

§ 2.6 原子核的结合能

1. 能量和质量的一般关系

质能关系式

$$E = mc^2$$

对于静止和运动粒子均成立。对于孤立体系，总能量守恒，也必然地有总质量守恒。

以速度数值为 v 运动的粒子的质量

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

其中 m_0 是粒子的静止质量。当粒子的速度 v 增大时，它的质量 m 也随之增大。引进以速度 v 运动的粒子的动量数值

$$p = mv$$

可以得到

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 = m^2 c^4$$

粒子的动能 E_k

$$E_k = E - m_0 c^2$$

对于运动速度远小于光速 ($v \ll c$) 的经典粒子, 有 $c^2 p^2 \ll m_0^2 c^4$, 可以得到

$$E_k = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\left(1 + \frac{c^2 p^2}{m_0^2 c^4} \right)^{1/2} - 1 \right] \approx \frac{p^2}{2m_0}$$

和经典力学的结论相同。

对于光子, $m_0=0$, 有

$$E_k = E = cp$$

光子的总能量就是它的动能。应当注意, 虽然光子的静止质量为零, 但是光子的质量 $m=E/c^2$ 并不为零, 而由光子的能量 E 所确定。

对于高速电子, $v \sim c$, 它的能量很高, $E \gg m_0 c^2$, 有

$$E_k \approx E \approx cp$$

1g 质量的能量

$$\begin{aligned} E &= mc^2 = 10^{-3} \text{kg} \times [2.99792458 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}]^2 \\ &= 8.98755179 \times 10^{13} \text{ J} \end{aligned}$$

从能量尺度看起来, 这是个很大的量。

原子核的质量通常以原子质量单位 u 为单位。质量为 $1u$ 的能量

$$\begin{aligned} E &= mc^2 = 1.6605402 \times 10^{-27} \text{kg} \times [2.99792458 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}]^2 \\ &= 1.492419 \times 10^{-10} \text{ J} \end{aligned}$$

原子核物理学中，常用电子伏特（eV）作为能量单位。1eV 是一个电子在真空中通过 1V 电位差所获得的动能。

$$1 \text{ eV} = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}, \quad 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}, \quad 1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

$$1 \text{ u} = 931.4943 \text{ MeV}/c^2$$

对于电子，它的静止质量

$$m_e = 5.4858 \times 10^{-4} \text{ u} = 0.51100 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_e c^2 = 511.00 \text{ keV}$$

表 2-2 一些粒子的质量和能量

粒 子	静 止 质 量 m_0/u	能 量 $m_0 c^2/\text{MeV}$
电子 e	0.00054858	0.51100
质子 p	1.007276	938.272
中子 n	1.008665	939.565
氘核 d	2.013553	1875.613
氚核 t	3.015501	2808.921
氦核 α	4.001506	3727.379

2. 质量亏损

组成某一原子核的核子质量和与该原子核质量之差称为原子核的**质量亏损**：

$$\Delta m(Z, A) = Zm_p + (A-Z)m_n - m(Z, A)$$

Mass deficit

实验发现，原子核的质量总是小于组成它的核子的质量和（这里指静止质量） $\Delta m > 0$ 。例

$$\Delta m(^4\text{He}) = (2m_p + 2m_n) - m(^4\text{He})$$

在具体计算中所涉及的质量总是用核素原子的质量，我们用大写字母 $M(Z, A)$ 表示原子质量，

$$M(Z, A) = m(Z, A) + Zm_e - B_e(Z) / c^2$$

其中 $B_e(Z)$ 是电荷数为 Z 的元素的电子结合能。由托马斯—费米（Tomas—Fermi）原子模型

$$B_e(Z) = 15.73Z^{7/3}\text{eV}$$

$B_e(Z) / c^2$ 比起核的质量来是很小的；又由于在计算 Δm 时是算的质量差，相应地也有电子结合能的差。这样，含有 B_e 的项对于计算结果的影响就更小了。在实际计算中，总是略去了电子结合能这一项。于是

$$\begin{aligned}\Delta m(^4\text{He}) &= \Delta M(^4\text{He}) \\ &= 2M(^1\text{H}) + 2m_n - M(^4\text{He}) \\ &= 2(1.007825 + 1.008665) - 4.002603 \\ &= 0.030377\text{u}\end{aligned}$$

对应的能量差是

$$\Delta E(^4\text{He}) = \Delta M(^4\text{He})c^2 = 28.30\text{MeV}$$

因此，质量亏损也可用原子质量表示，

$$\Delta M(Z, A) = ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - M(Z, A)$$

显然对于稳定原子核

$$\Delta M(Z, A) > 0$$

“广义质量亏损”：体系变化前后静止质量之差

$$\Delta M = \sum M_i - \sum M_f$$

式中右边第一项是体系在变化前的静止质量，第二项是体系发生变化后的静止质量。 $\Delta M > 0$ 表示体系变化以后静止质量减少了。相应地，体系动能的变化 $\Delta E > 0$ ，即有能量释放。这种变化称为放能变化。 ΔE 是变化后体系动能与变化前体系动能之差，

$$\Delta E = \sum_f E_f - \sum_i E_i$$

其中 $\sum_f E_f$ 是体系变化后的动能， $\sum_i E_i$ 是体系变化前的动能。

事实上，由于孤立体系的总能量是守恒的，即

$$\sum_i M_i c^2 + \sum_i E_i = \sum_f M_f c^2 + \sum_f E_f$$

则有关系

$$\Delta E = \Delta M c^2$$

对于 $\Delta M < 0$ 的情形，体系变化以后静止质量增大，相应地有 $\Delta E < 0$ ，即要对体系提供能量，这种变化称为吸能变化。

$(M-A)$ ，称为核素的**质量过剩**。 M 是核素的原子质量，以 u 为单位， A 是核素的核子数。 $(M-A)c^2$ ，是质量过剩所对应的**能量**，通常用符号 Δ 表示。
即

$$\Delta(Z, A) \equiv [M(Z, A) - A]c^2$$

Mass excess

这样列表，应用起来较为方便，用质量差计算能量变化时，就省去了单位之间的换算。

表2-3 一些核素的原子质量

元素符号	Z	A	M/u	Δ/MeV
n	0	1	1.008665	8.071
H	1	1	1.007825	7.289
	1	2	2.014102	13.136
He	1	3	3.016049	14.950
	2	3	3.016030	14.931
	2	4	4.002603	2.425
Li	3	6	6.015123	14.087
	3	7	7.016004	14.908
Be	4	9	9.012183	11.348
C	6	12	12.000000	0
	6	14	14.003242	3.020
N	7	14	14.003074	2.863
O	8	16	15.994915	-4.737
Al	13	27	26.981542	-17.194
Fe	26	56	55.934940	-60.604
U	92	235	235.043925	40.916
	92	238	238.050786	47.307

