

§ 1.4 原子核的电四极矩

在原子核的对称轴 z 上 z_0 点的电势 ϕ :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x', y', z') \frac{d\tau}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \int_V \frac{d\tau}{R}$$

式中 ϵ_0 是真空中介电常数; $\rho(x', y', z')$ 是核内 $P(x', y', z')$ 点周围体 $d\tau$ 中的电荷密度, 假设核内电荷 ρ 为常数, 可将它提到积分号外, 积分限是原子核体积 V 。

由于

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{z_0^2 + r'^2 - 2z_0 r' \cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{z_0^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$P_l(\cos\theta)$ 是勒让德多项式:

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1)$$

.....

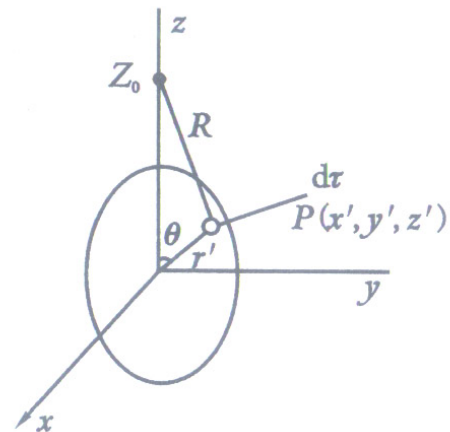


图 1-5 原子核产生的电势

则

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{l+1}} \rho \int_V r'^l P_l(\cos\theta) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{z_0} \rho \int_V d\tau + \frac{1}{z_0^2} \rho \int_V r' \cos\theta d\tau + \frac{1}{2z_0^3} \rho \int_V r'^2 (3\cos^2\theta - 1) d\tau + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Ze}{z_0} + \frac{1}{z_0^2} \rho \int_V z' d\tau + \frac{1}{2z_0^3} \rho \int_V (3z'^2 - r'^2) d\tau + \dots \right\}\end{aligned}$$

式中第一项是单电荷的电势，即核的总电荷集中于核中心时所产生的电势，或者说电荷为球对称分布时所产生的电势；第二项是偶极子的电势；第三项是四极子的电势；以后各项可以忽略。

由于宇称守恒，原子核的奇数阶电多极矩为 $\mathbf{0}$ 。

定义 $\int_V \rho z' d\tau$ 为电偶极矩。原子核的电偶极矩为 $\mathbf{0}$ 。

定义

$$Q = \frac{1}{e} \int_V \rho (3z'^2 - r'^2) d\tau$$

$$Q(I, M) = \int \Psi_I^{*M}(\vec{r}) (3z'^2 - r'^2) \Psi_I^M(\vec{r}) d\tau$$

为核的电四极矩，它有面积的量纲。

注：对不在对称轴上的点的电势，上述分析也成立。

四极子电势与电荷分布的形状密切相关，电四极矩成为原子核的重要特性之一。

设椭球对称轴的半轴为 c ，另外两个半轴为 a ，则

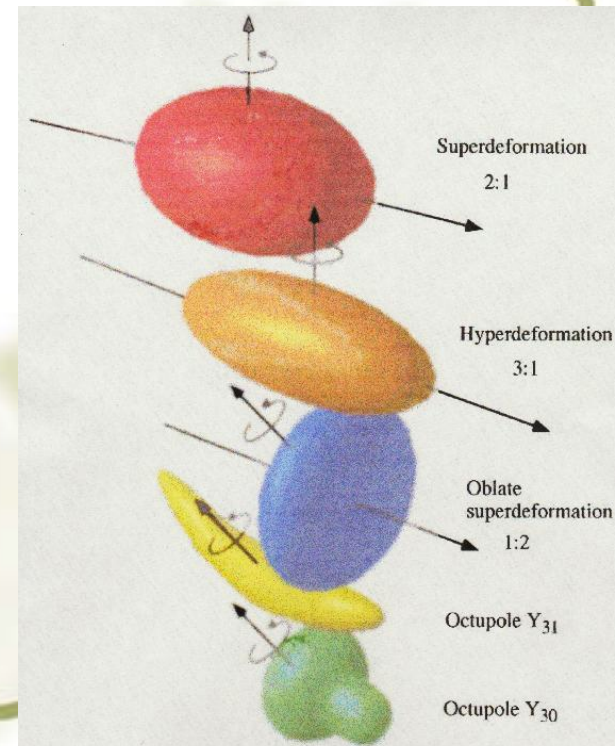
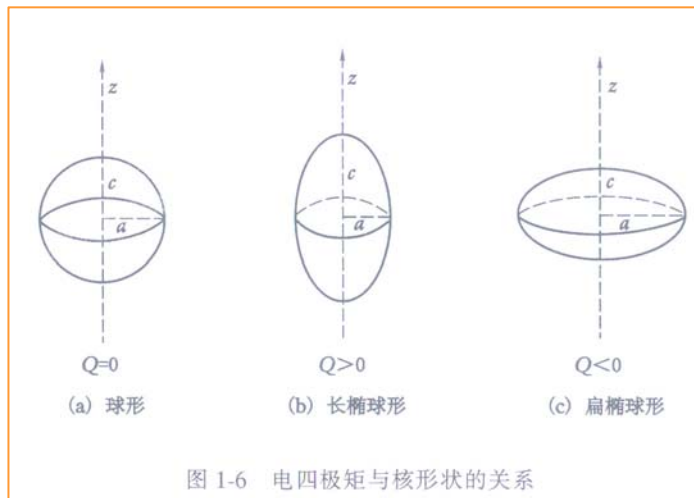
$$Q = \frac{\rho}{e} \int_V (3z'^2 - r'^2) d\tau = \frac{Z}{V} \int_V (2z'^2 - x'^2 - y'^2) d\tau$$

