

第六章 β 衰 变

β 衰变: 原子核自发地放射出 β 粒子或俘获一个轨道电子而发生的转变。

放出电子的过程称为 β -衰变;

放出正电子的过程称为 β^+ 衰变。

原子核从核外的电子壳层中俘获一个轨道电子叫做轨道电子俘获。俘获K层电子, 叫做K俘获。俘获L层电子, 叫做L俘获。其余类推。由于K层电子最靠近原子核, 因而一般K俘获的概率最大。

半衰期: $10^{-2}\text{s}\sim 10^{18}\text{a}$

发射出粒子的能量最大为几个MeV

在全部周期表的范围内都存在 β 放射性核素

相对论动力学:

$$p = \frac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c};$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2c^4}{1-\beta^2}$$

$$\frac{pc}{E} = \beta; \quad T = E - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right) \xrightarrow{v \ll c} \frac{1}{2}mv^2$$

§ 6.1 β 能谱的特点

1. β 谱的连续性

β 衰变时放射出来的 β 射线，其强度随能量的变化为一连续分布。

β 粒子的动能

$$T = E - m_e c^2 = (c^2 p^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} - m_e c^2$$

由 $p = eB\rho$ (对高速问题也成立)

得 $T = [c^2 e^2 (B\rho)^2 + m_e^2 c^4]^{1/2} - m_e c^2$

如果 T 用 keV 做单位, $B\rho$ 用 T·m 做单位, 则

$$T = 511.00 \{ [3441.8 \times 10^2 (B\rho)^2 + 1]^{1/2} - 1 \}$$

式中 511.00 是用 keV 做单位的电子静止能量。

实验: (1) β 粒子的能量是连续分布的; (2) 有一确定的最大能量 E_m ; (3) 曲线有一极大值, 即在某一能量处, 强度最大。

2. β 衰变与能量守恒定律的“矛盾”

实验上发现的 β 能谱是连续分布的, 而且无数实验表明, 最大能量 E_m 正好等于衰变能。

如果是两体衰变 $X \rightarrow Y + \beta$, 由于 $m_e \ll m_Y$, 应有 $T_\beta \cong E_d$, 能量是确定的

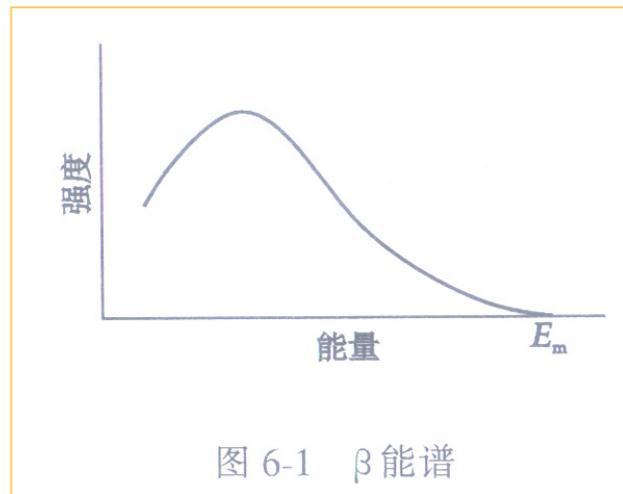


图 6-1 β 能谱

§ 6.2 中 微 子

1. 中微子假说

泡利的中微子假说告诉我们：原子核在 β 衰变过程中，不仅放出一个 β 粒子，还放出一个不带电的中性粒子，它的质量小得几乎为零，所以叫做中微子，用符号 ν 表示。

$$\mathbf{p}_\beta + \mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_R = \mathbf{0},$$

$$E_d = T_\beta + T_R + T_\nu \cong T_\beta + T_\nu$$

T_β ，可在 $0—E_d$ 之间变化。怎么分布

(1) β 粒子和反冲核的动量大小相等方向相反，即 $\mathbf{p}_\beta = -\mathbf{p}_R$ 。显然，这时 $\mathbf{p}_\nu = \mathbf{0}$ 。于是

$$T_R = \frac{P_R^2}{2m_R} = \frac{P_\beta^2}{2m_R} = \frac{(T_\beta + 2m_e c^2)T_\beta}{2m_R c^2}$$

$$E_d = T_\beta + \frac{(T_\beta + 2m_e c^2)T_\beta}{2m_R c^2} = T_\beta \left(1 + \frac{T_\beta}{2m_R c^2} + \frac{m_e}{m_R}\right) \approx T_\beta$$

即此时 β 粒子的动能大约等于衰变能。

(2) 中微子和反冲核的动量大小相等方向相反，即 $\mathbf{p}_\nu = -\mathbf{p}_R$ 。显然，这时 $\mathbf{p}_\beta = \mathbf{0}$ ，所以 $T_\beta = 0$ 。

对于一般情况， β 粒子的动能介于上述两种极端情况之间，而得到 $T_\beta = 0$ 至 E_m 的连续分布。

2. 中微子的性质

根据实验和理论考虑，可以得出中微子的一些基本性质。

(1) 静止质量 m_ν

近期的实验表明，电中微子静止能量的上限为 3eV ，在 β 衰变理论中，可近似地看成为零。因此，它的速度与光速相同，能量 E_ν 与动量 p_ν 之间的关系为

$$E_\nu = cp_\nu$$

中微子质量是否为 0 ，是理论和实验上有重大意义的问题。

(2) 电荷 $q=0$

(3) 自旋 $I_\nu = \frac{1}{2}$

β 衰变中母子核的质量数不变，则母子核的自旋必同为半整数或整数。由于 β 粒子（即普通的电子或正电子）的自旋为 $\frac{1}{2}$ ，为保持角动量守恒，中微子的自旋必为半整数，而且实验表明，只能是 $\frac{1}{2}$ 。例如下列衰变



自旋: 0 0 $1/2$

按角动量守恒和 β 谱形分析，中微子的自旋 I_ν 只能为 $1/2$ 。

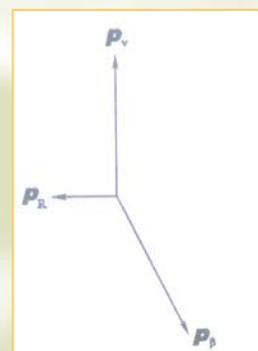


图 6-3 β 衰变中诸粒子间的动量关系

(4) 遵从费米统计

β 衰变中，母、子核的质量数不变，则母核和子核的统计性相同。因电子是费米子，为保持统计性守恒，中微子必为费米子。

(5) 磁矩 μ_ν

实验没有测得中微子的磁矩，其上限不超过 $1.5 \times 10^{-10} \mu_B$ 。

(6) 螺旋性 (helicity) $H = \pm 1$

螺旋性的定义如下：

$$H = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}| |\boldsymbol{\sigma}|}$$

式中 \mathbf{p} 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别表示粒子的动量和自旋。理论和实验表明，中微子的螺旋性 $H = \pm 1$ 。所以，中微子有两种螺旋性。 $H = +1$ 者称为反中微子，用符号 $\bar{\nu}$ 表示，其自旋方向与运动方向相同，即属于右旋粒子（运动方向与右手螺丝相同）； $H = -1$ 者就称为中微子，用 ν 表示，其自旋方向与运动方向相反，即属于左旋粒子（运动方向与左手螺丝相同）。

$\bar{\nu}$ 和 ν 互为粒子和反粒子。实验证明， β^- 衰变放出的是反中微子 $\bar{\nu}$ ， β^+ 衰变和轨道电子俘获过程放出的是中微子 ν 。