3. 原子核的结合能

自由核子组成原子核所释放的能量称为原子核的结合能。它是原子核整体稳定性的度量。

核素的结合能用 $B(Z, A)$ 表示。相据相对论质能关系，它与核素的质量亏损 $\Delta M(Z, A)$ 的关系是

$$B(Z, A) = \Delta M(Z, A)c^2$$

对于 ${}^4\text{He}$

$$B({}^4\text{He}) = \Delta M({}^4\text{He})c^2 = 28.30\text{MeV}$$

两个质子、两个中子结合成一个氦核，要放出 **28.30MeV** 的能量。将 ${}^4\text{He}$ 核拆成自由的核子，为了克服核子之间的作用力，要用 **28.30MeV** 的能量对体系做功。

可以由核素的原子质量来计算原子核的结合能。

$$B(Z, A) = [ZM({}^1\text{H}) + (A - Z)m_n - M(Z, A)]c^2$$

也可以写成

$$B(Z, A) = Z\Delta({}^1\text{H}) + (A - Z)\Delta(\text{n}) - \Delta(Z, A)$$

一般地说，核子数 A 大的原子核结合能 B 也大。

原子核平均每个核子的结合能又称为比结合能，用 ε 表示。

$$\varepsilon = B/A$$

比结合能表示，若把原子核拆成自由核子，平均对于每个核子所要做的功。比结合能 ε 的大小可用以标志原子核结合得松紧的程度。

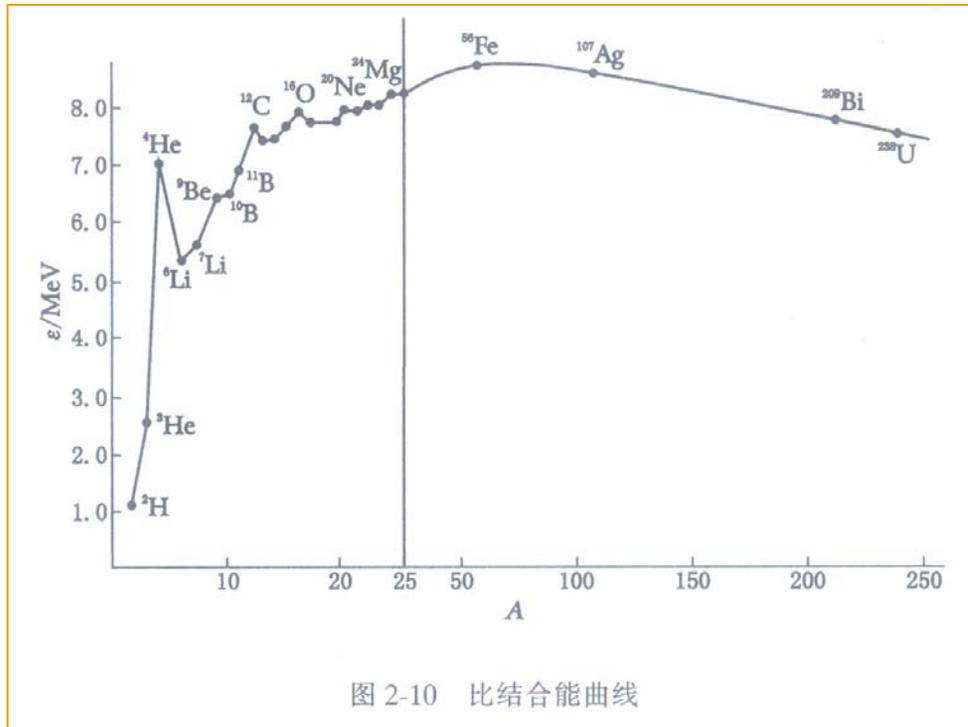
表 2-4 一些核素的结合能和比结合能

核素	结合能 B/MeV	比结合能 ε/MeV
^2H	2.224	1.112
^3He	7.718	2.573
^4He	28.30	7.07
^6Li	31.99	5.33
^7Li	39.24	5.61
^{12}C	92.16	7.68
^{14}N	104.66	7.48
^{15}N	115.49	7.70
^{15}O	111.95	7.46
^{16}O	127.61	7.98
^{17}O	131.76	7.75
^{17}F	128.22	7.54
^{19}F	147.80	7.78
^{40}Ca	342.05	8.55
^{56}Fe	492.3	8.79
^{107}Ag	915.2	8.55
^{129}Xe	1087.6	8.43
^{131}Xe	1103.5	8.42
^{132}Xe	1112.4	8.43
^{208}Pb	1636.4	7.87
^{235}U	1783.8	7.59
^{238}U	1801.6	7.57

4. 比结合能曲线

对于稳定的核素X，以 ε 为纵坐标， A 为横坐标作图，可以联成一条曲线，称为比结合能曲线。

- (1) 当 $A < 30$ 时，上升,起伏,可能存在 α 粒子的集团结构。
- (2) 当 $A > 30$ 时， $\varepsilon \approx 8\text{MeV}$ 。即 $B \propto A$ 。
- (3) 曲线的形状是中间高，两端低：(a)重核的裂变；(b)轻核的聚变，



核作用的
饱和性

北京大学恢复等离子体学科和推动聚变研究进展情况

北京大学聚变研究筹备组，2006.2.24.

一、历史

1957年5月，“国际受控热核反应与等离子体学术会议”在意大利召开，我国派出搞实验的李整武先生和搞理论的胡济民先生（北大）参加。后来我国逐步发展等离子学科。北大物理系赵凯华、黄云、夏梦芬等，技术物理系胡济民、郑春开，地球物理系蒲祖荫等，都长期在等离子体物理界工作并有很大贡献。但物理系及技术物理系几年前在老教师退休后基本上中断了这一学科。

两年前，九院张维岩、常铁强、方勤学等来北大推动ICF的理论工作。

二、最近的进展

1. 酝酿

2005年9月，开始考虑陈骝教授等在浙大的国际会议上提出的推动国内等离子体学科恢复发展的建议。

2005年9月24日，北大物理学院在翠宫饭店召开内部“十一五”发展务虚会，一致认为应该推动恢复发展等离子体学科。

2005年10月8日，北大在西郊宾馆举行研讨会，大连工学院王晓钢教授到会介绍情况，北大常务副校长林建华、校长助理李晓明和科研部领导参加，物理学院、地空学院、力学系得有关领导和老师参加。会上，学校领导和大家都认为应该推动等离子体学科的发展和聚变研究中心的建立。随后设立了李晓明、叶沿林、周辉牵头的筹备组，开始工作。

2. 交流活动

2005年10月后，与海外相关学者一致保持密切联系。

2005年11月5-6日，北大代表团访问585所。

2005年12月9日，贺贤土先生来北大做报告。

2005年12月11-12日，北大代表团访问中科院合肥等离子体所。

2006年2月24日，由学校科研部邀请国家科技部ITER办公室罗德隆处长一行到北京大学物理学院，就北大参与聚变研究的背景和前景进行了座谈交流。

2006年3月7日，北大筹备组拜访了正在参加全国政协会的霍裕平院士（ITER中国专家组组长），汇报北大相关情况。



3. 启动人才培养和队伍建设

在2005年10月22日美国APS/DPP会议上发布招聘教授、副教授广告。

2005年11月30日，物理学院工作会议，安排刘玉鑫、樊铁栓、冒亚军、徐仁新4位教授开始招收等离子体方向的研究生；在海外提供的方案基础上初步确定等离子研究生课程计划；安排教师准备课程。初步安排未来聚变模拟中心访问学者工作地点。

