

# 具有多种元件的 $N$ 中取 $K$ 容错系统 及其可靠性<sup>1)</sup>

姚增起

(中国科学院自动化研究所, 北京 100080)

## 摘 要

本文提出了具有多种元件的  $N$  中取  $K$  容错系统的概念, 指出: 对于此类系统, 当元件可靠度向量  $\mathbf{P} \in \mathcal{Q}(\mathbf{P})$  (可靠区域) 时, 通过增加元件数向量  $\mathbf{N}$ , 可以使系统达到任意可靠。这使得构造高可靠系统成为可能。本文结果对神经网络可靠性分析与设计有重要意义。

**关键词:**  $N$  中取  $K$  容错系统, 可靠性。

## 一、引 言

容错是提高系统可靠性的基本方法。 $n$  中取  $k$  容错系统是指, 在  $n$  个相同元件中, 只要有  $k$  个或  $k$  个以上元件正常工作, 系统就能够正常工作。许多作者都对此系统作过研究<sup>[1,2]</sup>。本文作者在文献[1]中指出了此系统的一个重要性质, 即当元件可靠度适当大时, 可以通过增加元件个数  $n$ , 使系统达到任意可靠。然而, 现有文献所涉及的系统只考虑单种元件。在实际应用中, 许多系统的元件种类并非一种, 而是多种。本文将对具有多种元件的  $N$  中取  $K$  容错系统及其可靠性进行分析。

## 二、定 理

假定一个系统中有  $m$  种元件, 第  $i$  种元件共有  $n_i$  个, 其中有  $k_i$  个是正常工作的 ( $0 \leq k_i \leq n_i$ ), 单个第  $i$  种元件正常工作的概率, 即可靠度为  $p_i, i = 1, 2, \dots, m$ 。记  $\mathbf{N} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ ,  $\mathbf{K} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ ,  $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ 。令  $u_i = k_i/n_i, i = 1, 2, \dots, m$ 。因  $0 \leq u_i \leq 1$ , 称  $u_i$  为  $k_i$  的归一化值, 而  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  称为  $\mathbf{K}$  的归一化向量。记  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ , 则有  $\mathbf{0} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{1}$ 。令  $A = \{\mathbf{U}: \mathbf{0} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{1}\}$ , 则  $A$  是一个单位超立方体。

**定义1.** 设  $\mathcal{Q}(\mathbf{U}) \subset A$  是任意一个区域, 如果当一个系统的归一化向量  $\mathbf{U} \in \mathcal{Q}(\mathbf{U})$  时这个系统是可靠的, 则称此系统为  $N$  中取  $K$  容错系统,  $\mathcal{Q}(\mathbf{U})$  称为此系统的可靠

本文于 1991 年 1 月 18 日收到。  
1) 国家自然科学基金资助项目。

区域。

当  $m = 1$  时,若取  $\Omega(u) = [u_0, 1]$ , 则此系统是一个单种元件的  $n$  中取  $k$  容错系统, 在文献[1]中已对此情形进行了研究。

记  $N$  中取  $K$  容错系统的可靠度为  $R(P, N, \Omega)$  以及

$$B(n, k, p) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \tag{1}$$

由定义 1, 有

$$R(P, N, \Omega) = \sum_{\text{对所有 } U \in \Omega} \cdots \sum \prod_{i=1}^m B(n_i, k_i, p_i). \tag{2}$$

**定理 1.** 假定在  $N$  变化时  $\Omega(U)$  的边界保持不变, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(P, N, \Omega) = \begin{cases} 1, & \text{当 } P \in \Omega(P), \\ 0, & \text{当 } P \notin \Omega(P), \end{cases}$$

这里  $N \rightarrow \infty$  表示对所有  $i = 1, 2, \dots, m, n_i \rightarrow \infty$ .

定理 1 的成立比较明显。由于第  $i$  种元件都是相同的, 当  $U \in \Omega(U)$  时, 等于说, 对第  $i$  种元件进行了  $n_i$  次试验, 有  $k_i$  次是正常的。由概率的古典定义, 每个第  $i$  种元件的可靠度为  $p_i \approx k_i/n_i = u_i$ ,  $n_i$  越大, 此式越准确。当  $n_i \rightarrow \infty$  时,  $p_i = k_i/n_i$ , 即  $p_i = \lim_{n_i \rightarrow \infty} u_i, P = \lim_{N \rightarrow \infty} U$ 。当  $P \in \Omega(P)$  时, 从概率上讲有  $U \in \Omega(U)$ , 此时系统完全可靠, 系统可靠度为 1。反之系统完全不可靠, 系统可靠度为 0。

**例 1.** 当  $m = 1$  时, 取  $\Omega(u) = [u_0, 1]$ , 由(2)式, 有

$$R(p, n, \Omega) = \sum_{\text{对所有 } u \in \Omega} B(n, k, p) = \sum_{k=u_0 n}^n B(n, k, p).$$

由定理 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(p, n, \Omega) = \begin{cases} 1, & \text{当 } u_0 \leq p \leq 1, \\ 0, & \text{当 } 0 \leq p < u_0, \end{cases} \\ = I(p - u_0).$$

其中  $I(p - u_0)$  为单位阶跃函数。

这与文献[1]中的结果是一致的(基本可靠系统性质 4)