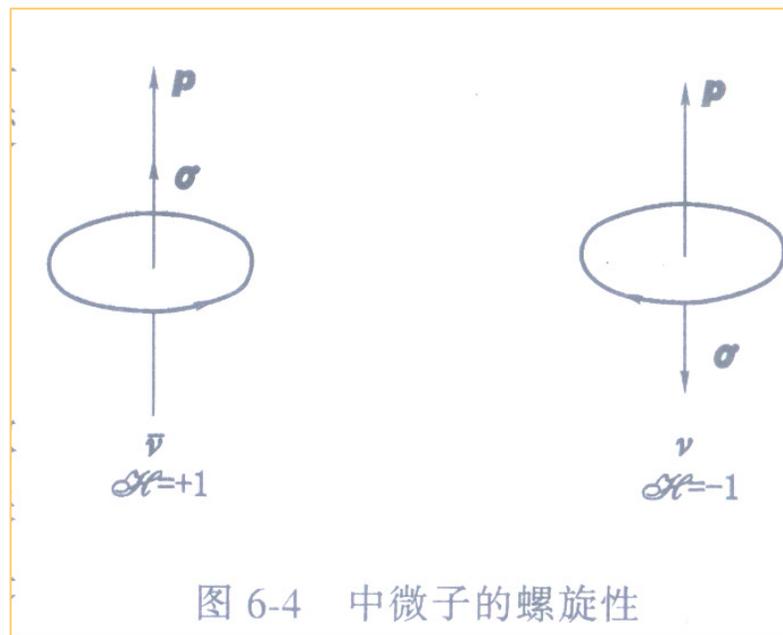


图 6-4 中微子的螺旋性

3. 实验证明

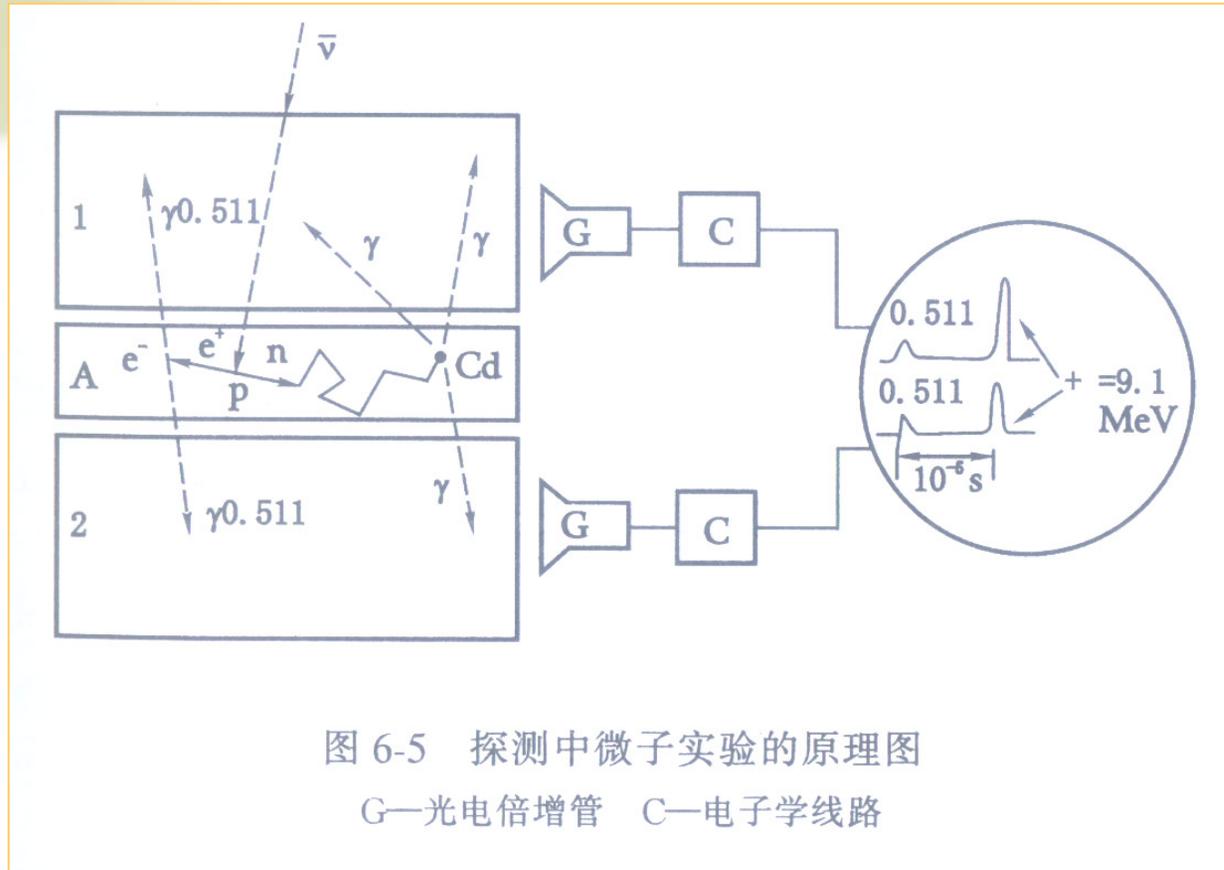
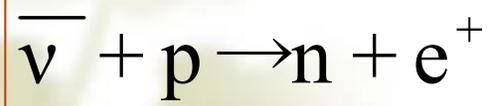
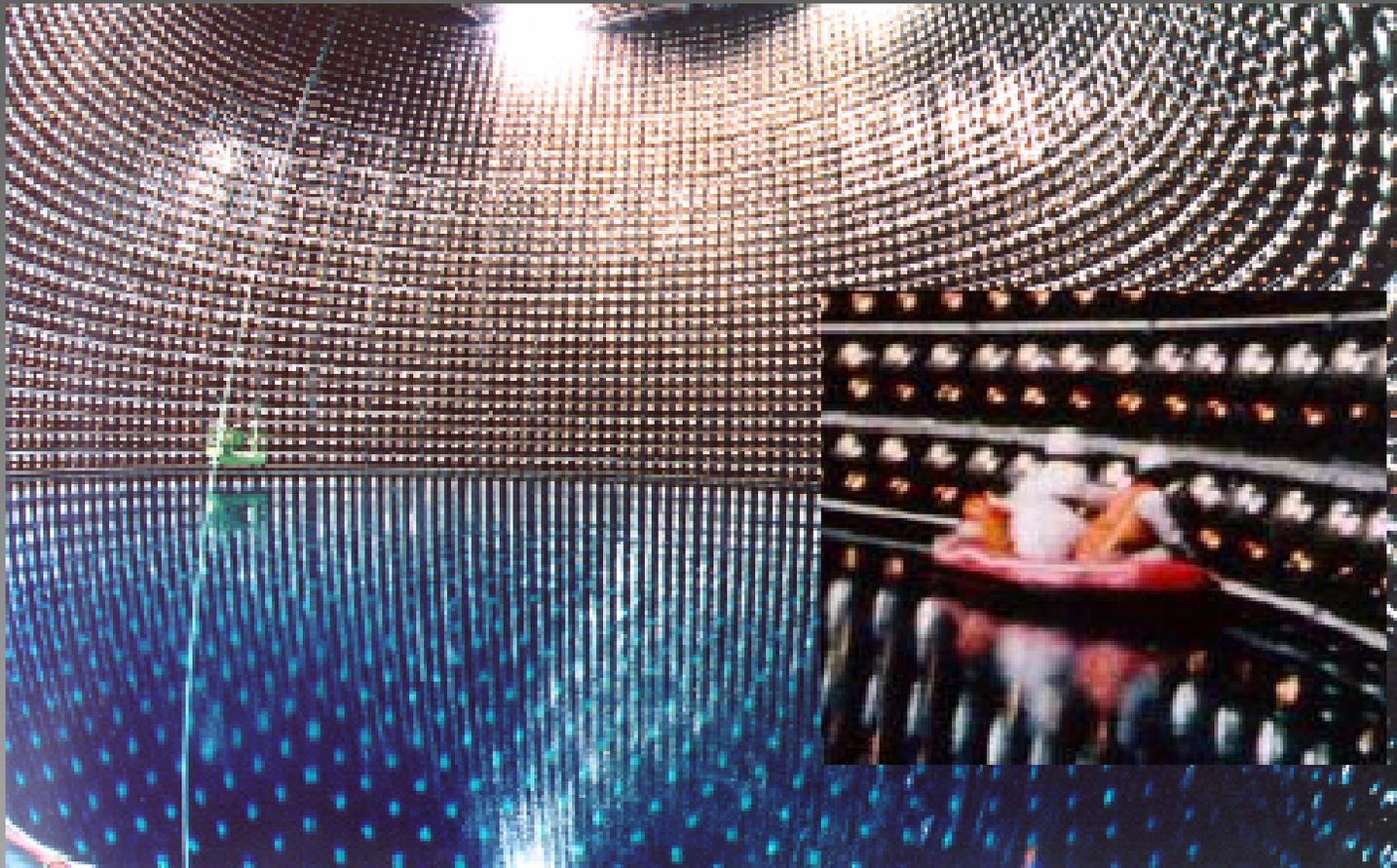


图 6-5 探测中微子实验的原理图

G—光电倍增管 C—电子学线路



Super-Kamiokande



§ 6.3 β 衰变的三种类型及其衰变能

将中微子考虑在内， β 衰变的三种类型可以用下列式子表示。

$$\beta^- \text{ 衰变: } \quad {}_Z^A\text{X} \rightarrow {}_{Z+1}^A\text{Y} + e^- + \bar{\nu}$$

$$\beta^+ \text{ 衰变: } \quad {}_Z^A\text{X} \rightarrow {}_{Z-1}^A\text{Y} + e^+ + \nu$$

$$\text{轨道电子俘获: } \quad {}_Z^A\text{X} + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^A\text{Y} + \nu$$

其中 X 和 Y 分别表示母核和子核或相应的核素。

β 衰变的本质在于衰变过程中原子核中的一个中子转变成质子，或者是一个质子转变成中子。用式子作如下表示。

对于 β^- 衰变:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

对于 β^+ 衰变:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu$$

对于轨道电子俘获:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu$$

1. β^- 衰变

a) 自由中子衰变

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\begin{aligned} E_d &= (m_n - m_p - m_e - m_{\bar{\nu}})c^2 \\ &= 939.573 - 938.280 - 0.511 - m_{\bar{\nu}}c^2 \\ &= 0.782 - m_{\bar{\nu}}c^2 \end{aligned}$$

