

第七章 γ 跃迁

原子核通过发射 γ 光子（或称 γ 辐射）从激发态跃迁到较低能态的过程，称为 γ 跃迁，或称为 γ 衰变。

§ 7.1 γ 辐射的多极性

1. 经典的电磁辐射

由两个电量相等符号相反的电荷 q 和 $-q$ 组成的偶极子作简谐振动，

$$z_1 = a \sin \omega t$$

$$z_2 = -a \sin \omega t$$

$$z = z_1 - z_2 = 2a \sin \omega t$$

电偶极矩随时间的变化为

$$p \equiv qz = p_0 \sin \omega t$$

其中 $p_0 = 2aq$ 。偶极振子单位时间放出的平均能量为

$$\overline{W} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\omega^4}{3c^3} p_0^2$$

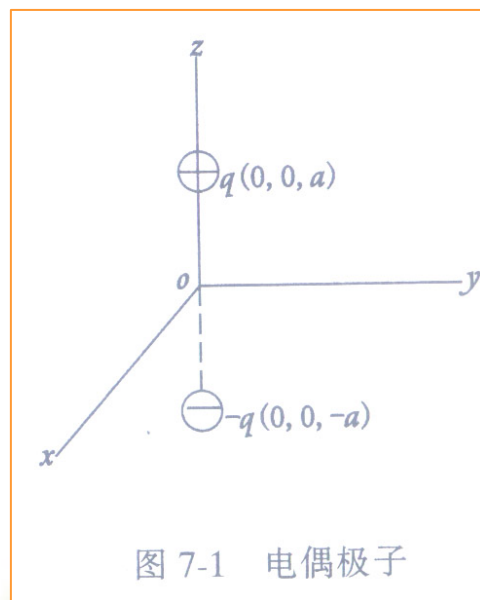


图 7-1 电偶极子

由两个偶极子组成的系统叫做四极子，它所产生的辐射叫做四极辐射；两个四极子组成的系统叫做八极子，它所产生的辐射叫做八极辐射；…。偶极辐射、四极辐射、八极辐射等统称为多极辐射。

由电多极子产生的辐射称为电多极辐射，磁多极子产生的辐射称为磁多极辐射。如果在 $o-xy$ 平面内有一交变电流回路，角频率为 ω ，这样一个电流回路就相当于一个沿 z 方向作简谐振动的磁偶极振子，它所产生的辐射就是磁偶极辐射。

由经典电动力学可以得到多极辐射能量发射率(单位时间发射的能量)的表达式。对于 L 级的电多极辐射，有

$$\begin{aligned}
 W_E(LM) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{2\pi k^2} |a_E|^2 \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{2\pi k^2} \frac{16\pi^2}{[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{L+1}{L}\right) k^{2L+4} |Q_{LM}|^2 \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi(L+1)c}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+2} |Q_{LM}|^2 \\
 Q_{LM} &= \int r^L Y_{LM}^*(\theta, \phi) \rho d\tau
 \end{aligned}$$

$$\omega = kc$$

Q_{LM} 称为电多极矩。 $Y_{LM}(\theta, \phi)$ 为 L 级的球谐函数， ρ 为电荷密度， $d\tau$ 是体积元。

对于 L 级的磁多极辐射，有

$$\begin{aligned}
W_M(LM) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{2\pi k^2} |a_M|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{2\pi k^2} \frac{16\pi^2}{[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{L+1}{L}\right) k^{2L+4} |M_{LM}|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi(L+1)c}{L[(2L+1)!!]^2} k^{2L+2} |M_{LM}|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi(L+1)c}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+2} |M_{LM}|^2 \\
M_{LM} &= -\frac{1}{(L+1)c} \int r^L Y_{LM}^*(\theta, \phi) \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) d\tau
\end{aligned}$$