2006年1月，申报聘请王晓钢为北大兼职教授、陈骝为北京大学客座教授，准备协助申报林志宏为长江讲座教授。

三、下一步工作

1. 2006年5月15-19日在北大举行“the workshop on China ITER simulation initiative (CISI)”，会议由合肥等离子所、四川585所、大连工学院、北大共同主办，北大承办。（audiences and volunteers?）

2. 北大将在2006年秋季开始对本科生四年级开设等离子入门课程，对研究生开设系列专业课程，目前正由蒲祖荫老师牵头抓紧准备。

3. 加强与领导部门和各方面联络，开始筹备在校内成立“北大聚变研究中心（Center for Fusion Studies, PKU）”，争取得到国家和各方面支持。

5. 最后一个核子的结合能

一个自由核子与核的其余部分组成原子核时，所释放的能量，称为最后一个核子的结合能。

从原子核中分离出一个核子所要给予的能量，称为原子核的一个核子分离能。两者在数值上是相等。

原子核最后一个核子结合能的大小，反映了这种原子核相对邻近的那些原子核的稳定程度，通常是一种量子现象。

核素最后一个中子的结合能，是核素 ${}^A_Z\mathbf{X}_N$ 中第 N 个中子的结合能，即

$$\begin{aligned} S_n(Z, A) &= [M(Z, A-1) + m_n - M(Z, A)]c^2 \\ &= \Delta(Z, A-1) + \Delta(n) - \Delta(Z, A) \end{aligned}$$

也可以由两个同位素 ${}^A_Z\mathbf{X}$ 与 ${}^{A-1}_Z\mathbf{X}$ 的结合能之差算出，

$$S_n(Z, A) = B(Z, A) - B(Z, A-1)$$

核素最后一个质子的结合能，是核素 ${}^A_Z\mathbf{X}_N$ 中第 Z 个质子的结合能，即

$$\begin{aligned} S_p(Z, A) &= [M(Z-1, A-1) + M({}^1\text{H}) - M(Z, A)]c^2 \\ &= \Delta(Z-1, A-1) + \Delta({}^1\text{H}) - \Delta(Z, A) \end{aligned}$$

同理，也可以得出

$$S_p(Z, A) = B(Z, A) - B(Z-1, A-1)$$

例

$$S_p(^{17}\text{F})=B(9,17)-B(8,16)=0.61\text{MeV}$$

$$S_p(^{16}\text{O})=B(8,16)-B(7,15)=12.12\text{MeV}$$

$$S_n(^{16}\text{O})=B(8,16)-B(8,15)=15.66\text{MeV}$$

$$S_n(^{17}\text{O})=B(8,17)-B(8,16)=4.15\text{MeV}$$

对于上述一些原子核，最后一个核子的结合能有巨大的差别，这表明， ^{16}O 与邻近的原子核 ^{17}O 、 ^{17}F 等相比，稳定性要大得多。

晕核：

$${}^6\text{He} : S_n = 1.84 \text{ MeV}; S_{2n} = 0.973 \text{ MeV}, S_p = 28.2 \text{ MeV}$$

$${}^{11}\text{Li} : S_n = 0.72 \text{ MeV}; S_{2n} = 0.306 \text{ MeV}; S_p = 15.3 \text{ MeV}$$

$${}^{11}\text{Be} : S_n = 0.504 \text{ MeV}; S_p = 20.55 \text{ MeV}$$

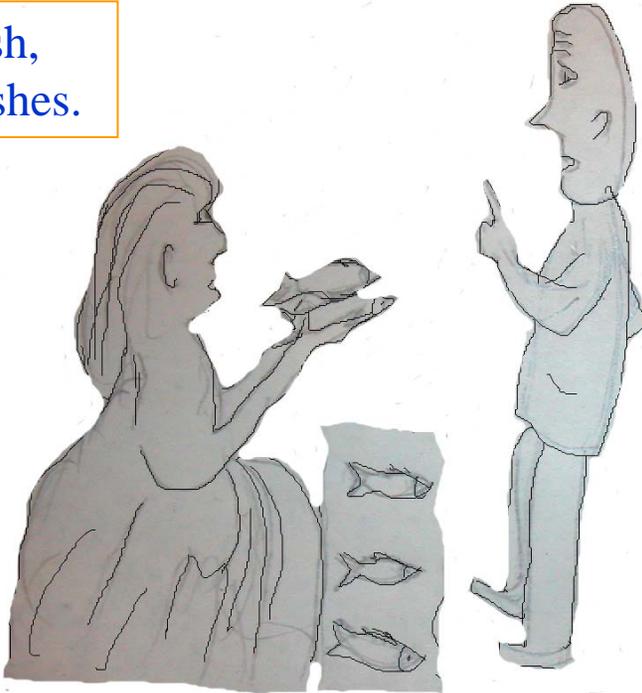
$${}^{14}\text{B} : S_n = 0.973 \text{ MeV}; S_p = 18.8 \text{ MeV}$$

$${}^{17}\text{Ne} : S_p = 1.479 \text{ MeV} \quad S_{2p} = 0.943 \text{ MeV}$$

Deal of Transfer

But I want to
buy one by one!

1.8 ¥ for one fish,
0.9 ¥ for two fishes.



⁶He:

$$S_{1n} = 1.867 \text{ MeV};$$

$$S_{2n} = 0.973 \text{ MeV};$$

$$S_{1n+1n}?$$

§ 2.7 原子核稳定性的经验规律

有些原子核是稳定的，如 ^1H 、 ^2H 、 ^{12}C 、 ^{133}Cs 等。有些原子核是不稳定的，能经过放射粒子而转化为稳定的原子核，例如 ^3H 、 ^{14}C 、 ^{137}Cs 、 ^{210}Po 和 ^{252}Cf 等，可经 β 衰变、 γ 跃迁、 α 衰变和自发裂变等方式转化为稳定的原子核。

