第24卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 24, No. 3
1998年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May., 1998

短文

具有不确定参数多目标决策的一类鲁棒有效解[1)]

祝世京 罗云峰
(华中理工大学系统工程研究所 武汉 430074)
王书宁 陈 珽
(清华大学自动化系 北京 100084) (华中理工大学系统工程研究所 武汉 430074)

摘 要 针对具有区间型不确定参数多目标决策问题,探讨了决策人在决策的最优性与决策后果的不确定性之间的权衡,从而制定决策的方法.提出了鲁棒有效解及 ε-鲁棒有效解的概念,并研究了其最优性条件.

关键词 多目标决策,鲁棒有效解,ε-鲁棒有效解.

1 引言

参数的不确定性是多目标决策理论应用于实际所面临的一个比较普遍的问题.概率论及可论性理论方法可以比较好地分析能给出概率分布,或可能性度量的不确定性问题,但对于无法准确确定概率分布或可能性度量的不确定决策问题却不能进行可靠的分析.对于这类问题,如果能在给出决策解的最优性程度的同时能给出不确定性因素的影响程度,并能让决策人在两者之间权衡,那将为决策人对其决策优劣的可靠性和决策解鲁棒性的了解及事先评价决策质量,提供有效的支持.国外学者在概率论框架下[1,2]及可能性理论框架下[3]对相应问题进行过研究,但仍不能脱离不确定性因素的概率分布或可能性分布.本文以具有区间型不确定参数多目标决策问题为背景,研究一般性不确定环境下决策解的鲁棒性及有效性.

2 基本模型

考虑下列具有参数的多目标决策问题

$$\text{(DP)}:\quad \min f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) = (f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}), f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})), \tag{1a}$$

$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{x} \in X(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{x} \in R^S \mid g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) = (g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}), \cdots, g_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})) \leqslant 0\}. \tag{1b}$$

式中 $\boldsymbol{x}\in R^s$ 为决策变量,$\boldsymbol{c}\in R^t$ 为决策问题所涉及的参数,$X(\boldsymbol{c})$为决策的可行域.如果 $\boldsymbol{c}$ 为某个确定值,则(DP)为确定型多目标决策问题.大量文献(如文献[4,5])都介绍了许多方法求取

1) 国家自然科学基金资助项目.
收稿日期 1996-06-14

其决策解. 若 c 为不确定,其不确定区域为 $c\in K=\{c\in R^t\,|\,k(c)=(k_1(c),k_2(c),\cdots,k_l(c))\leqslant 0\}$,则(DP)成为不确定决策问题.

设由于 c 的不确定引起 $f(x,c)$ 及 $g(x,c)$ 不确定程度分别为

$$d(x)=\max_{c,c'\in K}\|f(x,c)-f(x,c')\|, \tag{2}$$

$$h(x)=\max_{c,c'\in K}\|g(x,c)-g(x,c')\|. \tag{3}$$

对于问题(DP),其最优解应该在使目标函数值最优的同时具有强鲁棒性,即由于参数 c 的不确定引起的目标值和可行域不确定程度最小. 因此,(DP)的最优解应通过求解下列决策问题(DPC)获得

$$(\mathrm{DPC}):\quad \min_{x,c}\{f(x,c),d(x),h(x)\}, \tag{4a}$$

$$\mathrm{s.t.}\quad x\in X(c),c\in K. \tag{4b}$$

上述决策问题的有效解集 $XG^*=\{(x,c)\in X(c)\times K\,|\,(f(x',c'),d(x'),h(x'))<(f(x,c),d(x),h(x))\Rightarrow(x',c')\notin X(c)\times K\}$.

定义1. 设(DPC)的有效解为 $(x^*,c^*)\in XC^*$,则称 x^* 为多目标决策问题(DP)的一类鲁棒有效解. 并记 $X^*=\{X\in X(c)\,|\,\exists\ c\in K$,使 $(x,c)\in XC^*\}$ 为(DP)的鲁棒有效解集.

对于 $(x^*,c^*)\in XC^*$,由式(2)知

$$f(x^*,c^*)-d(x^*)\leqslant f(x^*,c)\leqslant f(x^*,c^*)+d(x^*),\forall\ c\in K. \tag{5a}$$

因此,决策人对于目标函数值的不确定范围可以事先估计,也可以通过选择 x^* 进行控制.