$$= \frac{Z}{V} \left(\frac{2}{5} c^2 V - \frac{2}{5} a^2 V \right) = \frac{2}{5} Z (c^2 - a^2)$$

当 $c=a$ 时， $Q=0$ ，即球形核的电四极矩为零。

$c>a$ 时， $Q>0$ ，即长椭球形原子核具有正的电四极矩。

$c<a$ 时， $Q<0$ ，即扁椭球形原子核具有负的电四极矩。



令 ε 为原子核偏离球形程度的形变参量，定义 $\varepsilon \equiv \frac{\Delta R}{R}$ ， R 为与椭球同体积的球的半径， ΔR 为椭球对称轴半径 c 与 R 之差，则

$$c = R(1 + \varepsilon)$$

由于

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 c$$

有

$$a = \frac{R}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$$

所以

$$Q \approx \frac{6}{5}ZR^2\varepsilon \approx \frac{6}{5}Zr_0^2A^{\frac{2}{3}}\varepsilon$$

实验测得 Q 值后，就可算出 ε 。

对大多数原子核， ε 的绝对值为百分之几。这说明大多数原子核是非球形的，但偏离球形的程度都不大。

测量电四极矩：原子光谱超精细结构

电四极矩共振吸收

原子核本身能级间的跃迁

[Heyde, P.20-25]



§ 1.5 原子核的宇称

对称性

经典系统的对称性: "A thing is symmetrical if there is something that you can do to it so that after you have finished doing it it looks the same as it did before." (德国数学家 H. Weyl, 1885-1955)

经典物理规律的对称性: 规律的表达式在某种变换下保持不变。

量子系统的对称性: 假定 Ψ 是运动方程的解 (一种可能的状态), 如果经过变换之后的波函数 $\Psi' = \hat{Q}\Psi$ (\hat{Q} 是变换算符) 也必然是运动方程的解, 则体系对于变换 Q 是对称的。

量子运动规律的对称性:

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = \hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H} = 0, \quad \text{或} \quad \hat{Q}\hat{H}(\vec{r})\hat{Q}^{-1} = \hat{H}(-\vec{r}) = \hat{H}(\vec{r})$$

宇称是描写微观体系状态波函数的一种空间反演性质

$$\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

算符 \hat{P} 称为宇称算符。对某些波函数，存在着以下关系

$$\hat{P}\psi(x) = K\psi(x)$$

这表明波函数 $\psi(x)$ 是宇称算符 \hat{P} 的本征态， K 是本征值。

显然

$$\hat{P}^2\psi(x) = K^2\psi(x)$$

由于 $\hat{P}^2\psi(x) = \hat{P}\psi(-x) = \psi(x)$ ，因而且 $K^2 = 1$ ，则 $K = \pm 1$ 。所以，宇称算符的本征值只有 ± 1 两个值。对于 $K = +1$ 的情形，即

$$\psi(-x) = \psi(x)$$

我们称这波函数具有正的（或说偶的）宇称，也就是该体系的宇称为正。对于 $K = -1$ 的情形，即

$$\psi(-x) = -\psi(x)$$

则称这波函数具有负的（或说奇的）宇称，也就是该体系的宇称为负。我们称这两种波函数都是具有确定宇称的。例如波函数 $\psi_1 = A\cos kx$ 具有偶宇称， $\psi_2 = A\sin kx$ 具有奇宇称。而有些波函数，例如 $\phi = ce^{ikx}$ 没有确定的宇称，它不是宇称算符的本征函数，但可以分解成宇称本征函数的线性迭加。