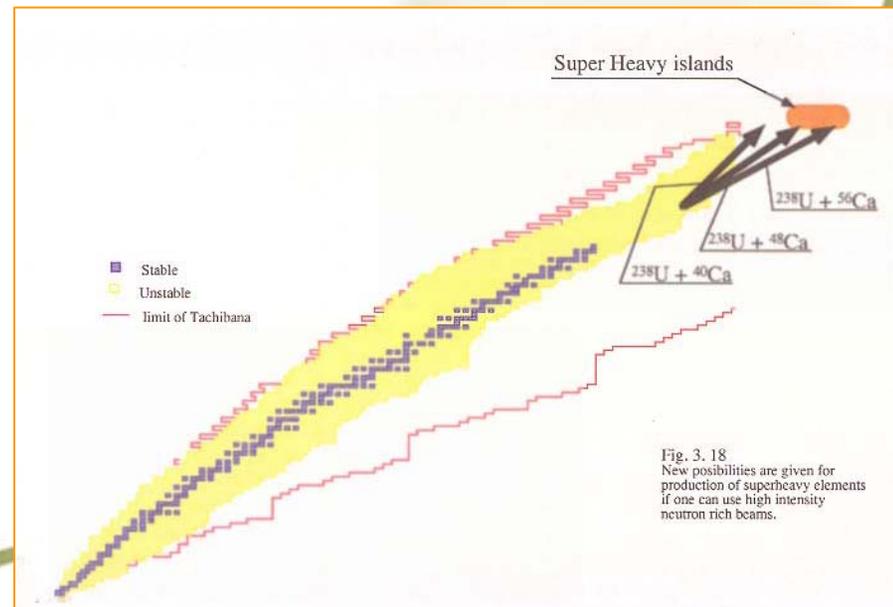
实验上发现的核素已有 2000 多种（预言有约 8000 种），其中只有近 300 种是稳定的。关于原子核的稳定性，由实验上得到了一些经验规律。

1. β 稳定线

在 Z - N 平面上，连接具有 β 稳定性的核素的曲线，称为 β 稳定线。对于 $A < 40$ 的原子核， β 稳定线近似为直线， $N=Z$ ，即中子数 N 与质子数 Z 之比（中质比）， $N/Z=1$ 。对于 $A > 40$ 的原子核， β 稳定线的中质比 $N/Z > 1$ 。对于 ^{208}Pb ，它的中质比 $N/Z=1.54$ 。

β 稳定线可用下列经验公式表示，

$$Z = \frac{A}{1.98 + 0.0155 A^{2/3}}$$



在 β 稳定线丰中子一侧的核素，具有 β 放射性。 β 稳定线丰质子一侧的核素具有电子俘获 EC 或 β^+ 放射性。

β 稳定线表示原子核中的核子有中子、质子对称相处的趋势，即中子数 N 和质子数 Z 相等的核素具有较大的稳定性。这种效应在轻核中很显著。对于重核，核内质子数增多，库仑排斥作用增大了，要构成稳定的原子核就需要含有更多的中子以抵消库仑排斥作用。随着质量数 A 的增大，具有 β 稳定性的核素，它的中质比也逐渐地增大。

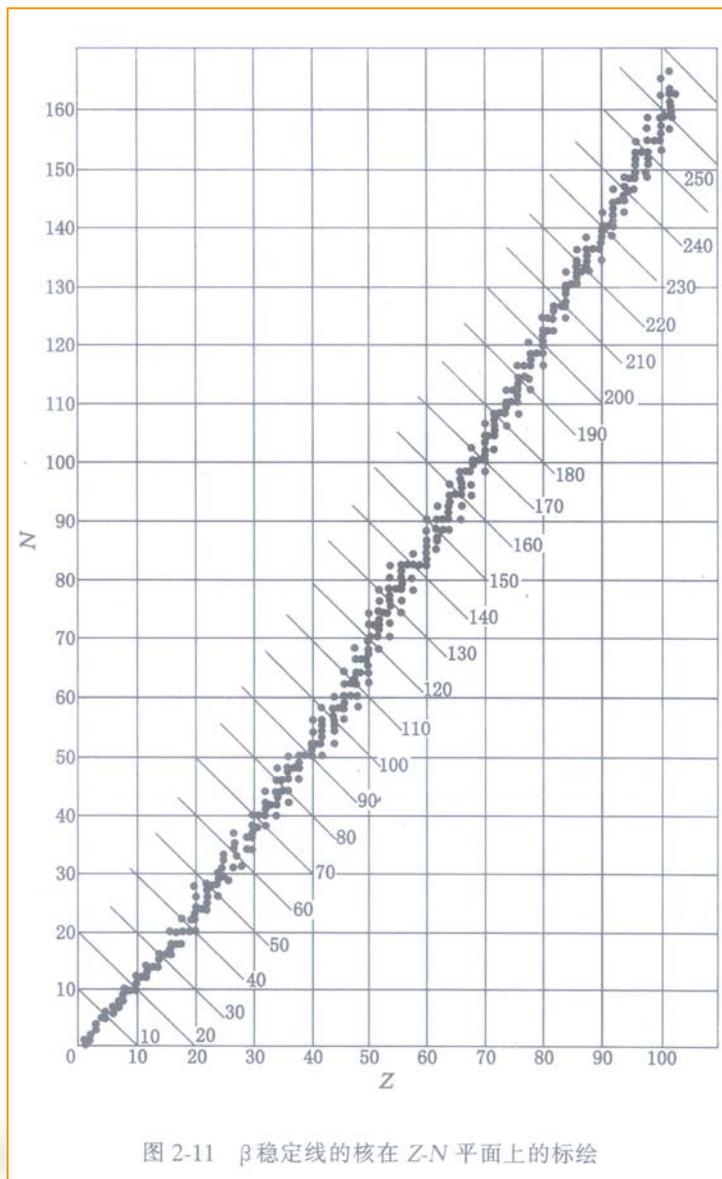


图 2-11 β 稳定线的核在 Z - N 平面上的标绘

2. 核子数的奇偶

对于近 300 种稳定的核素，可以按质子数 Z 、中子数 N 的奇偶分类，见表 2-5。偶数以 e 表示 (even)，奇数以 o 表示 (odd)。

表 2-5 稳定核素的奇偶分类表

Z	N	名 称	稳定核素数目
E	e	偶偶核	156
E	o	偶奇核	48
O	e	奇偶核	50
O	o	奇奇核	5
合		计	259

从表中可以看到，在稳定的核素中有一大半是偶偶核。而奇奇核只有 5 种，即 ${}^2\text{H}$ ， ${}^6\text{Li}$ ， ${}^{10}\text{B}$ ， ${}^{14}\text{N}$ 以及丰度较小的 ${}^{180\text{m}}_{73}\text{Ta}$ 。奇 A 核有质子数为奇数和中子数为奇数的两类，稳定核素的数目差不多，介于稳定的偶偶核和奇奇核的数目之间。这表明质子、中子各有配对相处的趋势。

3. 重核的不稳定性

另外，实验发现，能发生 α 衰变的天然放射性核素都是一些重核，其中最轻的是 ^{142}Ce ，很重的核几乎都具有 α 放射性。能够发生自发裂变的核素也都是些很重的核。

自然界存在最重的一些核素是 ^{235}U ， ^{238}U 和极少量的 ^{244}Pu ，而且它们都是放射性的。这表明重核的稳定性差。但是理论上预言，在 $Z=114$ ， $N=184$ 附近可能存在超重的稳定岛。