又 $E_d = T_p + T_e + T_{\bar{\nu}} \cong T_e + T_{\bar{\nu}}$

实验测得 $T_e^{\max} = 0.782 \pm 0.013 \text{ MeV}$ ，所以，

$$m_{\bar{\nu}}c^2 \leq 0.013 \text{ MeV}。$$

b) 核衰变

用 m_X 、 m_Y 和 m_e 分别代表母核，子核和电子的静止质量。考虑中微子的静止质量为零， β^- 衰变的衰变能

$$E_d(\beta^-) = [m_X(Z, A) - m_Y(Z + 1, A) - m_e]c^2$$

若以原子质量 M_X 、 M_Y 表示，并且忽略电子在原子中结合能的差异，那么

$$\begin{aligned} E_d(\beta^-) &= [M_X(Z, A) - Zm_e - M_Y(Z + 1, A) + (Z + 1)m_e - m_e]c^2 \\ &= [M_X(Z, A) - M_Y(Z + 1, A)]c^2 \end{aligned}$$

只有

$$M_X > M_Y$$

才能发生 β^- 衰变。

2. β^+ 衰变

$$E_d(\beta^+) = [m_X(Z, A) - m_Y(Z - 1, A) - m_e]c^2$$

用原子质量来表示，并且忽略电子在原子中结合能的差异，则

$$\begin{aligned} E_d(\beta^+) &= [M_X(Z, A) - Zm_e - M_Y(Z - 1, A) + (Z - 1)m_e - m_e]c^2 \\ &= [M_X(Z, A) - M_Y(Z - 1, A) - 2m_e]c^2 \end{aligned}$$

只有

$$M_X - M_Y > 2m_e$$

才能发生 β^+ 衰变。

3. 轨道电子俘获（通常用 EC 或 ϵ 表示）

$$E_d(i) = [m_X(Z, A) + m_e - \frac{W_i}{c^2} - m_Y(Z - 1, A)]c^2$$

用原子质量来表示，并且忽略电子在原子中结合能的差异，则

$$\begin{aligned} E_d(i) &= [M_X(Z, A) - Zm_e + m_e - M_Y(Z - 1, A) + (Z - 1)m_e]c^2 - W_i \\ &= [M_X(Z, A) - M_Y(Z - 1, A)]c^2 - W_i \end{aligned}$$

只有

$$M_X - M_Y > W_i / c^2$$

才能发生第 i 层的轨道电子俘获。

轨道电子俘获过程所形成的子核原子，它的内层电子缺少了一个。例如 **K** 俘获情形，**K** 层电子少了一个，子核原子处于不稳定的激发状态，于是邻近的 **L** 层电子就会跳到 **K** 层来填充 **K** 层电子的空位，这样，就会发射出特征 **X** 射线，

$$h\nu = W_{\text{K}} - W_{\text{L}}$$

当一个 **L** 电子跳到 **K** 层来填充空位时，可以不发射 **X** 射线，而把能量交给另一个 **L** 电子，于是这个 **L** 电子就会克服结合能而飞出，这种电子叫做俄歇电子。这样，俄歇电子的动能为

$$E_{\text{e}} = h\nu - W_{\text{L}} = W_{\text{K}} - 2W_{\text{L}}$$

由于 $2m_{\text{e}}c^2 \gg W_{\text{i}}$ ，能发生 β^+ 衰变的原子核可以发生轨道电子俘获。反之，能发生轨道电子俘获的原子核不一定能发生 β^+ 衰变。这主要是由能量条件来决定的。原则上，当能量满足 β^+ 衰变的条件时，轨道电子俘获和 β^+ 衰变可同时有一定的概率发生。

例:

	$E_d (MeV)$	$T_{1/2}$
$^{23}\text{Ne} \rightarrow ^{23}\text{Na} + e^- + \bar{\nu}$	4.38	38s
$^{99}\text{Te} \rightarrow ^{99}\text{Ru} + e^- + \bar{\nu}$	0.29	$2.1 \times 10^5 \text{ a}$
$^{25}\text{Al} \rightarrow ^{25}\text{Mg} + e^+ + \nu$	3.26	7.2s
$^{124}\text{I} \rightarrow ^{124}\text{Te} + e^+ + \nu$	2.14	4.2d
$^{15}\text{O} + e^- \rightarrow ^{15}\text{N} + \nu$	2.75	1.22s

4. 双 β 衰变

原子核自发地放出两个电子或两个正电子, 或发射一个正电子同时又俘获一个轨道电子, 或俘获两个轨道电子的过程。

双 β 衰变的实验测量, 可以用来鉴别中微子有无正反之分, 和中微子是否具有静止质量。

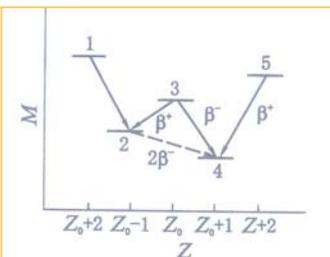


图 6-6 双 β 衰变示意图

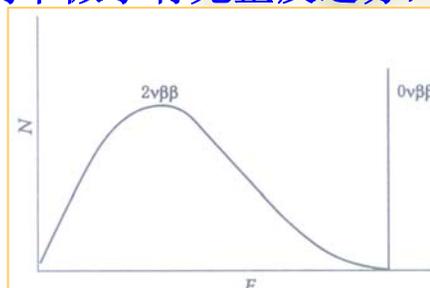
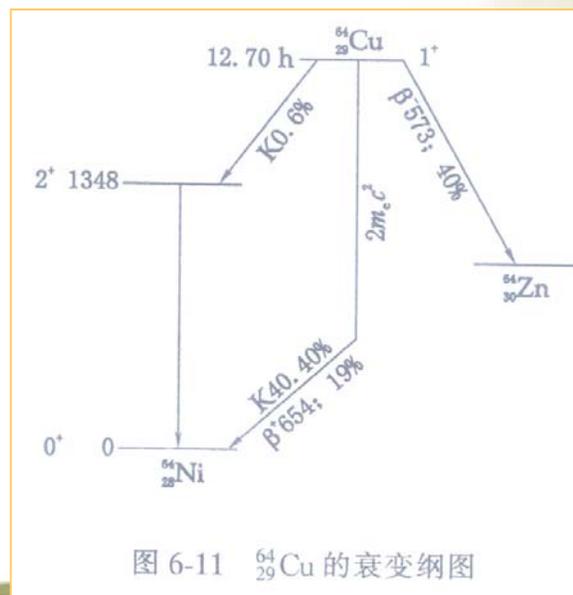
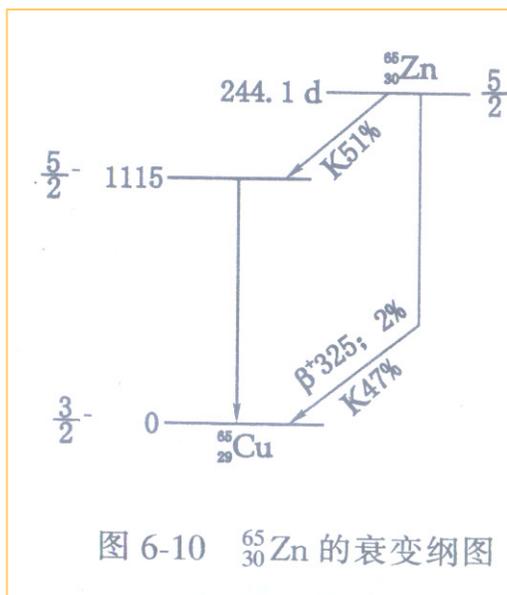
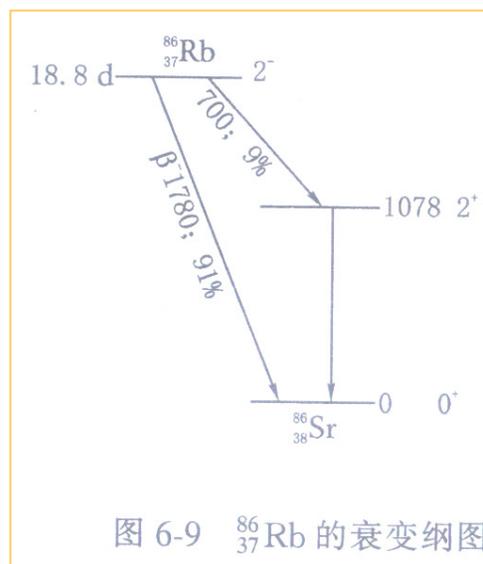
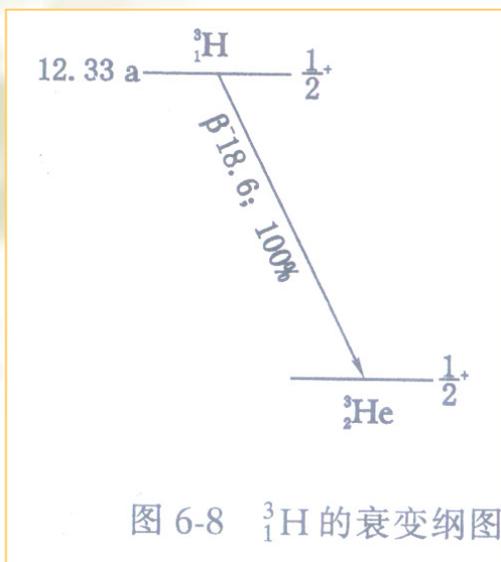