如果微观体系的规律在左右手坐标系中相同，即其哈密顿算符 \hat{H} 在空间反演下保持不变：

$$\hat{H}(-x) = \hat{H}(x)$$

则 \hat{H} 与 \hat{P} 可以对易。事实上，对于任何波函数 $\psi(x)$ ，我们有

$$\hat{P}\hat{H}(x)\psi(x) = \hat{H}(-x)\hat{P}\psi(x) = \hat{H}(x)\hat{P}\psi(x)$$

所以

$$\hat{P}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}$$

这表明宇称是守恒量，它的本征值 K 是好量子数 (\mathbf{P} 的平均值和概率分布不随时间改变)。

所有原子核都有确定的宇称，这是有强相互作用的性质决定的。
基本粒子有的没有确定的宇称。

在有心场中的本征态:

$$\psi(r, \theta, \phi) = NR(r)P_l^m(\cos \theta)e^{im\phi}$$

其中 N 是归一化常数, $R(r)$ 是径向波函数, 只与 r 的大小有关; $P_l^m(\cos \theta)$ 是缔合勒让德多项式, 其微分形式为

$$P_l^m(\xi) = \frac{1}{2^l l!} (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l$$

其中 $\xi = \cos \theta$, l 为轨道角动量量子数, m 为磁量子数。

空间反演是 $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\phi \rightarrow \pi + \phi$ 。 $R(r)$ 在反演后不变, $\xi \rightarrow -\xi$, 则 $(\xi^2 - 1)^l$ 在反演下不变号, 但它每微商一次变一号, 所以在反演下 $P_l^m(\xi) \rightarrow (-1)^{l+m} P_l^m(\xi)$ 。另外, 在反演下 $e^{im\phi} \rightarrow e^{im(\pi+\phi)} = (-1)^m e^{im\phi}$, 则 $\Psi(r, \theta, \phi)$ 在空间反演后成为 $(-1)^l \Psi(r, \theta, \phi)$ 。