原子核的稳定性可以通过广义质量亏损来判断，显然，只有广义质量亏损 $\Delta M > 0$ 时，原子核的变化才有可能自发进行。

§ 2.8 原子核的液滴模型

原子核是由中子、质子（统称核子）组成的量子多体系统。由于核子之间的相互作用还不很清楚，在数学方法上也有困难，对原子核的研究常用一种唯象的方法——模型法。

模型：以一定物理概念为基础对一定范围的实验事实进行归纳所得的理论描写。模型通常含有一定数目的参数，需要由实验定出。模型具有一定的预言能力。

模型法是物理学研究的一种重要方法，在科学研究中广为应用。

1. 液滴模型的实验根据

液滴模型是早期的一种原子核模型，它将原子核比作一个液滴，将核子比作液体中的分子，主要的实验根据有两个。

一是从比结合能曲线看出，原子核平均每个核子的结合能几乎是常数，即 $B \propto A$ 。说明核子间的相互作用力具有饱和性(短程)，否则 B 将近似地与 A^2 成正比。这种饱和性与液体中分子力的饱和性类似。

二是从原子核的体积近似地正比于核子数的事实知道，核物质密度几乎是常数，表示原子核是不可压缩的(排斥芯)，这与液体的不可压缩性类似。由于质子带正电，原子核的液滴模型把原子核当作荷电的液滴。

2. 体积能、表面能和库仑能

根据液滴模型，原子核的结合能 B 主要包含体积能 B_v 、表面能 B_s 和库仑能 B_c 三项，

$$B = B_v + B_s + B_c$$

体积能 B_v 是结合能 B 的主要项，它与原子核的体积 V 成正比，也就是与组成原子核的核子数 A 成正比。

$$B_v = a_v A$$

$$\text{长程作用: } B \propto \frac{A(A-1)}{2} \approx A^2$$

其中 a_v 是正的常量。

核子只受到内部核子的作用，比原子核内部的核子所受的作用要小些。在结合能中应该考虑表面核子与内部核子的差别，进行修正。可以把表面核子的结合能与液体的表面张力作用相比。球形核的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi r_0^2 A^{2/3}$ ，则

$$B_s = -\sigma 4\pi r_0^2 A^{2/3}$$

其中 σ 称为原子核的表面张力系数。上式可以写成

$$B_s = -a_s A^{2/3}$$

其中 $a_s = \sigma A \pi r_0^2$ ，是个正的常量。式中的负号表示表面能的作用与体积能的作用相反。表面能的作用是使原子核有尽可能小的表面积。体积一定，有最小表面积的几何体是球体。

质子间的静电相互作用对于结合能的贡献，称为**库仑能** B_c 。对于球形核，如果质子在核内是均匀分布的，电荷密度写作

$$\rho = \begin{cases} Ze / (\frac{4}{3} \pi R^3) & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

可以算得

$$B_c = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2}{5r_0} Z^2 A^{-1/3}$$

或者写成

$$B_c = -a_c Z^2 A^{-1/3}$$

其中 $a_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2}{5r_0}$ 是个常量；式中的负号表示质子间的库仑作用是相斥的，使原子核的结合能减小。

如果核的结合能仅仅有上面三项：对于确定的 A 值，最稳定的原子核几乎全由中子组成？

在结合能公式中，还应该包含原子核稳定性的经验规律中所反映出的特点：核子间有中子、质子对称相处的趋势，有一项对称能 B_a ；同类核子有配对相处的趋势，还有一项对能 B_p 。

§ 2.9 原子核结合能的半经验公式

1. 对称能和对能

从 β 稳定线的讨论知道，原子核内的中子和质子有对称相处的趋势。对称能可以写成

$$B_a = -a_a \left(\frac{A}{2} - Z \right)^2 A^{-1}$$

其中， $A=N+Z$ ， a_a 是正的常量；负号表示使结合能减少。

对称能是一项量子效应。根据泡利不相容原理，在中子、质子对称相处的情形下，能填充的单粒子能级更低些。但是，在重核中库仑作用的效应增大。两者竞争的结果，在稳定的核素中，中质比随 A 增大。

在原子核的组成中，有中子、质子各自成对相处的趋势。同类核子成对相处时结合能增大。

$$B_p = \delta a_p A^{-1/2}$$

其中

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{偶偶核} \\ 0 & \text{奇A核} \\ -1 & \text{奇奇核} \end{cases}$$

$a_p > 0$ ，是个常量。奇A核（包括奇偶核和偶奇核）的对能为零，作为对能的能量参考点。核素对能项的效应随着核子数A的增大而减弱。

对能也是一种量子效应。全同费米子的波函数是交换反对称的。当成对同类核子相距很近，它们的空间波函数对称而自旋波函数反对称时，这样的成对核子有很强的吸引作用。所以，成对核子的总自旋为零时，附加的对能使结合能增大。

2. 结合能半经验公式

基于液滴模型，并考虑了对称能和对能，球形原子核的结合能半经验公式是

$$B(Z, A) = B_v + B_s + B_c + B_a + B_p$$
$$= a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-1/2}$$

其中的各个常量 a ，是由此公式与很多原子核基态的结合能数据作最佳拟合定出的参量。虽然液滴模型给出的式中各项有明确的物理意义，但是系数 a 一般不能由理论本身导出，而依赖于实验数据。这样得到的公式是半经验公式，首先由魏茨泽克（Weizsäcker）在 1935 年提出。有一组参量是

$a_v = 15.835$ MeV	$a'_v = 0.017000$ u
$a_s = 18.33$ MeV	$a'_s = 0.01968$ u
$a_c = 0.714$ MeV	$a'_c = 0.000767$ u
$a_a = 92.80$ MeV	$a'_a = 0.09962$ u
$a_p = 11.2$ MeV	$a'_p = 0.012$ u

数值大小的含义？

表 2-6 结合能的计算结果 (单位: MeV)

核 素	⁴⁰ Ca	¹⁰⁷ Ag	²³⁸ U
B_v	633.4	1694.4	3768.7
B_s	-214.4	-413.1	-704.0
B_c	-83.5	-332.2	-975.2
B_a	0	-36.6	-284.3
B_p	1.8	0	0.7
B	337.3	912.5	1805.9
B'	342.1	915.2	1801.6

3. 应用举例

(1) 核素的质量

由核素的结合能 $B(Z, A)$ 和质量 $m(Z, A)$ 的关系

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - B(Z, A) / c^2$$

可以得到核素的原子质量

$$M(Z, A) = ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - B(Z, A) / c^2$$

$$M(Z, A) = ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - a'_v A + a'_s A^{2/3} + a'_c Z^2 A^{-1/3}$$

$$+ a'_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} - \delta a'_p A^{-1/2}$$

式中参量 $a' = a/c^2$ 。计算结果与实验值的比较表明，在总体上两者是符合得很好的。但是，对于很轻的核以及在某些区域如 Z 或 N 为 50、82 等“幻数”附近，计算结果与实验值的差别较大。

(2) 比结合能曲线

利用结合能半经验公式可以计算稳定核的结合能 $B(Z, A)$ ，从而得到比结合能 $\epsilon(Z, A)$ ，并能作出 $\epsilon-A$ 曲线。