图 6-7 双 β 衰变的电子对能谱

§ 6.4 衰变纲图



§ 6.5 β 衰变的费米理论

1934 年费米 (E. Fermi) 基于中微子假说和实验事实建立了 β 衰变理论。

1. 费米理论的基本思想

β 衰变的本质: $p \leftrightarrow n$ 量子态跃迁

在跃迁过程中, 放出电子和中微子。

电子-中微子场与原子核的相互作用——弱相互作用。

2. β 衰变概率公式

下面来推导 β 衰变的概率公式。严格的理论需要场论, 这里仅仅是一个示意的推导。

根据量子力学的微扰论, 单位时间发射一动量在 p 到 $p+dp$ 间 β 粒子的概率可表示为

$$I(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_f^* H \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}$$

显然, 衰变常数

$$\lambda = \int_0^{p_m} I(p) dp$$

注: H 不显
含时间

$\Psi_i = u_i$; $\Psi_f = u_f \phi_\beta \phi_\nu$; $\frac{dn}{dE}$ 为单位能量间隔的终态数目; H 为 β 相互作用算符。

在费米理论中, 简单地假定 H 等于常量 g 。与电磁场的相互作用常量 e 相类比, g 是描写电子-中微子场与核子的相互作用常量, 这是一种弱相互作用, 因此称 g 为弱相互作用常量。

$$I(p)dp = \frac{2\pi g^2}{\hbar} \left| \int u_f^* \phi_\beta^* \phi_\nu^* u_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}$$

假定发射出来的 β 粒子、中微子与子核间的作用很弱, 则可以近似地把 β 粒子和中微子看作自由粒子, 并以平面波来描写它们, 即

$$\phi_\beta^* = V^{-1/2} \exp(-i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r})$$

$$\phi_\nu^* = V^{-1/2} \exp(-i\mathbf{k}_\nu \cdot \mathbf{r})$$

式中 V 是归一化体积, \mathbf{k}_β 和 \mathbf{k}_ν 分别是 β 粒子和中微子的波矢量。

$$I(p)dp = \frac{2\pi g^2}{\hbar V^2} \left| M_{if} \right|^2 \frac{dn}{dE}$$

其中 $M_{if} = \int u_f^* u_i \exp[-i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}] d\tau$ 称为跃迁矩阵元。

终态数目为 β 粒子和中微子的状态数的乘积。至于 β 粒子，按照量子统计理论，体积 V 中动量在 p 到 $p+\mathbf{d}p$ 之间的状态数

$$dn_{\beta} = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V$$

注：三个粒子，两个可以自由选择动量

同样，中微子的状态数

$$dn_{\nu} = \frac{4\pi p_{\nu}^2 dp_{\nu}}{(2\pi\hbar)^3} V$$

所以，终态密度为

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn_{\beta} dn_{\nu}}{dE} = \frac{16\pi^2 p^2 p_{\nu}^2 dp dp_{\nu}}{(2\pi\hbar)^6 dE} V^2 = \frac{p^2 p_{\nu}^2 dp dp_{\nu}}{4\pi^4 \hbar^6 dE} V^2$$

β 粒子与中微子的能量之和等于 β 粒子的最大能量 E_m ，即

$$E + E_{\nu} = E_m$$

E_m 对某一确定的 β 衰变是一常量，则

$$dE = -dE_{\nu}$$

若中微子的静止质量 $m_{\nu}=0$ ，有 $E_{\nu}=cp_{\nu}$ ， $dE_{\nu}=cdp_{\nu}$ ，所以有

$$dE = -cdp_{\nu}$$

$$p_{\nu} = (E_m - E) / c$$

中微子动量增加时， β 粒子能量减少。

$$\frac{dn}{dE} = \frac{p^2 (E_m - E)^2 dp}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} V^2$$

因此,

$$I(p)dp = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E_m - E)^2 p^2 dp$$

这就是 β 衰变的概率公式。它表示单位时间发射动量在 p 到 $p+dp$ 之间的 β 粒子相对数目随动量的分布。由于跃迁矩阵元 M_{if} 一般随 β 粒子能量的变化不甚剧烈,对有些跃迁, M_{if} 实际是常量。所以 β 粒子的动量分布取决于统计因子 $(E_m - E)^2 p^2$ 。

考虑了库仑场的影响之后,应乘上一个改正因子 $F(Z, E)$ 。它是子核电荷数 Z 和 β 粒子能量 E 的函数。通常称它为费米函数,或叫库仑改正因子。对费米函数的计算,一般相当复杂,应用时有现成的函数表或图可查。如果 Z 值比较小, $F(Z, E)$ 在非相对论近似中可用一简单函数来表示:

$$F(Z, E) = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

其中 $x = \pm \frac{2\pi Zc}{137v}$,对 β^- 衰变取正号,对 β^+ 衰变取负号; v 为 β 粒子的速度。

考虑了库仑改正因子, β 粒子动量分布的最后表达式为

$$I(p)dp = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} F(Z, E) (E_m - E)^2 p^2 dp$$

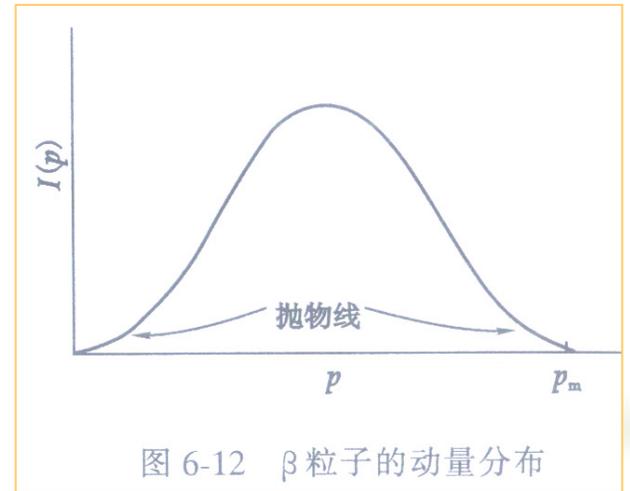


图 6-12 β 粒子的动量分布

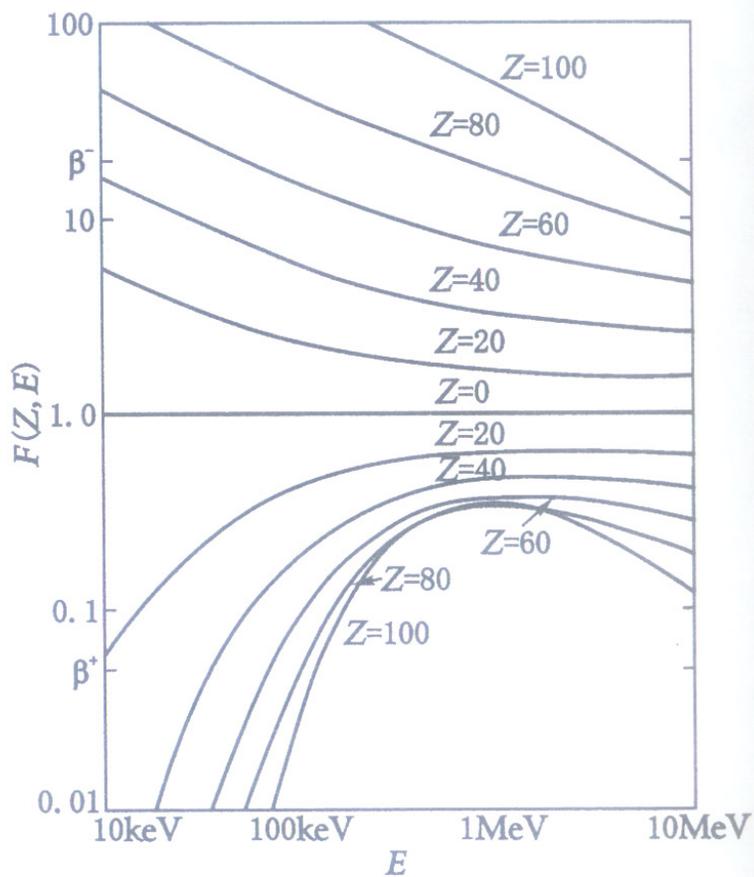


图 6-13 费米函数 $F(Z, E)$

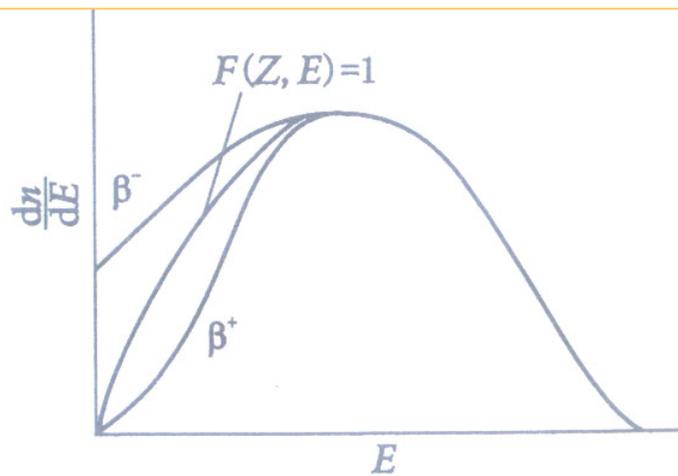


图 6-14 $F(Z, E)$ 对 β 能谱的影响

$$I(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_f^* H \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}$$

$$I(p)dp = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} F(Z, E) (E_m - E)^2 p^2 dp$$

$$M_{if} = \int u_f^* u_i \exp[-i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}] d\tau$$