l 为奇数时 $\Psi(r, \theta, \phi)$ 具有奇宇称, l 为偶数时则为偶宇称。

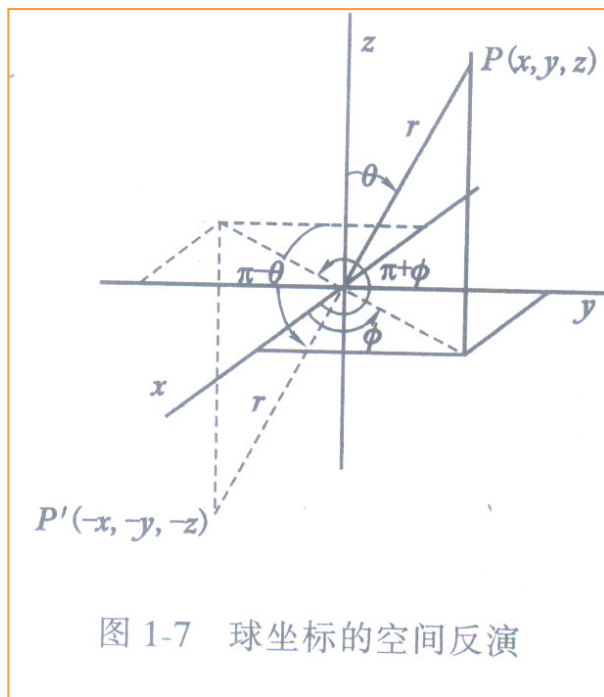


图 1-7 球坐标的空间反演

独立粒子模型：原子核波函数可近似地考虑作诸核子波函数的乘积。

由于核子的内秉宇称为+1，因此，原子核的宇称 π_N 可看作诸核子的轨道宇称之积：

$$\pi_N = \prod_{i=1}^A (-1)^{l_i}$$

由量子力学知道，有心场中轨道量子数 l 是好量子数，一定的原子核状态具有确定的宇称。

表示法： 自旋^{宇称}= J^P

例： ^{40}K 基态的自旋为 4，宇称为负，则表示为 4^- ；

^4He 基态的自旋为零，宇称为正，则表示为 0^+ 。



§ 1.6 原子核的统计性质

由自旋为半整数的粒子组成的两个或两个以上的全同粒子系统，遵从费米—狄拉克（**Fermi — Dirac**）统计律。所以，自旋为半整数的粒子也叫费米子。

由自旋为整数的粒子组成的两个或两个以上的全同粒子系统，则遵从玻色—爱因斯坦（**Bose — Einstein**）统计律。自旋为整数的粒子也叫玻色子。

费米子在每一量子状态中只能有一个，玻色子在每一量子状态中则可以有二个或二个以上。

由两个或二个以上全同费米子组成的系统，它的波函数是交换反对称的，即

$$\Psi(r_1, \dots, r_j, \dots, r_i, \dots, r_n) = -\Psi(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n)$$

此式表示将第 i 个粒子和第 j 个粒子互换后，描写系统的波函数差一符号。

如果系统是由两个或两个以上全同玻色子组成的，则它的波函数是交换对称的，即

$$\Psi(r_1, \dots, r_j, \dots, r_i, \dots, r_n) = \Psi(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_n)$$

将第 i 个粒子和第 j 个粒子互换后，描写系统的波函数相同。

原子核的自旋可以是半整数，也可以是整数

奇 A 核的自旋是半整数，偶 A 核的自旋是整数。所以，奇 A 核是费米子，偶 A 核是玻色子。

推而广之，由奇数个费米子组成的粒子仍是费米子，由偶数个费米子组成的粒子则为玻色子，由不论是奇数还是偶数个玻色子组成的粒子总是玻色子。



§ 1.7 原子核的同位旋

质子和中子看成是处于不同电荷状态的同一种粒子，即核子。处于正电荷状态的核子是质子，处于负电荷状态的是中子。

核子的同位旋矢量，其量子数 $t = \frac{1}{2}$ 。按习惯， $t_3 = +\frac{1}{2}$ 的为质子态， $t_3 = -\frac{1}{2}$ 的为中子态。

对于两核子体系，和角动量相加的规则一样，总同位旋 $\hat{T} = \hat{t}(1) + \hat{t}(2)$ 是两个核子同位旋的矢量和。 $T = 1$ 的态是同位旋三重态 ($T_3 = 1, 0, -1$)， $T = 0$ 的态是同位旋单态， $T_3 = 0$ 。

对于由 A 个核子组成的原子核，总同位旋

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^A \hat{t}_i$$

$$T_3 = \sum_{i=1}^A t_{3i}$$

因为质子的 $t_3 = \frac{1}{2}$, 中子的 $t_3 = -\frac{1}{2}$, 所以原子核的

$$T_3 = \frac{1}{2} (Z - N) = Z - \frac{N}{2}$$

同一种核素的所有能态都有相同的 T_3 值, 而:

$$\frac{1}{2} |Z - N| \leq T \leq \frac{1}{2} (Z + N)$$

核的基态具有最小的 T 值。例如, ^{14}N 基态的 $T_3 = 0$, $T = 0$, 第一激发态的 $T = 1$, 第二激发态的 $T = 0$, ...。

对于核子数 A 相同, 自旋和宇称 (即 I^π) 也相同, 而且同位旋量子数 T 也相同, 只是 T_3 不同的各个态, 称为同位旋多重态。例如, ^{14}C 、 ^{14}O 的基态和 ^{14}N 的第一激发态构成了同位旋三重态。它们的 $T = 1$, T_3 分别为 -1 , $+1$, 0 。 ^{21}Ne 和 ^{21}Na 的基态和若干个低激发态一一构成同位旋双重态。它们的 $T = \frac{1}{2}$, T_3