比结合能中的体积能项 $\epsilon_v = B_v/A$ 是常数，这是液滴模型的主要特征。表面能项 ($\epsilon_s = B_s/A$) 的数值随 A 减小，这是由于球体越大，表面核子所占的比例就越小的缘故。库仑能项的数值随 A 增大，这是因为 β 稳定线上的核素粗略地有 $Z \propto A$ ，则有 $\epsilon_c = B_c/A$ 近似与 $A^{2/3}$ 成正比。由于 β 稳定线上核素的中质比 N/Z 随 A 增加由 1 上升到 1.5 以上，因而非对称能项 ($\epsilon_a = B_a/A$) 的数值也随 A 增大。图中没有标出对能的贡献。

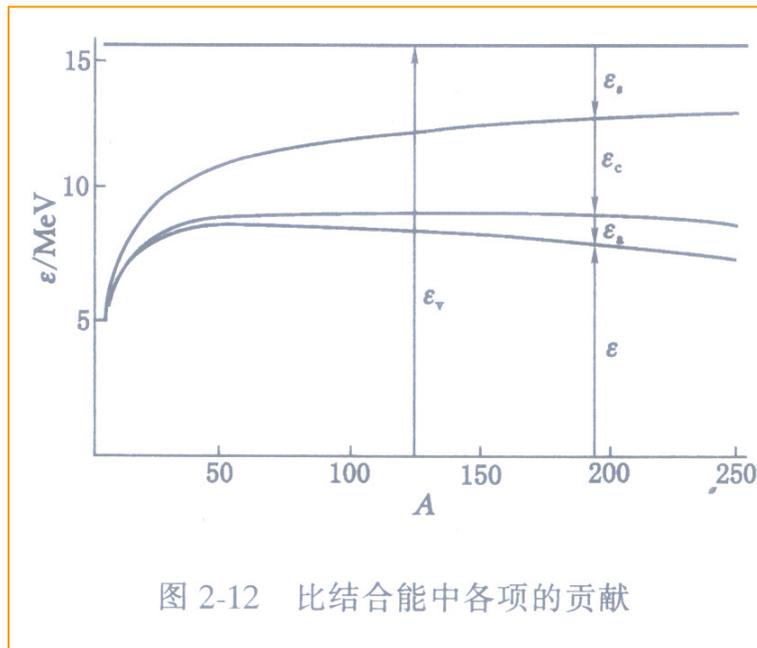


图 2-12 比结合能中各项的贡献

(3) β 稳定线

对于有确定 A 的同量异位素，具有怎样电荷数 Z 的核素是稳定的呢？ β 稳定线上的核素是这一问题的解答。如果把 Z 处理成连续变量，并且暂先略去对能项，那么，满足

$$\frac{\partial M(Z, A)}{\partial Z} = 0$$

的核素是 β 稳定的。 β 稳定的核素其电荷数用 Z_S 表示，则

$$Z_S = \frac{[a'_a + m_n - M(^1\text{H})]A}{2(a'_a + a'_c A^{2/3})}$$

(4) 同量异位素质能抛物线

核素原子质量 $M(Z, A)$ 是 $O-ZAM$ 直角坐标系中的曲面，称为核素的质能曲面。对于一定核子数 A 的同量异位素，质量公式可以改写成 Z 的二次多项式

$$M(Z, A) = K_1 + K_2Z + K_3Z^2 - K_\delta$$

其中

$$K_1 = [m_n - (a'_v - \frac{1}{4}a'_a - a'_s A^{-1/3})]A$$

$$K_2 = -[m_n - M(^1\text{H}) + a'_a]$$

$$K_3 = (a'_a + a'_c A^{2/3})A^{-1}$$

$$K_\delta = \delta a'_p A^{-1/2}$$

对于一定的 A ，质量公式中的 M 与 Z 关系为一条顶点在下的抛物线。曲线上的核素可以经 β^- 或 β^+ 衰变（包括 EC 过程）趋向抛物线的顶点。

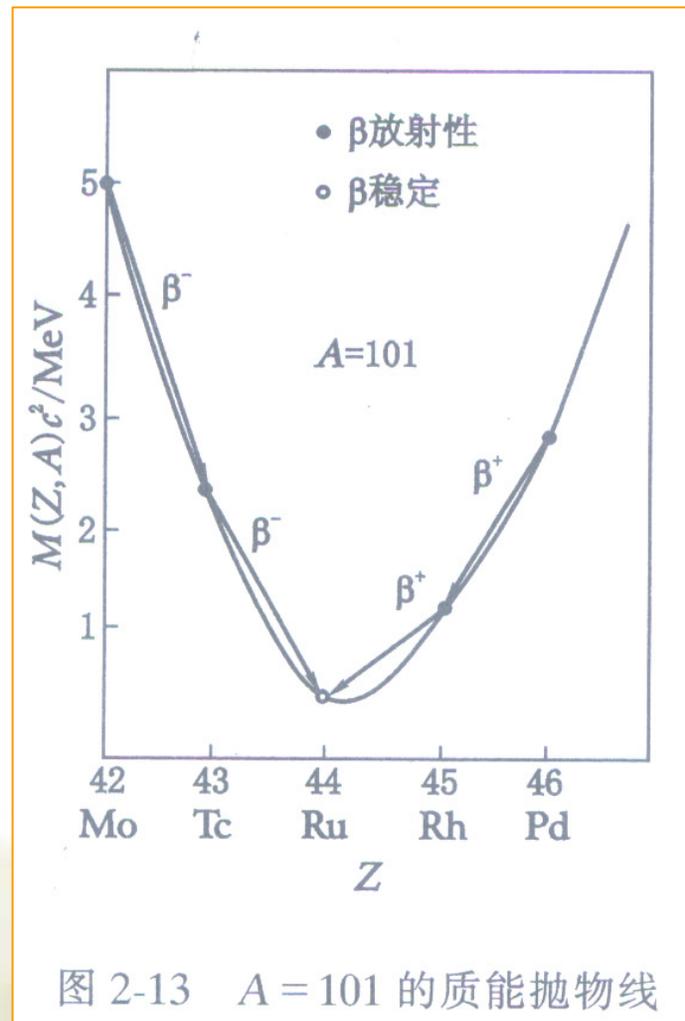


图 2-13 $A=101$ 的质能抛物线

对于奇 A 核,通常只有一个 β 稳定的核素,其质子数 Z 最靠近抛物线的顶点 Z_s 。

对于偶 A 核,由于对能的原因,奇奇核和偶偶核的表示式是不同的。奇奇核与偶偶核的抛物线形状相同,它们的顶点相差 $2K_\delta$ 。 β 衰变是两曲线之间核素的变化,母核是偶偶核的,子核就是奇奇核;母核是奇奇核的,子核就是偶偶核。稳定的核素可以有两个,而且常是偶偶核。