§ 6.6 跃迁分类和选择定则

1. 跃迁分类

$$M_{if} = \int u_f^* u_i \exp[-i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}] d\tau$$

根据跃迁矩阵元 $|M_{if}|$ 的大小，可以将 β 跃迁进行分类。

$$\exp[-i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}] = 1 - i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2!} [(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}]^2 + \dots$$

注： $k = |\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu|$ 和 \mathbf{r} 为轻子对相对于原子核运动波矢和相对位置矢量。

由 $pc = \hbar kc \sim 10\text{MeV}$ ，得 $k \sim 1/20 \text{ fm}^{-1}$ 。 k 比 1 小很多。

我们也可以利用平面波展成球面波的公式得到同样的结论。

$$\exp[-i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}] = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^l j_l [|\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu| \cdot |\mathbf{r}|] P_l(\cos \theta)$$

式中 $j_l[|\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu| \cdot |\mathbf{r}|]$ 是球贝塞尔函数， $P_l(\cos \theta)$ 是勒让特多项式。因 $|\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu| \cdot |\mathbf{r}| \ll 1$ ，则有

$$j_l[|\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu| \cdot |\mathbf{r}|] \approx [|\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu| \cdot |\mathbf{r}|]^l / (2l+1)!!$$

其中 $(2l+1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2l+1)$ 。于是式成为

$$\exp[-i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)(-i)^l}{(2l+1)!!} [|\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu| \cdot |\mathbf{r}|]^l P_l(\cos \theta)$$

即得级数的第一项 ($l=0$) 对跃迁概率的贡献最大，随 l 的增大而递减。

当第一项 ($l=0$ 项) 有贡献时，称为容许跃迁，此时，跃迁矩阵元 $M_{if} \approx \int u_f^* u_i d\tau \equiv M$ ，

它与轻子（即电子和中微子）的能量或动量无关，仅与跃迁前后原子核的状态有关。所以，也称 M 为原子核矩阵元。

在核的
范围内

角动量宇称

如果级数的第一项在计算矩阵元时贡献为零，跃迁的概率就要小得多，这种跃迁称为禁戒跃迁。禁戒跃迁又分为几类：如果第二项($l=1$ 项)贡献是主要的，称为一级禁戒跃迁；如果第二项的贡献为零，第三项($l=2$ 项)的贡献成为主要的，称为二级禁戒跃迁；其余类推。所以，容许跃迁可以理解为主要发射 s 波的轻子，一级禁戒跃迁主要发射 p 波的轻子，二级禁戒跃迁主要发射 d 波轻子，……等等。

由于 $(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}$ 在 0.1-0.01 范围，因而一级禁戒跃迁概率比容许跃迁概率小几个数量级，而二级的又比一级的小几个数量级，……。级次越高，跃迁概率越小。

2. 选择定则

以 l 和 s 表示电子和中微子共同带走的轨道角动量和自旋。

角动量守恒：
$$\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{l} + \vec{s}, \quad s = 0, 1$$

宇称的变化：
$$\pi_i / \pi_f = (-1)^l \quad (\text{实验证明})$$

(1) 容许跃迁的选择定则

$l = 0$, 所以 $\Delta\pi = \pi_i / \pi_f = (-1)^l = +1$

$s = 0$ 时, $\Delta I = I_i - I_f = 0$;

$s = 1$ 时, $\Delta I = I_i - I_f = 0, \pm 1$ (0 \rightarrow 0 跃迁除外)

Allowed decays

F
G-T

即容许跃迁须遵从以下选择定则：

$$\left. \begin{aligned} \Delta I &= 0, \pm 1 \\ \Delta\pi &= +1 \end{aligned} \right\}$$

例如：(i) ${}^3_1\text{H} \xrightarrow{\beta^-} {}^3_2\text{He}$ (图 6-8)。 ${}^3_1\text{H}$ 的 $I = \frac{1}{2}$, $\pi = +1$; ${}^3_2\text{He}$ 的 $I = \frac{1}{2}$, $\pi = +1$ 。
于是 $\Delta I = 0$, $\Delta\pi = +1$, 所以此跃迁为容许跃迁。

(ii) ${}^{64}_{29}\text{Cu} \xrightarrow{\beta^+} {}^{64}_{28}\text{Ni}$ (图 6-11)。 ${}^{64}_{29}\text{Cu}$ 的 $I = 1$, $\pi = +1$; ${}^{64}_{28}\text{Ni}$ 的 $I = 0$, $\pi = +1$ 。于是 $\Delta I = +1$, $\Delta\pi = +1$, 所以此跃迁也为容许跃迁。

S=0 时的选择定则称为费米选择定则, 简称为 F 选择定则; 相应的跃迁称为 F 跃迁; 相应的 β 相互作用称为 F 相互作用。S=1 时的选择定则称为 Gamov-Teller 选择定则, 简称为 G-T 选择定则; 相应的跃迁称为 G-T 跃迁; 相应的 β 相互作用称为 G-T 相互作用。

$0 \rightarrow 0$ 跃迁只可能是 F 跃迁, 即纯 F 跃迁,

例如 ${}^{14}_8\text{O} \xrightarrow{\beta^+} {}^{14}_7\text{N}^*$, 其自旋和宇称的变化是 $0^+ \rightarrow 0^+$, 所以是 F 型的容许跃迁; $\Delta I = \pm 1$ 的跃迁是纯 G-T 跃迁, 例如 ${}^6_2\text{He} \xrightarrow{\beta^-} {}^6_3\text{Li}$, 其自旋和宇称变化是 $0^+ \rightarrow 1^+$, 所以是 G-T 型容许跃迁; $\Delta I = 0$, $I_i = I_f \neq 0$ 的跃迁则是 F 跃迁与 G-T 跃迁的混合, 例如中子衰变 $n \xrightarrow{\beta^-} p$, 其自旋和宇称变化是 $\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$, 则此衰变中 F 跃迁和 G-T 跃迁均有。

跃迁概率公式中的因子 $g^2|M_{if}|^2$ 可以写成 $g_F^2|M_F|^2 + g_{GT}^2|M_{GT}|^2$ ，此处 M_F 和 M_{GT} 称为 F 型矩阵元和 G-T 型矩阵元， g_F 和 g_{GT} 分别是两种相互作用的常量。

Forbidden decays

(2) 禁戒跃迁的选择定则

对于一级禁戒跃迁， $l=1$ 。当 $s=0$ 时，即 F 型跃迁时，有

$$I_i = I_f + 1, I_f, I_f - 1$$

则得角动量选择定则

$$\Delta I = I_i - I_f = 0, \pm 1, (0 \rightarrow 0 \text{ 跃迁除外})$$

$$\Delta \pi = -1$$

当 $s=1$ 时，即为 G-T 型跃迁时，对一级禁戒跃迁有

$$I_i = I_f + 2, I_f + 1, I_f, I_f - 1, I_f - 2$$

所以此时角动量选择定则

$$\Delta I = I_i - I_f = 0, \pm 1, \pm 2$$

最后得一级禁戒跃迁的选择定则是

$$\left. \begin{array}{l} \Delta I = 0, \pm 1, \pm 2 \\ \Delta \pi = -1 \end{array} \right\}$$

对 $\Delta I = \pm 2$ 和 $0 \rightarrow 0$ 的一级禁戒跃迁是纯 G-T 型跃迁，其它情形则是 F 型与 G-T 型相混合的。

对于二级禁戒跃迁， $l=2$ 。与上述讨论完全类似，可以得出二级禁戒跃迁的选择定则如下：

$$\left. \begin{array}{l} \Delta I = \pm 2, \pm 3 \\ \Delta \pi = +1 \end{array} \right\}$$

其中 $\Delta I = \pm 3$ 的二级禁戒跃迁是纯 G-T 型跃迁，其它情形则是混合跃迁。

如果单从角动量守恒考虑， $\Delta I = 0, \pm 1$ 情形也可以产生二级禁戒跃迁。结合宇称选择定则 $\Delta \pi = +1$ 一起考虑，此时必能发生容许跃迁。由于二级禁戒跃迁比容许跃迁弱很多，从而完全可以忽略 $\Delta I = 0, \pm 1$ 的二级禁戒跃迁。

