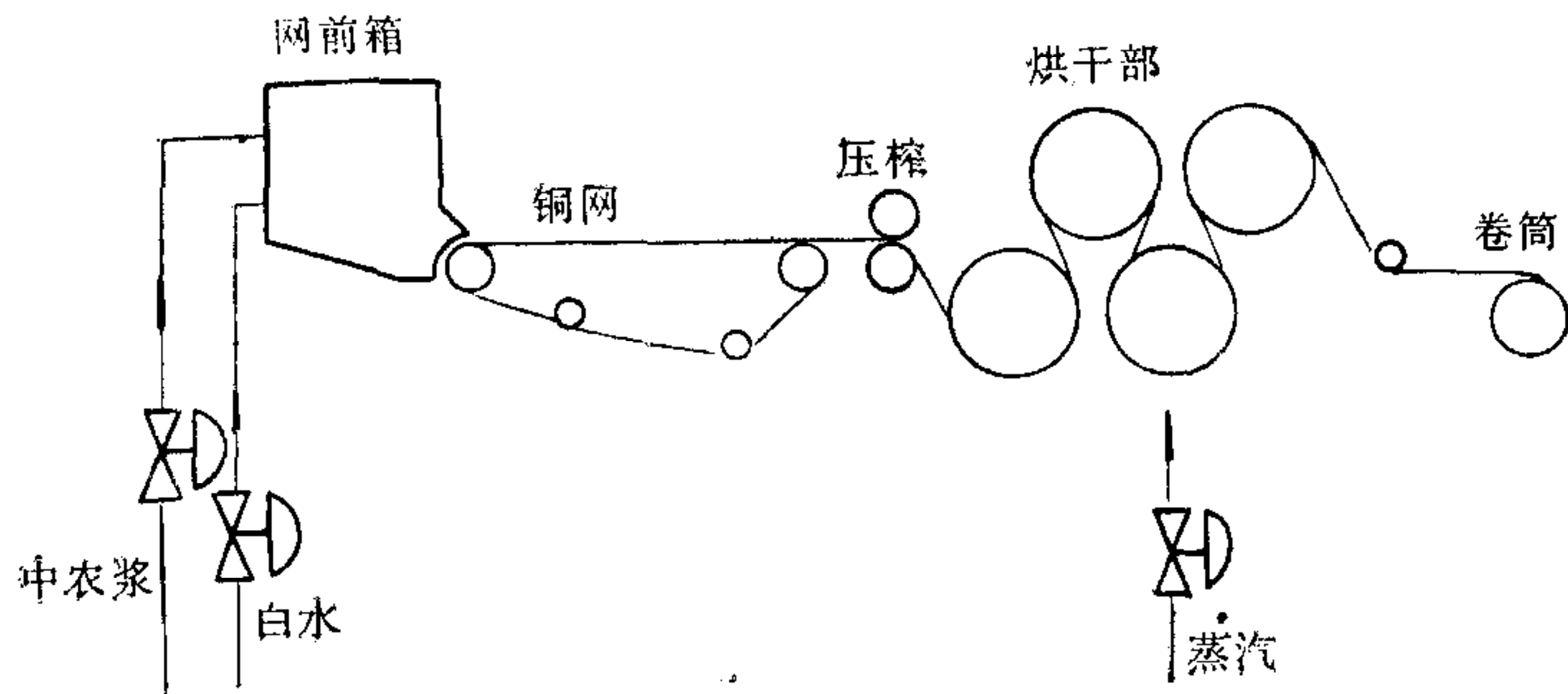


图 3 造纸机简图

若记  $C_1$  和  $C_2$  分别是中浓浆和低浓浆的浓度,  $G_1$  和  $G_w$  分别是中浓浆和白水的流量,  $u_1$  和  $u_2$  分别为浆门和白水阀的开度, 并定义状态向量、输出向量和控制向量分别为  $\mathbf{x}(k) = [G_1(k), G_w(k), C_2(k)]^T$ 、 $\mathbf{y}(k) = [G_1(k), C_2(k)]^T$  和  $\mathbf{u}(k) = [u_1(k), u_2(k)]^T$ , 扰动变量为  $\mathbf{d}(k) = C_1(k-2)$ 。取采样时间为 20 秒, 则得到网前部状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{E}\mathbf{u}(k) + \mathbf{D}\mathbf{d}(k) + \mathbf{w}(k), \quad (32a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \quad (32b)$$