M_{LM} 称为磁多极矩， \mathbf{j} 是电流密度。

多极辐射具有能量和角动量，它们是频率 ω 的函数。振动频率 ω 可以取任意值，辐射能量和角动量也可以取任意值。

2. 原子核的多极辐射

微观体系的特点之一是能量和角动量的量子化，它们不能取任意值，只能取某些分立的值。用来表示原子核能量状态的能级是分立的，原子核的角动量大小在空间某方向的投影只能是 \hbar 的整数倍或半奇数倍。原子核的状态还有确定的宇称。

因为原子核的能级是分立的

$$E_\gamma = E_i - E_f$$

根据跃迁前后角动量守恒， γ 光子还具有确定的角动量：

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_f$$

$$L = |I_i - I_f|, |I_i - I_f| + 1, \dots, I_i + I_f$$

从后面的讨论可以知道， L 越大， γ 跃迁的概率越小。

因此，一般都取 L 的可能的最小值，即 $L = |I_i - I_f|$ 。

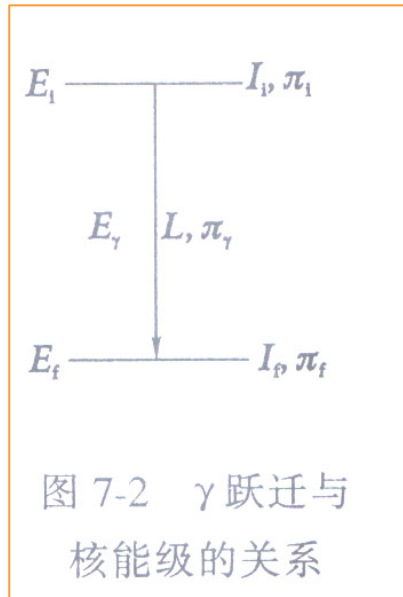


图 7-2 γ 跃迁与核能级的关系

由于光子本身的自旋为 1 ，并考虑到光子是纵向极化的，并且光子的轨道角动量是垂直于光子运动方向的，因此，则在 γ 跃迁中被光子带走的角动量不可能为零，至少是 1 。

因而，由 $I_i = 0$ 的状态跃迁到 $I_f = 0$ 的状态(称 $0 \rightarrow 0$ 跃迁)，不可能通过发射 γ 光子来实现。另外，对于 $I_i = I_f \neq 0$ 的跃迁， L 的最小值为零，但这也不可能，所以应该取 $L=1$ 。

根据被 γ 光子带走的角动量的不同，可以把 γ 辐射分为不同的极次： $L=1$ 的叫做偶极辐射； $L=2$ 的叫做四极辐射； $L=3$ 的叫做八极辐射等等。即角动量为 L 的 γ 辐射，它的极次为 2^L 。

γ 跃迁要遵守宇称守恒定律

$$\pi_i = \pi_f \pi_\gamma$$

$$\pi_\gamma = \frac{\pi_i}{\pi_f}$$

跃迁前后原子核的宇称相同时， γ 辐射具有偶宇称，跃迁前后原子核的宇称相反时， γ 辐射具有奇宇称。

矢量场

光子场是矢量场，其宇称不仅仅由 L 决定。

宇称的奇偶性和 L 的奇偶性相同的为电多极辐射，相反的为磁多极辐射。因此，电多极辐射的宇称 $\pi_\gamma = (-1)^L$ ，磁多极辐射的宇称 $\pi_\gamma = (-1)^{L+1}$ 。

通常，电 2^L 极辐射用符号 **EL** 表示，例如 **E 1** 表示电偶极辐射，**E 2** 为电四极辐射，**E 3** 为电八极辐射……。磁 2^L 极辐射用符号 **ML** 表示，例如 **M1** 为磁偶极辐射，**M 2** 为磁四极辐射，**M 3** 为磁八极辐射……。

电多极辐射的实质主要是由原子核内电荷密度变化引起的；磁多极辐射则由电流密度和内在磁矩的变化所引起。

§ 7.2 γ 跃迁 概率

γ 跃迁与 α 衰变、 β 衰变一样，都遵从指数衰变律

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

实验上往往通过测量半衰期或平均寿命来求得跃迁概率。 γ 跃迁的半衰期一般比 α 、 β 衰变的半衰期要短，大多在 10^{-4} 至 10^{-16} s 之间。