对于(DPC),可以构造其等效决策问题

$$(\mathrm{DPC}(\varepsilon)):\quad \min_{x,c} f(x,c), \tag{5b}$$

$$\mathrm{s.t.}\quad x\in X(c),c\in K,d(x)\leqslant\varepsilon_d,h(x)\leqslant\varepsilon_h. \tag{5c}$$

其中 $\varepsilon_d\in R,\varepsilon_h\in R,\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_d,\varepsilon_h)\in R^2$. 记 $XC^*(\varepsilon)=\{(x,c)\in X(c)\times K\,|\,d(x')\leqslant\varepsilon_d,h(x')\leqslant\varepsilon_h,f(x',c')<f(x,c)\Rightarrow(x',c')\notin X(c')\times K\}$ 为(DPC(ε))的有效解集.

定理1. 对于(DPC)的有效解集 XC^* 和(DPC(ε))的有效解集 $XC^*(\varepsilon)$,有 $XC^*=\bigcup_{\varepsilon\in R^2}XC^*(\varepsilon)$.

定理1是 ε-约束法[4]在问题(DPC)中的一种推广,它说明了(DPC)与(DPC(ε))的等价性,因此可以用 ε-约束法通过求解 DPC(ε)来求解(DPC).

定义2. 设 $(x^*,c^*)\in XC^*(\varepsilon)$ 为(DPC(ε))的有效解,则称 x^* 为多目标决策问题(DP)的 ε-鲁棒有效解. 记 $X^*(\varepsilon)=\{x\in X(c)\,|\,\exists\ c\in K$,使 $(x,c)\in XC^*(\varepsilon)\}$ 为(DP)的 ε-鲁棒有效解集.

推论1. 对于(DP)的鲁棒有效解集 X^* 和 ε-鲁棒有效解集 $X^*(\varepsilon)$,有 $X^*=\bigcup_{\varepsilon\in R^2}X^*(\varepsilon)$.

3 鲁棒有效解的最优性条件

为分析方便,引入以下假设:

A1) 决策问题(DP),(DPC),(DPC(ε))的可行域非空;

A2) 函数 f,g,k 处处连续可微有界.

对于函数 $v:R^n\to R^1$,定义其在 $\bar{x}$ 处 s 方向的方向导数 $v'(\bar{x},s)$ 及广义方向导数 $v^\circ(\bar{x},s)$ 分别为

$$v'(\bar{x},s)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(v(\bar{x}+ts)-v(\bar{x})),\tag{6}$$

$$v^{\circ}(\bar{x},s)=\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\downarrow 0}}\ \sup\frac{1}{t}(v(x+ts)-v(x)).\tag{7}$$

构造 Lagrangian 函数

$$L_d(x,c_1,c_2,\mu)=\|f(x,c_1)-f(x,c_2)\|-\mu^T k(c_1,c_2),\tag{8}$$

$$L_h(x,c_1,c_2,\gamma)=\|g(x,c_1)-g(x,c_2)\|-\gamma^T k(c_1,c_2),\tag{9}$$

并记$(\bar{x},c_1^*,c_2^*)((c_1^*,c_2^*)\in P(\bar{x})=\{(c_1,c_2)\in K\times K\,|\,d(\bar{x})=\|f(\bar{x},c_1)-f(\bar{x},c_2)\|,h(\bar{x})=\|g(\bar{x},c_1)-g(\bar{x},c_2)\|\})$处的 Kuhn-Tucker 乘子为

$$KT_d(\bar{x},c_1^*,c_2^*)=\{\mu\in R^l\,|\,\nabla_{c_1,c_2}L_d(\bar{x},c_1^*,c_2^*,\mu)=0,\mu^T k(c_1,c_2)=0,\mu\geqslant 0\},\tag{10}$$

$$KT_h(\bar{x},c_1^*,c_2^*)=\{\gamma\in R^l\,|\,\nabla_{c_1,c_2}L_h(\bar{x},c_1^*,c_2^*,\gamma)=0,\gamma^T k(c_1,c_2)=0,\gamma\geqslant 0\},\tag{11}$$

A3) $\nabla_{c_1,c_2}k_i(c_1),\nabla_{c_1,c_2}k_i(c_2)(i\in\{i=1,\cdots,l\,|\,k_i(c_j)=0,j=1,2\})$线性独立.