成纸定量  $Bw$  与状态向量  $\mathbf{x}(k)$  的关系式是  $Bw(k) = C_r\mathbf{x}(k-3)$ , 建模方法及(32)、(33)式中的各系数阵可参见文[7]。

根据(32)、(33)式, 用第二节中开发的算法三估计成纸定量。图 4 是浆门阶跃开大

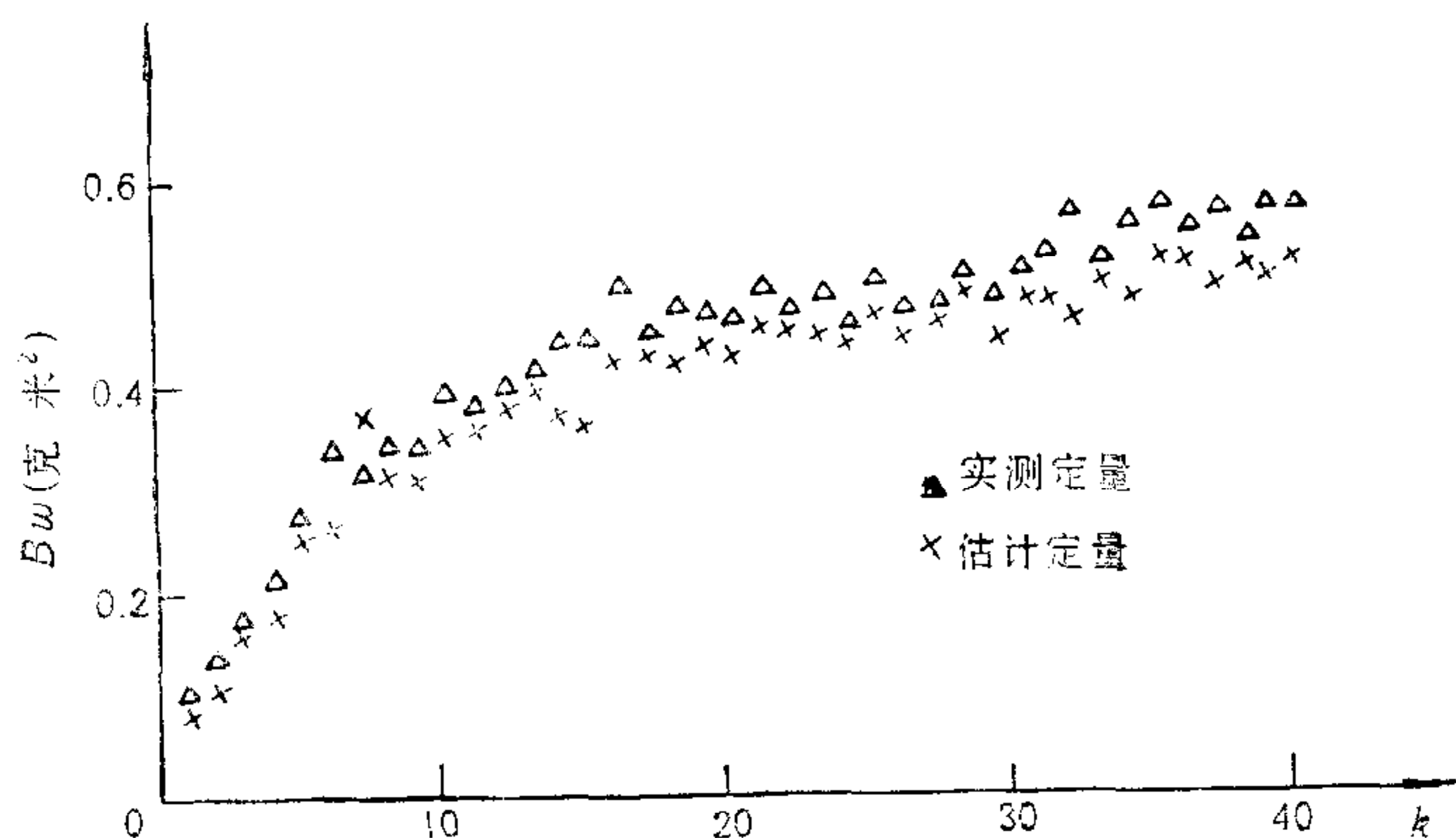


图 4 浆门开度阶跃变化时定量变化曲线

一圈(相当于  $u_1$  减小 40 个码)时,实测和估计定量的曲线。可以看到,估计值和实际定量十分接近。

渐消卡尔曼滤波器的最佳自适应算法已应用于民丰造纸厂超薄型电容器纸定量和水分计算机控制系统,该系统已正式投入运行。经长期连续运行表明,系统性能可靠,抗干扰能力强,明显提高了产品一级品率,定量平均偏差降低 0.15 克/米<sup>2</sup>,回炉率减少 2.46%,产生了较明显的经济效益和社会效益。

## 五、结 论

本文提出的渐消卡尔曼滤波器的最佳自适应算法,同时考虑了滤波器的最佳性和收敛性,具有较好的静、动态特性。该算法简单,易于实施,具有较高的工业应用价值。

由于这种算法只有一个可调参数,因而不能保证滤波器绝对最佳。欲使滤波器有更高程度的最佳性,应进一步研究用遗忘矩阵代替遗忘因子,给各通道以不同的渐消速率。

## 参 考 文 献

- [1] Kalman, R. E. and Bucy, R. S., New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *Trans. ASME. J. Basic Engng.*, 83(1961), 95—108.
- [2] Fitzgerald, R. L., Divergence of the Kalman Filters, *IEEE Trans. Auto. Control*, 16(1971), 736—747.
- [3] Fagin, S. L., Recursive Linear Regression Theory, Optimal Filter Theory and Error Analysis of Optimal Systems, *IEEE Int. Convent. Record*, 12(1964), 216—240.