1. 跃迁概率公式

由量子电动力学可以得出 γ 跃迁概率的公式。

由经典电磁场理论计算得到的多极辐射能量发射率公式过渡到量子力学的描述，可以得出 γ 跃迁概率的表达式，其结果与由量子场论得到的公式形式上完全相同，只需作两点改进：

(1) 把辐射能量量子化。因 γ 跃迁时放出的能量不是连续的，而等于两能级的能量差，此差值应等于一个 γ 光子的能量 $E_\gamma = \hbar\omega$ 。于是单位时间放出的光子数，即 γ 跃迁概率 λ 应等于能量发射率除以 $\hbar\omega$ 。由此得到 L 级电和磁的多极辐射概率为

$$\lambda_E(LM) = \frac{W_E(LM)}{\hbar\omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \frac{k^{2L+1}}{\hbar} |Q_{LM}|^2$$
$$\lambda_M(LM) = \frac{W_M(LM)}{\hbar\omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \frac{k^{2L+1}}{\hbar} |M_{LM}|^2$$

式中 k 为光子的波数，它与角频率 ω 的关系为 $k = \frac{\omega}{c}$ 。

(2) 原子核的电荷和电流分布用核态的波函数表示，即多极矩用矩阵元表示。

$$Q_{LM} = e \sum_{k=1}^Z \int r_k^L Y_{LM}^*(\theta_k, \phi_k) \psi_f^* \psi_i d\tau$$
$$M_{LM} = -\frac{1}{L+1} \frac{e\hbar}{2m_p c} \sum_{k=1}^Z \int r_k^L Y_{LM}^*(\theta_k, \phi_k) \nabla \cdot (\psi_f^* \hat{L}_k \psi_i) d\tau$$

式中 ψ_i 和 ψ_f 分别是原子核的始态和终态波函数， Z 是核的电荷数， m_p 是质子的质量。

对始态角动量方向求平均，并对终态及光子的角动量方向求和：

$$\begin{aligned}\lambda_E(L) &= \sum_{M_f=-I_f}^{I_f} \sum_{M=-L}^L \sum_{M_i=-I_i}^{I_i} \frac{1}{2I_i+1} \lambda_E(LM) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \frac{k^{2L+1}}{\hbar} \sum_{M_f, M, M_i} \frac{1}{2I_i+1} |Q_{LM}|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \frac{k^{2L+1}}{\hbar} B(EL)\end{aligned}$$

其中， $B(EL) = \sum_{M_f, M, M_i} \frac{1}{2I_i+1} |Q_{LM}|^2$

$$\lambda_M(L) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \frac{k^{2L+1}}{\hbar} B(ML)$$

其中， $B(ML) = \sum_{M_f, M, M_i} \frac{1}{2I_i+1} |M_{LM}|^2$

$B(EL)$ 和 $B(ML)$ 分别称为 EL 跃迁和 ML 跃迁的约化概率。它和跃迁的能量无关，仅仅和原子核的结构相联系，对核结构作一定的假设后，理论上可以把它计算出来。另一方面，通过对 γ 跃迁概率的测量，以及知道 γ 辐射的多极性后，可以从实验上定出约化概率来。这样，实验和理论就可以进行比较，从而可以检验给定的核结构理论正确与否。

最简单的单质子模型： γ 跃迁是由核中的一个质子状态改变所决定的。在此情形，约化概率的计算较为简单。作了一些特殊假设后，用这种模型计算出来的 γ 跃迁概率的上限为

$$\begin{aligned}\lambda_E(L) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} (kR)^{2L} \omega \\ &= \frac{4.4(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \left(\frac{E_\gamma}{197}\right)^{2L+1} (1.4 \times A^{1/3})^{2L} \times 10^{21} \\ \lambda_M(L) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{20(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{m_p c R}\right)^2 (kR)^{2L} \omega \\ &= \frac{1.9(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \left(\frac{E_\gamma}{197}\right)^{2L+1} (1.4 \times A^{1/3})^{2L-2} \times 10^{21}\end{aligned}$$