原子核液滴模型公式能够成功地计算原子核基态的结合能和质量,公式中各项的物理意义比较明确,物理图象比较清楚。

可以用液滴形变解释原子核裂变

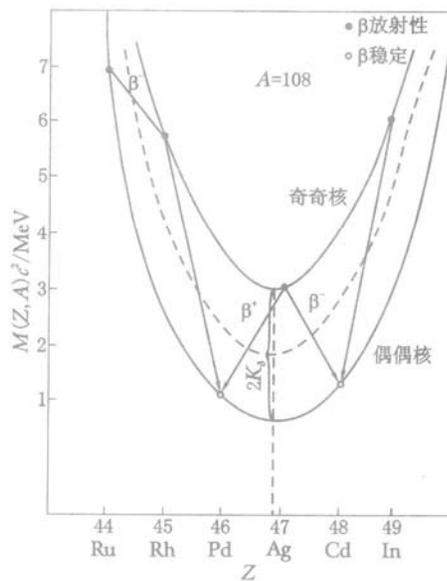


图 2-14 $A=108$ 的质能抛物线

习 题

- 2-1. 已知 ^{224}Ra 的半衰期为 3.66d, 问一天和十天中分别衰变了多少份额? 若开始有 $1\mu\text{g}$, 问一天和十天中分别衰变掉多少原子?
- 2-2. 已知 ^{222}Rn 的半衰期为 3.824d, 问 $1\mu\text{Ci}$ 和 10^3Bq 的 ^{222}Rn 的质量分别是多少?
- 2-3. 已知 ^{210}Po 的半衰期为 138.4d, 问 $1\mu\text{g}$ 的 ^{210}Po , 其放射性活度为多少 Bq?
- 2-4. 用加速氘轰击 ^{55}Mn 来生成 ^{56}Mn , ^{56}Mn 的产生率为 $5\times 10^8\text{s}^{-1}$, 已知 ^{56}Mn 的半衰期为 2.579h, 试求轰击 10h 后 ^{56}Mn 的放射性活度。
- 2-5. 用中子束照射 ^{197}Au 来生成 ^{198}Au , 已知 ^{198}Au 的半衰期为 2.696d, 问照射多久才能达到饱和放射性活度的 95%?
- 2-6. 实验测得纯 ^{235}U 样品的放射性除比度为 $80.0\text{Bq}\cdot\text{mg}^{-1}$, 试求 ^{235}U 的半衰期。
- 2-7. 某种放射性核素既有 α 放射性, 又有 β 放射性, 实验测得 β 射线强度 I_β 随时间 t 的衰减如下表所示, 试求考虑到两种衰变时, 该核素的半衰期。
- | | | | | | | |
|------------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| t / min | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| I_β | 1000 | 795 | 632 | 398 | 251 | 159 |
- 2-8. 假设地球刚形成时, ^{235}U 和 ^{238}U 的相对丰度为 1: 2, 试求地球年龄。
- 2-9. 经测定一出土古尸的 ^{14}C 的相对含量为现代人的 80%, 求该古人的死亡年代。
- 2-10. 已知人体的碳含量为 18.25%, 问体重为 63 公斤的人体相当于活度为多少贝可勒尔和微居里的放射源。
- 2-11. 某一长毛象肌肉样品 0.9mg, 用超灵敏质谱计测量 189 分钟, 得到 $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比值为 $6.98\times 10^{-14}(\pm 7\%)$, 试问该长毛象已死了多少年? 若用放射性法测量, 达到与上法相同精度 ($\pm 7\%$), 至少要测量多长时间?
- 2-12. 试由质量亏损求出下列核素的结合能和比结合能: ^2H , ^{40}Ca , ^{197}Au 和 ^{252}Cf 。
- 2-13. 试由质量亏损求出下列各组核素的结合能: ^3H , ^3He , ^{12}B , ^{12}C , ^{12}N 以及 ^{13}C , ^{13}N 。
- 2-14. ^{130}Te 可以经双 β^- 衰变生成 ^{130}Xe , 试计算此两核素基态的能量差。
- 2-15. 试估算一下, 1 公斤 ^{235}U 吸收中子完全发生裂变可释放多大能量 (能量单位用 MeV)? 相当于多少吨煤燃烧时所释放的能量 (每吨煤燃烧所放出的能量是 $3.4\times 10^{10}\text{J}$)?
- 2-16. 从 ^{13}C 核中取出一个中子或质子, 各需多少能量? 试解释两者有很大差别的原因。
- 2-17. 试由结合能半经验公式 (2.9-4) 计算下列核素的结合能, 并与实验结果比较: ^{40}Ca , ^{56}Fe 和 ^{206}Pb 。
- 2-18. 试由 (2.7-1) 式的 β 稳定线分别确定 ^{57}Ni 和 ^{140}Xe 经 β 衰变生成的 β 稳定性核素, 并分别写出它们的 β 衰变链。
- 2-19. 若有半径为 R 的球带有电量 Q , 分别对下列两种情形计算带电球的库仑能。(1) 电荷均匀分布于球体内; (2) 电荷均匀分布于球表面。
- 2-20. 任何递次衰变系列, 在时间足够长以后, 将按什么规律衰变?
- 2-21. 为什么在三个天然放射系中没有见到 β^+ 放射性和 EC 放射性?
- 2-22. 试证明 N 和 Z 相差为 1 的两个镜像核的结合能为 $a_c A^{2/3}$, 其中 a_c 为结合能半经验公式中库仑项的常量。

❖ Box 2b Neutron star stability (Heyde P.226)

$$a_v A - \frac{1}{4} a_a A + \frac{3}{5} \frac{GM^2}{r_0 A^{1/3}} = 0$$

讨论问题：（1）可否从原子核连续变化到 neutron star？（2）可否组成 proton star？

$$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Jmkg}^{-2} \quad M = AM_n \quad r_0 = 1.2 \text{ fm}$$

$$1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J} \quad M_n = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

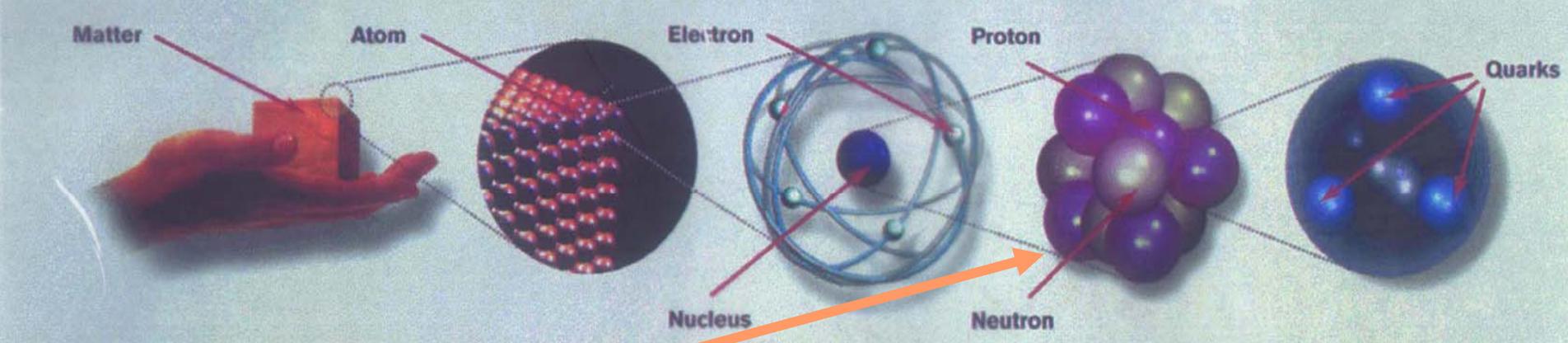
$$\text{得出: } A \cong 5 \times 10^{55} \quad R \cong 4.3 \text{ km} \quad M \cong 0.045 M_\otimes$$