分别为 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 。

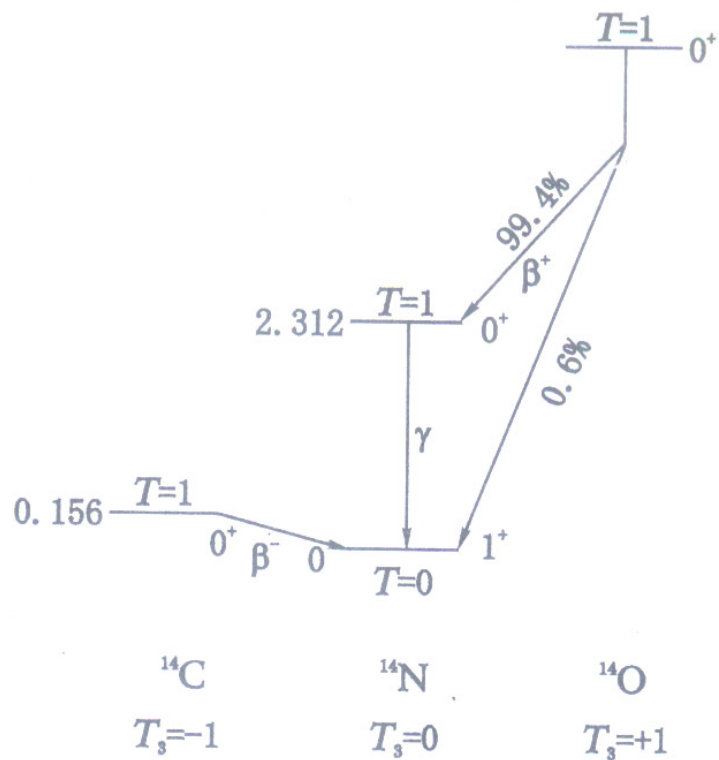


图 1-8 同位旋三重态

2.87	$9/2^+$
2.79	$1/2^+$
1.75	$7/2^+$

2.81	$9/2^+$
2.43	$1/2^+$
1.71	$7/2^+$

0.353	$5/2^+$	$T=1/2$
0	$3/2^+$	

0.335	$5/2^+$	$T=1/2$
0	$3/2^+$	

^{21}Ne
 $T_3 = -1/2$

^{21}Na
 $T_3 = +1/2$

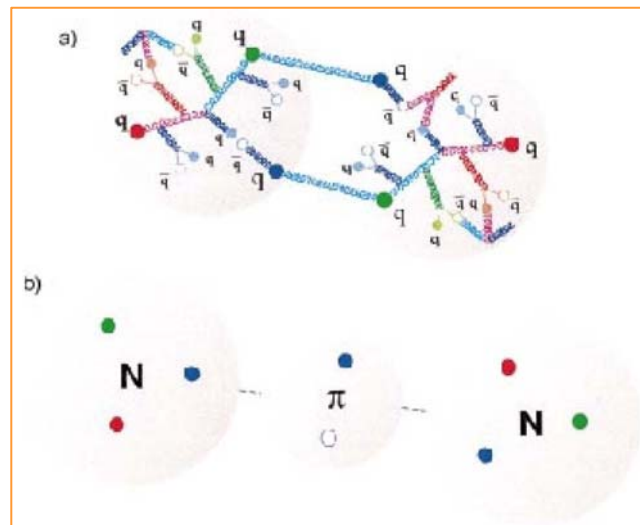
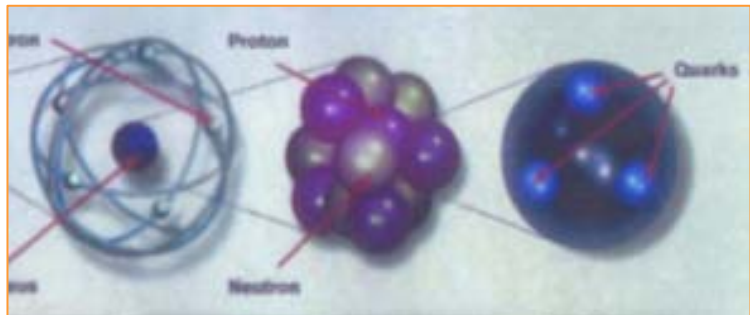
图 1-9 同位旋双重态

§ 1.8 夸克与轻子

(书: § 12.1)

原子核的质子-中子组成

原子核的“非核子自由度”：**“Parton”**、介子流、核子共振态、**EMC效应**（即核内的夸克效应）和超核等
目前认为核子是由夸克组成的，并且很可能围绕着介子云。



粒子的分类与物质结构

基于标准模型，物质世界的基本的粒子可以分为：

物质粒子 { 夸克（自旋 $1/2$ 、带色、参与强作用）
轻子（自旋 $1/2$ 、不带色、不参与强作用）

场粒子 规范玻色子

迄今为止，共发现了六种夸克，被称为六种“味”（flavors）。

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Q

$2e/3$

$-e/3$

B

$1/3$

$1/3$

代

1

2

3

每味夸克又可带红、兰、绿三种颜色之一。每一种夸克都对应着一种反夸克(Q、B反号)。所以总的夸克数是36。

由夸克组成的**重子数不为0**的粒子称为重子，比如质子（**uud**）和中子（**udd**）的 **$B=1$** 。

由夸克和反夸克组成的粒子 **$B=0$** ，称为介子。

实验观测到重子数是守恒的。

强子（参与强相互作用） { 重子
介子

至今的实验表明，任何带色的粒子都不能是自由粒子，而是被束缚在整体上无色的强子内部，这就是所谓的**色禁闭或夸克禁闭现象**。正是这种现象，使夸克的组合方式受到许多限制。也是由于夸克的禁闭，使得自由夸克质量的定义变得不明确，我们到后面再来讨论这个问题。