由文献[5]的结论可推出,在假设 $A1),A2),A3)$下,$d(x)$及 $h(x)$在 $\bar{x}$ 处 s 方向上 $d'(\bar{x},s),h'(\bar{x},s)$及 $d^{\circ}(\bar{x},s),h^{\circ}(\bar{x},s)$存在,且

$$d'(\bar{x},s)=\min_{c_1^*,c_2^*\in P(\bar{x})}\nabla_x[-L_d(\bar{x},c_1^*,c_2^*,\mu^*)]s,\tag{12}$$

$$h'(\bar{x},s)=\min_{c_1^*,c_2^*\in P(\bar{x})}\nabla_x[-L_h(\bar{x},c_1^*,c_2^*,\gamma^*)]s,\tag{13}$$

$$d^{\circ}(\bar{x},s)=\max_{c_1^*,c_2^*\in P(\bar{x})}\nabla_x[-L_d(\bar{x},c_1^*,c_2^*,\mu^*)]s,\tag{14}$$

$$h^{\circ}(\bar{x},s)=\max_{c_1^*,c_2^*\in P(\bar{x})}\nabla_x[-L_h(\bar{x},c_1^*,c_2^*,\gamma^*)]s,\tag{15}$$

其中 $\mu^*\in KT_d(\bar{x},c_1^*,c_2^*),\gamma^*\in KT_h(\bar{x},c_1^*,c_2^*)$.

进一步定义 $v(x)$的广义梯度为[6]

$$\partial^{\circ}v(\bar{x})=CO\{\lim_{i\to\infty}\nabla_x v(x^i)\,|\,x^i\to\bar{x},\text{当 } i\to\infty\}.\tag{16}$$

从而可以得到 $d(x)$和 $h(x)$的广义梯度

$$\partial^{\circ}d(\bar{x})=CO\bigcup_{c_1^*,c_2^*\in P(\bar{x})}\nabla_x(-L_d(\bar{x},c_1^*,c_2^*,\mu^*)),\tag{17}$$

$$\partial^{\circ}h(\bar{x})=CO\bigcup_{c_1^*,c_2^*\in P(\bar{x})}\nabla_x(-L_h(\bar{x},c_1^*,c_2^*,\gamma^*)).\tag{18}$$

至此,借助于文献[7]的结论可以推论出鲁棒有效解的最优性条件.

定理2. 在假设 $A1),A2),A3)$下,x^* 为(DP)的鲁棒有效解的必要条件是,存在 $\lambda_j>0(j=1,2,\cdots,n+2)$且$\sum_{j=1}^{n+2}\lambda_j=1$及 $\omega_j\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m+l)$,满足

$$\begin{aligned}0\in&\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nabla_x f_i(x^*,c^*)+\lambda_{n+1}\partial^{\circ}d(x^*)+\lambda_{n+2}\partial^{\circ}h(x^*)+\\&\lambda_{n+1}\nabla_x L_d(x^*,c_1^{*\circ},c_2^{*\circ},\mu^{*\circ})+\lambda_{n+2}L_n(x^*,c_1^{*\circ},c_2^{*\circ},\gamma^{*\circ})+\\&\sum_{i=1}^{m}w_i\nabla_x g_i(x^*,c^*),\end{aligned}\tag{19a}$$

$$0 \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla_c f_i(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}^*) + \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla_c g_i(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}^*), \tag{19b}$$

$$w_i g_i(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}^*) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m, \tag{19c}$$

$$w_{m+j} k_j(\boldsymbol{c}^*) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,l, \tag{19d}$$

其中$(\boldsymbol{c}_1^{**}, \boldsymbol{c}_1^{**}) \in P(\boldsymbol{x}^*)$, $\mu^{**} \in KT_d(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_1^{**}, \boldsymbol{c}_2^{**})$, $\gamma^{**} \in KT_h(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_1^{**}, \boldsymbol{c}_2^{**})$.