式中， R 为核的半径， A 为质量数， γ 跃迁的能量 E_γ 以 MeV 为单位，所得的 $\lambda_E(L)$ ， $\lambda_M(L)$ 的单位为 s^{-1} 。

2. 跃迁概率数量级的比较

对于较重的原子核， $R \approx 10 \text{ fm}$ ，若光子能量为 1 MeV ，则 $k \approx 5 \times 10^{-3} \text{ fm}^{-1}$ ，
($\lambda = 200 \text{ fm}$)， $kR \approx 5 \times 10^{-2} = 1/20$ ，因此

$$\lambda_E(L+1) / \lambda_E(L) \approx (kR)^2 \approx 2.5 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_M(L+1) / \lambda_M(L) \approx (kR)^2 \approx 2.5 \times 10^{-3}$$

数量级的比较也是与跃迁能量有关的。能量越低，相邻极次辐射的概率相差越大，例如，在 $E_\gamma \approx 20 \text{ keV}$ 时，相差可达六个数量级。

相同极次的磁辐射与电辐射概率的比较，

$$\lambda_M(L) / \lambda_E(L) = 10 \left(\frac{\hbar}{m_p c R} \right)^2 \approx 4 \times 10^{-3}$$

即相同极次的磁辐射概率比电辐射概率小二、三个数量级，因而 $\lambda_M(L)$ 与 $\lambda_E(L+1)$ 有相同的数量级。一般讲，磁偶极辐射可能和电四极辐射同时发生；磁四级辐射可能和电八极辐射同时发生；依此类推。

总结以上讨论，关于跃迁概率数量级的比较可以得出下面三点结论：

- (i) 电辐射快于磁辐射；
- (ii) 辐射的极次越低跃迁越快 $\lambda_E(L)/\lambda_E(L+1) \sim 10^3$ ；
- (iii) 一般讲， $\lambda_M(L) \approx \lambda_E(L+1)$ 。

表 7-1 一些 γ 跃迁半衰期的理论值 T_{th} 和实验值 T_{exp}

核	E_γ / MeV	跃迁类型	半衰期 / s		T_{th} / T_{exp}
			T_{th}	T_{exp}	
^{13}N	2.38	E1	7×10^{-17}	1×10^{-15}	0.07
^{111}Cd	0.247	E2	1×10^{-8}	8×10^{-8}	0.1
^{186}Os	0.137	E2	5×10^{-8}	8×10^{-10}	63
^{197}Hg	0.134	E2	3×10^{-8}	7×10^{-9}	4
^{198}Hg	0.412	E2	4×10^{-10}	2×10^{-11}	20
^{114}In	0.192	E4	3×10^4	4×10^6	0.008
^{137}Ba	0.662	M4	2×10^2	2×10^2	1
^{133}Ba	0.276	M4	1×10^5	1×10^5	1

§ 7.3 选择定则

1. 选择定则表

光子带走的角动量 L 可以取以下数值:

$$L = |I_i - I_f|, |I_i - I_f| + 1, \dots, I_i + I_f, \quad L=0 \text{ 除外}$$

根据宇称守恒定律, 光子带走的宇称

$$\pi_\gamma = \pi_i / \pi_f$$

始态 (I_i, π_i) 至末态 (I_f, π_f) 的跃迁选择定则列表如下。

表 7-2 γ 跃迁选择定则

$\Delta\pi$ \ ΔI	0 或 1	2	3	4	5
+	<i>M1(E2)</i>	<i>E2</i>	<i>M3(E4)</i>	<i>E4</i>	<i>M5(E6)</i>
-	<i>E1</i>	<i>M2(E3)</i>	<i>E3</i>	<i>M4(E5)</i>	<i>E5</i>