到目前为止发现的轻子也是6种味，也可分为三代：

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} & \begin{array}{c} Q \\ 0 \\ -e \end{array} & \begin{array}{c} L_i \\ 1 \\ 1 \end{array}
 \end{array}$$

代	1	2	3
---	---	---	---

可以分别定义电轻子数 L_e 、 μ 轻子数 L_μ 和 τ 轻子数 L_τ ，至今的实验观测表明它们各自守恒。







每一种轻子都对应一种反轻子(Q、 L_i 反号)，因此共有12种轻子。

自由轻子的质量列在表中。中微子的质量只是给出了上限，不排斥其为0。尽管许多物理学家相信中微子有非0的质量，但在实验上确定非常困难，原因是中微子既不参与强相互作用，也不参与电磁相互作用，很难进行精确测量。







ν_e	$< 8 \text{ eV}/c^2$	e	$0.51 \text{ MeV}/c^2$
ν_μ	$< 0.25 \text{ MeV}/c^2$	μ	$105.6 \text{ MeV}/c^2$
ν_τ	$< 35 \text{ MeV}/c^2$	τ	$1776.9 \pm 0.5 \text{ MeV}/c^2$

Particles

Leptons

	Electric Charge		Electric Charge
Tau	 -1	Tau Neutrino	 0
Muon	 -1	Muon Neutrino	 0
Electron	 -1	Electron Neutrino	 0

Quarks

	Electric Charge		Electric Charge
Bottom	 -1/3	Top	 2/3
Strange	 -1/3	Charm	 2/3
Down	 -1/3	Up	 2/3

each quark: ●R, ●B, ●G 3 colors

The particle drawings are simple artistic representations

习 题

1-1. 实验测得某元素的特征 K_{α} 线的能量为 7.88keV ，试求该元素的原子序数 Z 。

1-2. 用均匀磁场质谱仪，测量某一单电荷正离子，先在电势差为 1000V 的电场中加速。然后在 0.1T 的磁场中偏转，测得离子轨道的曲率半径为 0.182m 。试求 (a) 离子速度，(b) 离子质量，(c) 离子质量数。

1-3. 质子通过 $1.3 \times 10^6\text{V}$ 的电势差后，在 0.6T 的均匀磁场中偏转，如果让 ${}^4\text{He}$ 核通过 $2.6 \times 10^6\text{V}$ 的电势差后，在均匀磁场中偏转与以上质子具有相同的轨道，问磁场应为多少 T ？

1-4. 计算下列各核的半径： ${}^4_2\text{He}$ ， ${}^{107}_{47}\text{Ag}$ ， ${}^{238}_{92}\text{U}$ ，设 $r_0 = 1.45\text{fm}$ 。

1-5. 实验测得 ${}^{241}\text{Am}$ 和 ${}^{243}\text{Am}$ 的原子光谱的超精细结构由六条谱线组成，已知相应原子能级的电子总角动量大于核的自旋，试求 ${}^{241}\text{Am}$ 和 ${}^{243}\text{Am}$ 核的自旋。

1-6. 试求半径为 ^{189}Os 核的 $\frac{1}{3}$ 的稳定核。

1-7. 试求 ^7Li 、 ^7Be 、 ^{14}N 和 ^{18}O 核的基态同位旋量子数 T 和 T_3 。

1-8. 已知 ^{12}C 的第一激发态的同位旋量子数 $T=1$ ，问它与哪两个核的什么态组成同位旋三重态？

1-9. 设质子是一个密度均匀具有角动量为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ 的球，且质子的所有电荷均匀分布于球表面，试计算质子的磁距；如果角动量的最大可观测分量是 $\frac{1}{2}\hbar$ ，试计算相应的磁距的最大可观测分量（用核磁子表示）。

1-10. 为什么原子核具有自旋？如何测定原子核的自旋？

1-11. 核磁共振时原子核吸收磁场能量引起能级间跃迁，这种跃迁是核能级间的跃迁吗？为什么？

Box 1a. Heyde, P.43

The heaviest artificial elements in nature: from $Z=109$ towards $Z=112$