- [4] Sorenson, H. W. and Sacks, J. E., Recursive Fading Memory Filtering, *Infom. Sci.*, 3(1971), 101—119.
- [5] Ydstie, B. E. and Co, T., Recursive Estimation with Adaptive Divergence Control, *IEEE Proc.*, 132D (1985), 124—130.
- [6] H. T. 库索夫可夫,控制系统的最优滤波和辨识方法,国防工业出版社,1984.
- [7] 夏启军、孙优贤、应依群,超薄型纸定量水份计算机控制系统,中国造纸, 8(1989), 3, 46—52.

## AN OPTIMAL ADAPTIVE ALGORITHM FOR FADING KALMAN FILTER AND ITS APPLICATION

XIA QIJUN    SUN YOUXIAN    ZHOU CHUNHUI

(Zhejiang University)

### ABSTRACT

A new fading filtering algorithm is developed based on the property of Kalman filter that the sequence of residuals is uncorrelated when the optimal gain is used. The algorithm adjusts the fading factor adaptively using measured outputs so as to improve the optimality and convergence of the Kalman filter when there exist model errors and/or when the plant is affected by unmeasurable external disturbances. The proposed algorithm has been applied to a paper-making machine control system and behaves satisfactorily.

**Key words** ——Kalman filter; adaptive filtering; state estimation; paper machine.