More precise calculations give a value of about $0.1 M_\otimes$

❖ Box 2c Beyond the neutron drip line of stability (Heyde P.227)

(NuPECC long-range-plan-2004)

❖ Box 2d SARS疫情分析及对北京疫情走势的预测

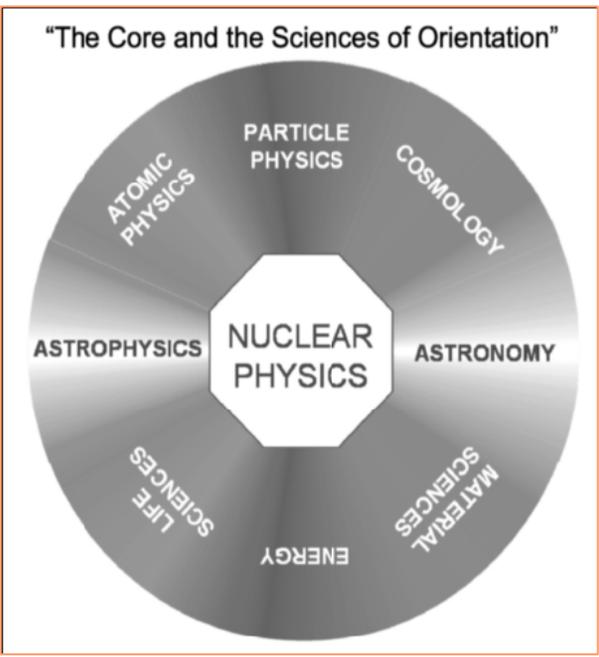
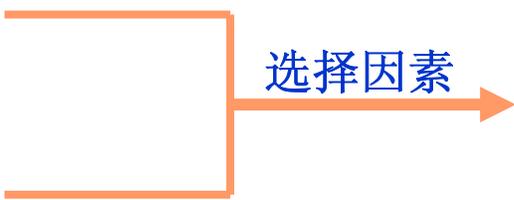


原子核：

- ◆ 强作用量子多体复杂系统
- ◆ 关系能源、国家安全等重大应用
- ◆ 大科学 — 带动先进复杂技术
- ◆ 人才培养 — 科学与技术综合型

主要前沿：

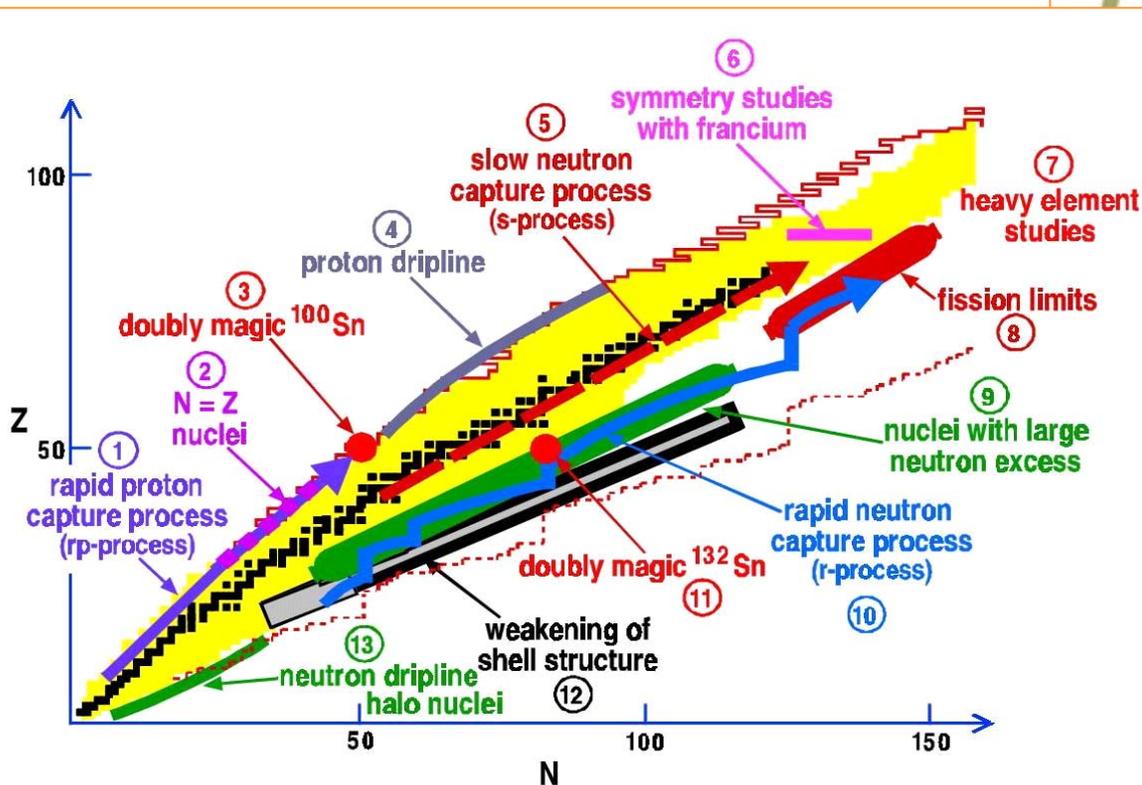
- ◆ 强子物理
- ◆ 放射性核束物理
- ◆ 高温高密核物质
- ◆ 核天体物理
- ◆ 原子核中的基本相互作用与对称性



国际长远学术发展
 国家大科学工程安排
 实验工作和队伍基础
 关联重大应用

Box 2c

放射性核束物理是近**20**年发展起来的核物理新领域，它研究的对象是在新型大科学装置上已经或即将产生的数千个非稳定（**unstable**）也就是弱束缚（**weak-binding**）的核素，而过去近百年只研究了几百个在稳定区附近的核素。在初期的研究中，已经发现了晕结构、集团自组织、新幻数、非线性多中子关联、连续态强耦合、同位旋相变等量子多体的新现象，并观察到反常截面增大、多反应道耦合、集团破裂和转移等新的反应机制和效应。放射性核束物理研究是对广阔的核科学未知领域的探索，正在极大地改变对原子核的传统认识。



与此同时，天体物理的许多重要问题如能量和元素的来源，中子星的结构和冷却，超新星的爆发，都涉及到基本的核物理问题，尤其是弱束缚核的结构和反应。另一方面，天体中的核过程与核聚变等装置中的核过程相似，通过相关研究可以为核能源开发应用等提供重要信息和参考资料。核物理与天体物理的交叉不仅是人类认识天体及宇宙演化过程及规律的重要方式，并且与能源开发和利用、国防安全建设等密切相关。放射性核束物理涉及众多新的核样本和核数据，将在超重核合成、新型核材料、新型核能装置等方面产生难以估量的重大影响。