对于二级以上的禁戒跃迁，与二级禁戒跃迁的讨论完全相同，可以得出 n 级禁戒跃迁的选择定则如下：

$$\left. \begin{array}{l} \Delta I = \pm n, \pm (n + 1) \\ \Delta \pi = (-1)^n \end{array} \right\}$$

$\Delta I = \pm (n + 1)$ 的 n 级禁戒跃迁是纯 G-T 型跃迁，其它情形则是混合跃迁。

下面举一些禁戒跃迁的例子。

- (i) 一级禁戒跃迁： ${}_{18}^{39}\text{Ar} \xrightarrow{\beta^-} {}_{19}^{39}\text{K} (7/2^- \rightarrow 3/2^+)$ ， ${}_{47}^{111}\text{Ag} \xrightarrow{\beta^-} {}_{48}^{111}\text{Cd} (1/2^- \rightarrow 1/2^+)$ ，
 ${}_{48}^{113\text{m}}\text{Cd} \xrightarrow{\beta^-} {}_{49}^{113}\text{In} (11/2^- \rightarrow 9/2^+)$ 。
- (ii) 二级禁戒跃迁： ${}_{26}^{59}\text{Fe} \xrightarrow{\beta^-} {}_{27}^{59}\text{Co} (3/2^- \rightarrow 7/2^-)$ ， ${}_{4}^{10}\text{Be} \xrightarrow{\beta^-} {}_{5}^{10}\text{B} (0^+ \rightarrow 3^+)$ 。
- (iii) 三级禁戒跃迁： ${}_{37}^{87}\text{Rb} \xrightarrow{\beta^-} {}_{38}^{87}\text{Sr} (3/2^- \rightarrow 9/2^+)$ ， ${}_{19}^{40}\text{K} \xrightarrow{\beta^-} {}_{20}^{40}\text{Ca} (4^- \rightarrow 0^+)$ 。
- (iv) 四级禁戒跃迁： ${}_{49}^{115}\text{In} \xrightarrow{\beta^-} {}_{50}^{115}\text{Sn} (9/2^+ \rightarrow 1/2^+)$ 。

四级以上的禁戒跃迁，由于它们的跃迁概率实在太小，至今在实验上还没有观察到。

§ 6.7 库里厄图

为了进行实验与理论比较，一个比较方便的方法乃是观察函数 $[I(p)/Fp^2]^{1/2}$ 对于 E 的线性关系，

$$[I(p)/Fp^2]^{1/2} = K(E_m - E)$$

式中 $K = g|M_{if}| / (2\pi^3 c^3 \hbar^7)^{1/2}$ 。从实验上测得 β 粒子的动量分布，来作 $[I(p)/Fp^2]^{1/2}$ 对 E 的图，看它是否一条直线，就可对理论和实验进行比较(**scaling**)。用这种方法来表示实验结果的图，称为库里厄图(**Kurie Plot**)。

1. 容许跃迁的库里厄图

对于容许跃迁，跃迁矩阵元近似等于原子核矩阵元，即 $M_{if} \approx M \equiv \int u_f^* u_i d\tau$ ，它与 β 粒子的能量无关。

$$K = g|M_{if}| / (2\pi^3 c^3 \hbar^7)^{1/2} = g|M| / (2\pi^3 c^3 \hbar^7)^{1/2} = \text{常量}$$

因此库里厄图使得 β 能谱的实验结果画成一条直线。这不仅便于与理论进行比较，而且可以比较精确地确定 β 谱的最大能量 E_m 。

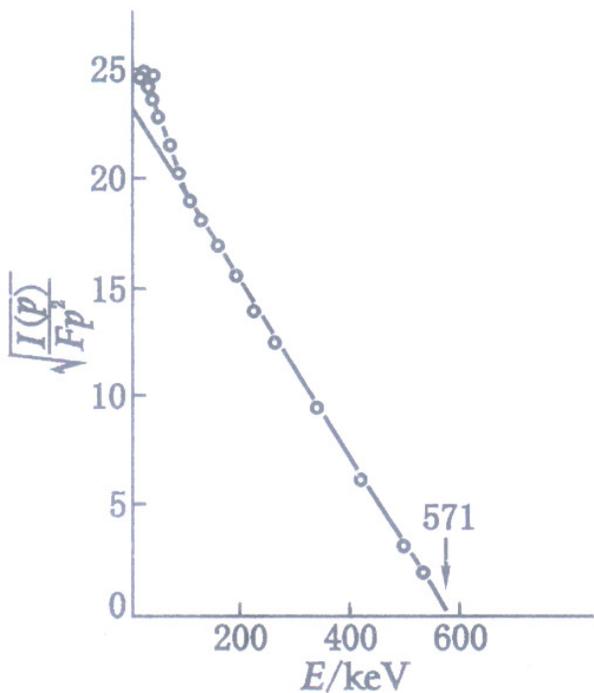


图 6-15 ^{64}Cu 的 β^- 谱的
库里厄图

[引自 C. S. Wu et al., Phys. Rev.,
75, 315(1949); 75, 1107(1949).]

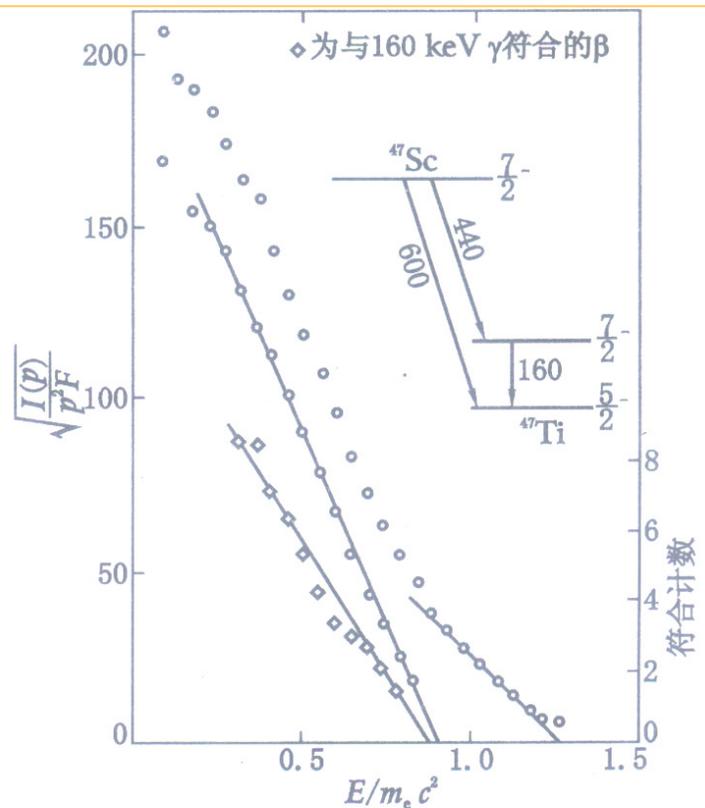


图 6-16 ^{47}Sc 的 β^- 谱的
库里厄图

[引自 W. E. Graves et al., Phys. Rev.,
101, 1368(1956).]

库里厄图也可用来对复杂的 β 谱进行分解。在一般情况下， β 衰变往往由母核的基态衰变到子核的几个不同的能态，这时就会发射出最大能量不同的几组 β 粒子来，这几组 β 粒子叠在一起的 β 谱称为复杂的 β 谱。复杂的 β 谱需要通过库里厄图才能分解开。

容许跃迁可以用来确定 E_m ，即确定衰变能 E_d 。

2. 禁戒跃迁的库里厄图

对于禁戒跃迁，跃迁矩阵元不等于原子核矩阵元 M 。此时它不仅与原子核的波函数有关，而且与轻粒子的动量 P_β 和 P_ν 有关。一般地说，对于 n 级禁戒跃迁 M_{if} 可以写成下列形式：

$$M_{if} = M[S_n(E)]^{1/2}$$

其中， M 是原子核矩阵元； $S_n(E)$ 称为 n 级形状因子，它是 β 粒子能量 E 的函数。

n 级禁戒跃迁的动量分布如下：

$$I(p)dp = \frac{g^2|M|^2}{2\pi^3c^3\hbar^7} F(Z,E)(E_m - E)^2 p^2 S_n(E) dp$$
$$[I(p)/Fp^2]^{1/2} = K(E_m - E)[S_n(E)]^{1/2}$$

其中， $K = g|M|/(2\pi^3c^3\hbar^7)^{1/2}$ ，是常量。式右边出现因子 $[S_n(E)]^{1/2}$ ，严格地讲，此时的库里厄图不再是直线。但是，对于有些禁戒跃迁， $S_n(E)$ 随能量 E 的变化不灵敏，可以近似地看作常量。于是式成为

$$[I(p)/Fp^2]^{1/2} = K'(E_m - E)$$

其中 $K' = K[S_n(E)]^{1/2} \approx$ 常量。

由此可见，有些禁戒跃迁的库里厄图仍然可能是条直线。此时无法确定跃迁的级次。但是对于选择定则 $\Delta l = \pm (n+1)$ 的禁戒跃迁，即纯 G-T 型禁戒跃迁， $S_n(E)$ 肯定不是常量，其值为

$$\left. \begin{aligned} S_1(E) &= (W^2 - 1) + (W_0 - W)^2 \\ S_2(E) &= (W^2 - 1)^2 + (W_0 - W)^4 + \frac{10}{3}(W^2 - 1)(W_0 - W)^2 \\ S_3(E) &= (W^2 - 1)^3 + (W_0 - W)^6 + 7(W^2 - 1)(W_0 - W)^2[(W^2 - 1) + (W_0 - W)^2] \end{aligned} \right\}$$