表中 ΔI 和 $\Delta\pi$ 分别表示始末态角动量和宇称的变化, 括号内的跃迁类型表示有可能与括号前的跃迁同时出现 (需要根据 I_i 和 I_f 的值具体分析)。

2. 选择定则的应用

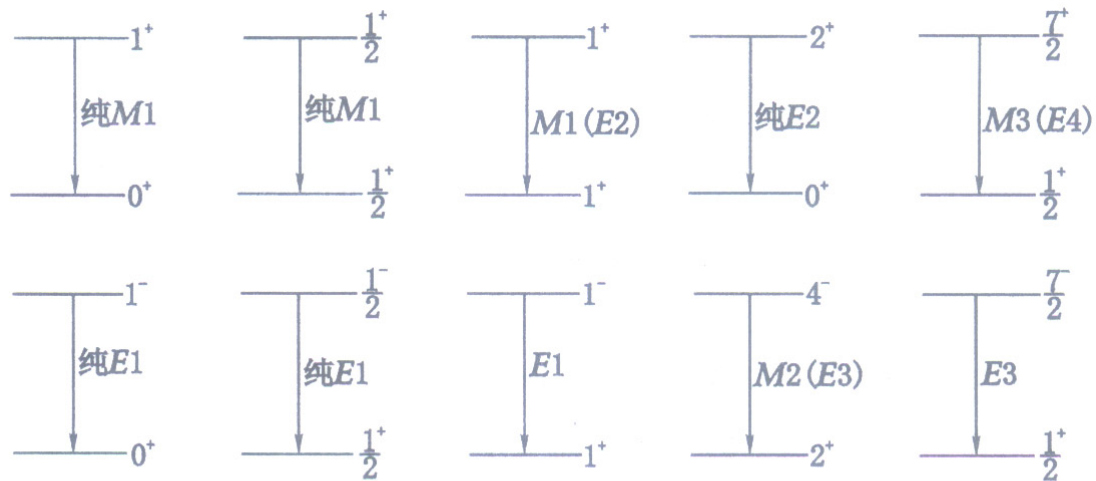


图 7-3 由始末态的自旋和宇称定出跃迁的类型

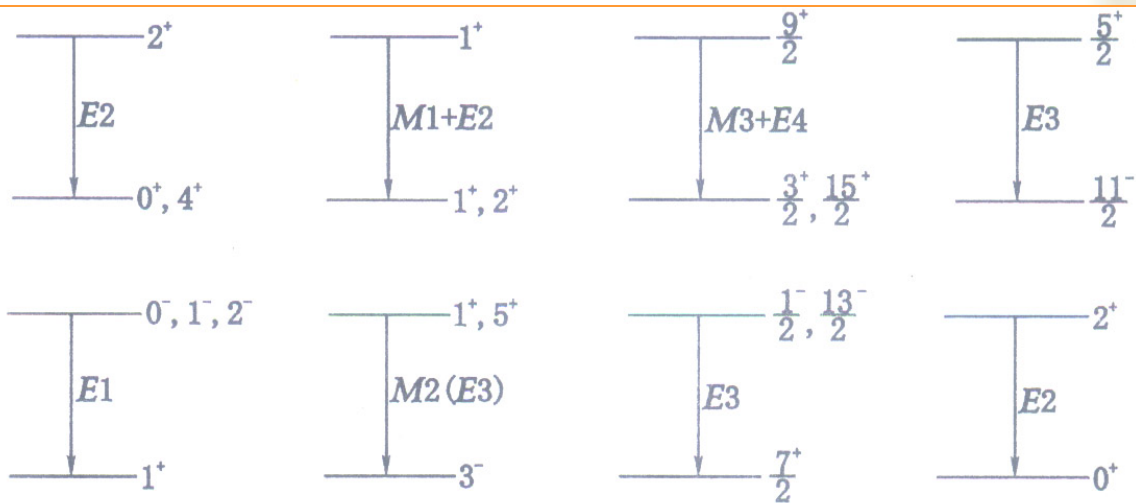


图 7-4 由跃迁的类型定出能级的自旋和宇称