定理3. 在假设A1),A2),A3)下,$\boldsymbol{x}^*$为(DP)的ε-鲁棒有效解的必要条件是,存在$\lambda_j > 0 (j=1,2,\cdots,n)$且$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$及$w_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,m+l+2)$, 满足

$$0 \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla_x f_i(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}^*) + \sum_{j=1}^{m} w_j \nabla_x g_j(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}^*) +$$
$$w_{m+l+1} \nabla_x L_d(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_1^{**}, \boldsymbol{c}_2^{**}, \mu^{**}) + w_{m+l+2} \nabla_x L_h(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}_1^{**}, \boldsymbol{c}_2^{**}, \nu^{**}), \tag{20a}$$

$$0 \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla_c f_i(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}^*) + \sum_{j=1}^{m} w_j \nabla_c g_j(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}^*), \tag{20b}$$

$$w_i g_i(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{c}^*) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m, \tag{20c}$$

$$w_{m+j} k_j(\boldsymbol{c}^*) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,l, \tag{20d}$$

$$w_{m+l+1}(d(\boldsymbol{x}^*) - \varepsilon_d) = 0, \tag{20e}$$

$$w_{m+l+2}(h(\boldsymbol{x}^*) - \varepsilon_h) = 0. \tag{20f}$$

4 实例分析

作为实例,分析含有不确定参数线性规划问题

$$\max \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,$$
$$\text{s.t.} \quad 45x_1 + 50x_2 \leqslant 530, \quad 50x_1 + 45x_2 \leqslant 515,$$
$$0 \leqslant x_1 \leqslant 8, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 8, \quad \gamma_1 \in [1,3], \quad \gamma_2 \in [1,3].$$

由式(2)及(4)知,上述问题的鲁棒有效解和ε-鲁棒有效解可以通过下列问题求解

$$\min\{-3x_1 - 3x_2, 2x_1 + 2x_2\},$$
$$\text{s.t.} \quad 45x_1 + 50x_2 \leqslant 530, 50x_1 + 45x_2 \leqslant 515, 0 \leqslant x_1 \leqslant 8, 0 \leqslant x_2 \leqslant 8.$$

求得其典型有效解及其对应目标值如表1所示.

表1

有效解(x_1^*, x_2^*)	(8,0)	(8,2.56)	(5.34,5.51)	(2.89,8)	(4,7)	(0,8)
目标值 γx^*	24	31.68	32.55	32.67	33	24
不确定度 $d(x^*)$	16	21.12	21.7	21.78	22	16

从表可知,目标值γx^*越大的点其不确定度程度$d(x^*)$越大,其间的权衡可由决策人进行,从而形成决策.

参 考 文 献

1 Mulvey J M, Vanderbei R J, Zenio s S A. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, 1995, **43**: 264—

281

2 Sengupta J K. Robust solutions in stochastic linear pogramming. *Journal of Operations Research Society*, 1991, **42**: 857—870

3 Sakawa M, Yano H. Feasibility and pareto optimization for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters. *Fuzzy Set and Systems*, 1991, **43**: 1—15

4 陈珽. 决策分析. 北京:科学出版社, 1987

5 Gauvin J, Dubeau F. Differential properties of the marginal function in mathematical programming. *Mathematical Study*, 1992, **19**: 101—109

6 Clark F H. Optimization and Nonsmooth Analysis. New York: Wiley, 1983

7 Shimizu K, Ishizuka Y. Optimal conditions and algorithms for parameter design problems with two-level structure. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1985, **AC-30**(10): 986—993

A KIND OF ROBUSTLY EFFICIENT SOLUTIONS OF MULTIOBJECTIVE DECISION WITH UNCERTAIN PARAMETERS

ZHU SHIJING　　LUO YUNFENG

(*Institute of Systems Engineering, Huazhong Univ. of Sci. & Tech.*, *Wuhan*　430074)

WANG SHUNING

(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing*　100084)

CHEN TING

(*Institute of Systems Engineering, Huazhong Univ. of Sci. & Tech.*, *Wuhan*　430074)

Abstract　The problem of multiobjective decision with uncertain parameters is concerned and the idea of making decision through trade-off between the optimality and the uncertainness of the decision outcome is explored. The concepts of robustly efficient solutions and ε-robustly efficient solutions of multiobjective decision with uncertain parameters are presented. The optimal conditions are studied. As an illustrative example, the linear programming with uncertain parameters is discussed.

Key words　Multiobjective decision, robustly efficient solutions, ε-robustly efficient solutions.