式中， W 和 W_0 是以 $m_e c^2$ 为单位的 β 粒子总能量及其最大值，即 $W = (E + m_e c^2) / m_e c^2$ ， $W_0 = (E_m + m_e c^2) / m_e c^2$ 。

这种类型的跃迁，称为唯一型 n 级禁戒跃迁。对于此种跃迁，库里厄图不是直线。但利用形状因子 $S_n(E)$ 对库里厄图进行改正后可以还原为直线。这时应当采用函数 $[I(p) / Fp^2 S_n]^{1/2}$ 对 E 来作图

$$[I(p) / Fp^2 S_n]^{1/2} = K(E_m - E)$$

于是 $[I(p) / Fp^2 S_n]^{1/2}$ 和 E 是直线关系。

经过它改正后如果得到直线的库里厄图，那么可以肯定这种跃迁是唯一禁戒跃迁，其禁戒级次则由所选取的 $S_n(E)$ 的级次来定。所以，库里厄图可用来分析跃迁的性质，从而可以获得有关原子核能级自旋和宇称的知识。

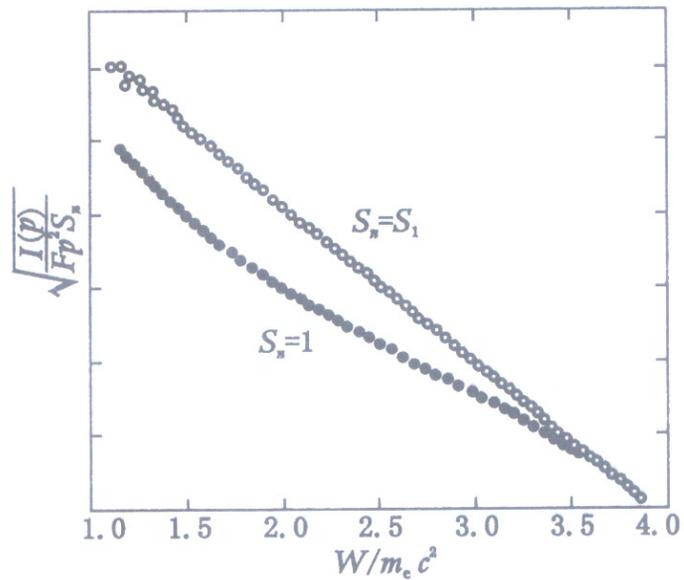


图 6-17 ^{89}Sr β^- 谱的库里厄图
 [引自 F. K. Wohn et al., Nucl. Phys.,
 A 146, 33(1970).]

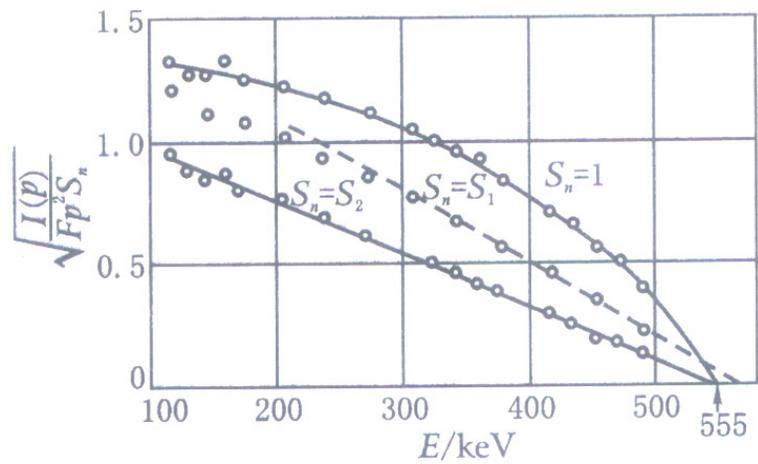


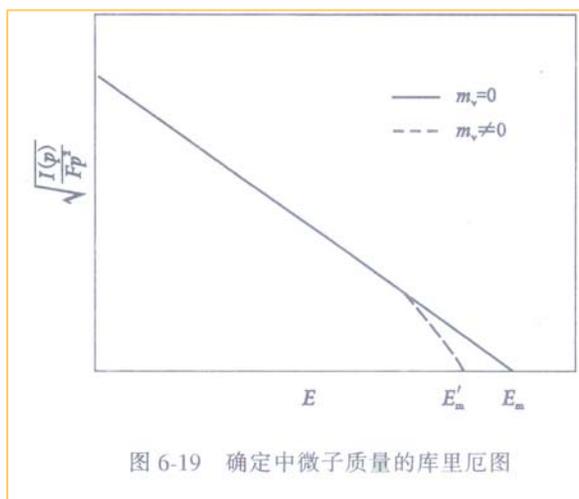
图 6-18 ^{10}Be β 谱的库里厄图
 [引自 C. S. Wu, Rev. Mod. Phys.,
 22, 386(1950).]

3. 由库里厄图确定中微子质量

β 能谱的测量是直接确定中微子质量的一种有效方法，它的原理如下。

可以证明， β 能谱库里厄图的高能端的形状是中微子质量的函数。由上面讨论知道，当中微子质量 $m_\nu = 0$ 时，容许跃迁 β 谱的库里厄图是一条直线，它与横轴的交点为 β 谱的最大能量 E_m 。容易证明，如果 $m_\nu \neq 0$ ，则此库里厄图的高能端将偏离直线， m_ν 越大，偏离越严重，将与横轴交于 E'_m ， E_m 和 E'_m 之差正好等于中微子的静止能量。

80 年代以来，国际上有多家实验室进行了中微子质量的测量，给出的最低上限约为 10eV ，并不排除 $m_\nu = 0$ 的可能性。到目前为止，中微子是否具有静止质量仍是一个未解之谜。



§ 6.8 衰变常量和比较半衰期

1. 萨晋定律 衰变常量 λ :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \int_0^{p_m} I(P) dp \approx \frac{m_e^5 c^4 g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z, E_m)$$

其中

$$f(Z, E_m) = \int_0^{p_m} F(Z, E) \left(\frac{E_m - E}{m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{p}{m_e c} \right)^2 \frac{dp}{m_e c}$$

态空间效应

注意，式中已假定 M_{if} 与 β 粒子能量关系可以忽略。

知道库仑改正因子 $F(Z, E)$ 以及 β 粒子的最大能量 E_m ，通过数值积分即可求得 $f(Z, E_m)$ ，从而由式即得衰变常量 λ 或半衰期 $T_{1/2}$ 。 $f(Z, E_m)$ 值，已制成曲线和表，应用时只要查阅图表即可。

当 $E_m \gg m_e c^2$ ，并取 $F(Z, E) \approx 1$ 时，

$$f(Z, E_m) = \text{常数} \times E_m^5$$

从而

$$T_{1/2} \propto 1/E_m^5 \text{ 或 } \lambda \propto E_m^5$$

历史上曾把这一关系称为萨晋(Sargent)定律。

仅仅半衰期不能反映跃迁类型的特征。

2. 比较半衰期

为了反映出不同跃迁类型的特征，下面引入比较半衰期。

Scaling

Comparative Half-Lives

$$fT_{1/2} \approx \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 g^2 |M_{if}|^2}$$

$fT_{1/2}$ 称为比较半衰期。由式可见， $fT_{1/2}$ 值与跃迁矩阵元的绝对值平方 $|M_{if}|^2$ 成反比，而 $|M_{if}|^2$ 的大小对容许跃迁和不同级次的禁戒跃迁有很大差别，从而 $fT_{1/2}$ 值可用来比较跃迁的级次。

对于容许跃迁，

$$fT_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 g^2 |M|^2}$$

式中 M 为原子核矩阵元。它决定于母核与子核的波函数。若母核和子核的波函数很相象，两者几乎重叠，则 $|M|^2$ 的值接近于 1；需要考虑因不同同位旋态的结合给出附加因子时， $|M|^2$ 就接近另一整数，例如 $0^+ \rightarrow 0^+$ 跃迁的 $|M|^2 \approx 2$ 。对于镜象核，由于它们的波函数很相象，所以镜象核之间的 β 跃迁，其矩阵元最大，因而 $fT_{1/2}$ 值最小。凡母核与子核的波函数很相象的跃迁，称为超容许跃迁。

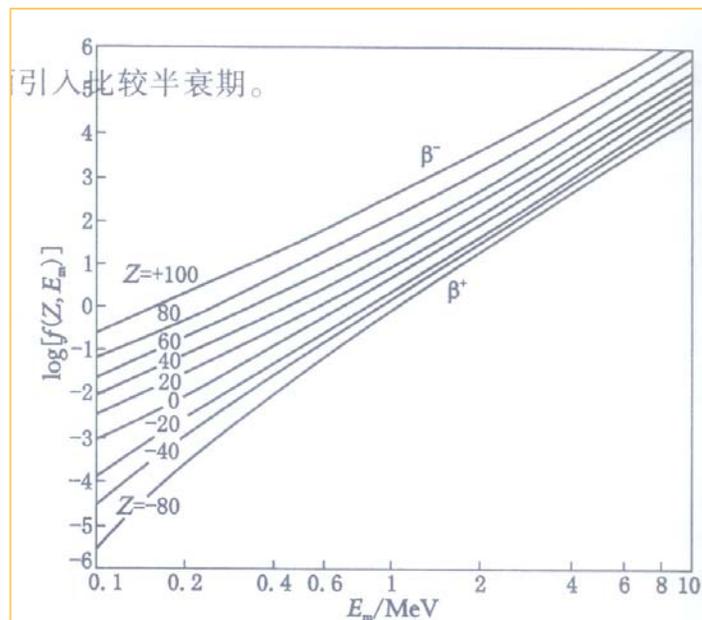


图 6-20 函数 $f(Z, E_m)$

(Z 的正负号分别表示 β^- 和 β^+ 衰变情形)

表 6-1 一些超容许跃迁

衰变方式	半衰期 $T_{1/2} / \text{s}$	$fT_{1/2} / \text{s}$
${}^1_0\text{n} \xrightarrow{\beta^-} {}^1_1\text{H}$	637	1115
${}^3_1\text{H} \xrightarrow{\beta^-} {}^3_2\text{He}$	3.87×10^8	1131
${}^{14}_8\text{O} \xrightarrow{\beta^+} {}^{14}_7\text{N}^*$	71.36	3127
${}^{26\text{m}}_{13}\text{Al} \xrightarrow{\beta^+} {}^{26}_{12}\text{Mg}$	6.374	3086
${}^{34}_{17}\text{Cl} \xrightarrow{\beta^+} {}^{34}_{16}\text{S}$	1.565	3140
${}^{50}_{25}\text{Mn} \xrightarrow{\beta^+} {}^{50}_{24}\text{Cr}$	0.286	3125

即为 10^3 的数量级。

对于一般的容许跃迁，原子核的质量大多在中等以上。此时由于库仑斥力的影响，质子和中子所占有的量子状态不很相同，母核和子核的波函数将相似得较少。因而跃迁矩阵元 $|M|^2$ 就要比超容许跃迁情形小一些，而 $fT_{1/2}$ 值就要大一些，一般在 10^5 的数量级。

表 6-2 一些容许跃迁

衰变方式	$fT_{1/2} / \text{s}$
${}^{80}_{35}\text{Br} \xrightarrow{\beta^-} {}^{80}_{36}\text{Kr}$	3.2×10^5
${}^{106}_{47}\text{Ag} \xrightarrow{\beta^+} {}^{106}_{46}\text{Pd}$	7.9×10^4
${}^{188}_{54}\text{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{188\text{m}}_{55}\text{Cs}$	4.5×10^5
${}^{134}_{57}\text{La} \xrightarrow{\beta^+} {}^{134}_{56}\text{Ba}$	6.3×10^4
${}^{191}_{76}\text{Os} \xrightarrow{\beta^-} {}^{191\text{m}}_{77}\text{Ir}$	1.6×10^5

对于禁戒跃迁，当跃迁级次相差一个单位时， $|M_{if}|$ 一般相差一、二个数量级，故相邻级次的 $fT_{1/2}$ 值一般要相差三、四个数量级。跃迁级次越高， $fT_{1/2}$ 值也越大。

因为 $fT_{1/2}$ 值都是很大的数，而且变化范围很广，所以通常使用 $\log fT_{1/2}$ 值。一般衰变纲图中分支比后面括号中的数即为 $\log fT_{1/2}$ 值。

表 6-3 各级跃迁的 $\log fT_{1/2}$ 值

跃 迁 级 次	$\log fT_{1/2}$
超容许跃迁	2.9~3.7
容许跃迁	4.4~6.0
一级禁戒（非唯一型）	6~9
一级禁戒（唯一型）	8~10
二级禁戒	10~13
三级禁戒	15~18

表 6-4 一些禁戒跃迁的 $\log fT_{1/2}$ 值

跃 迁 级 次	$\text{Log} fT_{1/2}$	禁 戒 级 次
$^{39}\text{Ar} \xrightarrow{\beta^-} ^{39}\text{K}(7/2^- \rightarrow 3/2^+)$	9.03	一级
$^{38}\text{Cl} \xrightarrow{\beta^-} ^{38}\text{Ar}(2^- \rightarrow 0^+)$	8.15	一级
$^{22}\text{Na} \xrightarrow{\beta^+} ^{22}\text{Ne}(3^+ \rightarrow 0^+)$	11.9	二级
$^{10}\text{Be} \xrightarrow{\beta^-} ^{10}\text{B}(0^+ \rightarrow 3^+)$	12.08	二级
$^{40}\text{K} \xrightarrow{\beta^-} ^{40}\text{Ca}(4^- \rightarrow 0^+)$	18.1	三级

利用 $\log fT_{1/2}$ 值还可以定出 β 衰变的常量 g 。为了定出常量 g ，必须知道矩阵元 $|M|$ 的大小。在一般情况下， β 衰变中 F 相互作用和 G-T 相互作用都存在

$$fT_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 (g_F^2 |M_F|^2 + g_{GT}^2 |M_{GT}|^2)}$$

由此式可见，特定常量有两个： g_F 和 g_{GT} 。因此至少需要两个实验才能定出它们。为了便于比较精确地计算出原子核矩阵元，取镜象核之间的跃迁是最有利的，这是因为镜象核的波函数很相象。历史上常取最简单的一个镜象核之间的跃迁，即中子的 β 衰变作为实验。在这一跃迁中，母核和子核波函数就是中子和质子的波函数，它们都是自由粒子，所以原子核矩阵元可以精确计算。关键问题是精确测定中子的半衰期，其较新的实验数据是

$$T_{1/2} = 10.61 \pm 0.16 \text{ min}$$

从而得到比较半衰期

$$fT_{1/2} = 1115 \text{ s}$$

因为中子的 β 衰变是 $\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$ 的跃迁，所以衰变中 F 相互作用和 G-T 相互作用同时出现。理论计算给出，此时

$$|M_F|^2 = 1, \quad |M_{GT}|^2 = 3$$
$$g_F^2 + 3g_{GT}^2 = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4} \times \frac{1}{1115}$$

决定常量 g 的另一实验常取 $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^*$ 的跃迁。它是 $0^+ \rightarrow 0^+$ 跃迁，因此只有 **F** 相互作用

$$g_{\text{F}}^2 |M_{\text{F}}|^2 = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4} \frac{1}{fT_{1/2}}$$

关于 $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^*$ 衰变的较新的实验数据是

$$T_{1/2} = 71.36\text{s}$$

$$fT_{1/2} = 3127\text{s}$$

对于 $0^+ \rightarrow 0^+$ 跃迁， $|M_{\text{F}}|^2 = 2$ 。于是

$$2g_{\text{F}}^2 = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4} \times \frac{1}{3127}$$

最后得

$$\frac{|g_{\text{GT}}|}{|g_{\text{F}}|} = 1.24$$

可见 **G-T** 相互作用（即 **A** 相互作用）常量是 **F** 相互作用（即 **V** 相互作用）常量的 **1.24** 倍。

为了得到 g 的可靠的数值，可由若干个 $0^+ \rightarrow 0^+$ 跃迁的实验数据平均导出。利用 ^{14}O ， ^{26}Al 和 ^{34}Cl 的 $fT_{1/2}$ 值，得出弱相互作用常量 g 的数值为：

$$g = 1.415 \times 10^{-62} \text{J} \cdot \text{m}^3$$

这个常量很小，说明电子中微子场与核子的相互作用是相当弱的，这也说明了 β 衰变过程为什么比 γ 衰变过程慢以及为什么很少观察到激发态的 β 衰变。

$$I(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_f^* H \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}$$

$$I(p)dp = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} F(Z, E) (E_m - E)^2 p^2 dp$$

$$M_{if} = \int u_f^* u_i \exp[-i(\vec{k}_\beta + \vec{k}_\nu) \cdot \vec{r}] d\tau$$

选择定则

$$[I(p) / F p^2]^{1/2} = K (E_m - E) [S_n(E)]^{1/2}$$

$$K = g |M_{if}| / (2\pi^3 c^3 \hbar^7)^{1/2}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \int_0^{p_m} I(p) dp \approx \frac{m_e^5 c^4 g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z, E_m)$$

$$f T_{1/2} \approx \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 g^2 |M_{if}|^2}$$

$$f(Z, E_m) = \int_0^{p_m} F(Z, E) \left(\frac{E_m - E}{m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{p}{m_e c} \right)^2 \frac{dp}{m_e c}$$