**例 2.** 设  $m = 2$ , 取  $\Omega(U) = \{U: -5u_1 + 2u_2 + 1 \geq 0, u_1 - 5u_2 + 2 \geq 0\}$ , 则

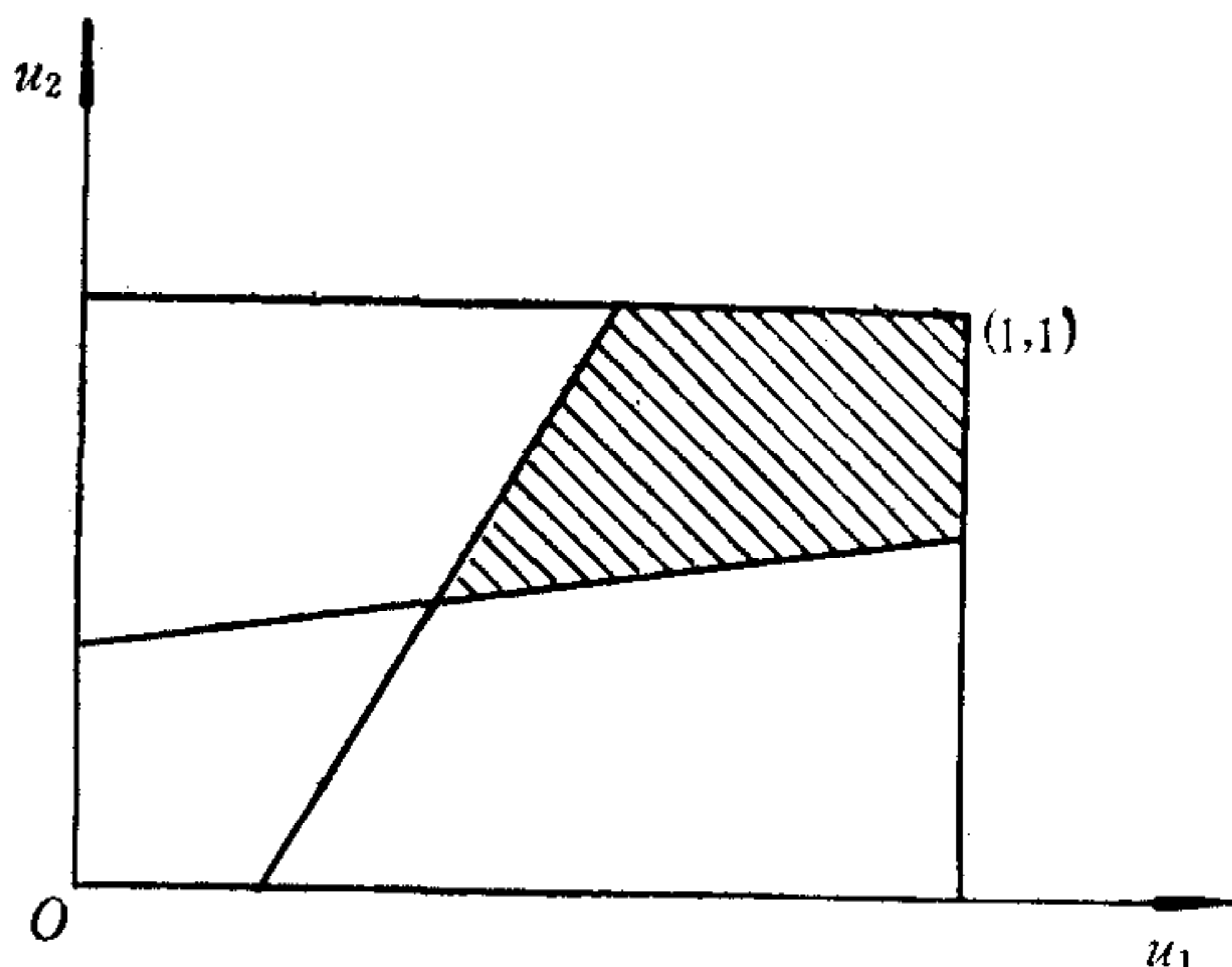


图 1

$\Omega(U)$  可表示在图 1 中。由定理 1, 若将图 1 中的  $U$  换为  $P$ , 则当  $P$  处于图 1 中的阴影区时, 可以通过增加  $N$ , 使此系统的可靠度接近于 1。

### 三、讨 论

定理 1 的意义在于, 对  $N$  中取  $K$  容错系统, 只要它的元件可靠度向量  $P \in \Omega(P)$ , 就可以通过增加系统中的元件个数, 使其可

靠度任意接近于 1, 也就是说, 使系统任意可靠, 而  $\Omega(\mathbf{P})$  又是非常容易决定的. 另外, 由于当  $\mathbf{P} \in \Omega(\mathbf{P})$  时, 系统可靠度接近于 0, 在设计时一定要给元件可靠度  $\mathbf{P}$  留有一定裕量, 以免由于元件可靠度的退化造成  $\mathbf{P}$  超出  $\Omega(\mathbf{P})$  而使系统失效. 对于一般的工程系统, 增加元件个数会受到体积、重量、费用等因素的限制. 目前, VLSI 技术及神经网络理论发展迅速, 使得上述限制因素不再成为障碍, 因而实现接近于人脑可靠性的系统已成为可能. 根据与定理 1 相同的原理, 作者已在文献[1]和另外一篇文章中给出了用 BP (反向传播)神经网络实现高可靠系统的例子, 本文不再赘述.

### 参 考 文 献

- [1] 姚增起, 用不可靠元件构造可靠系统及其神经网络实现, 自动化学报, 16(1990), 5, 429—435.  
[2] 曹晋华, 程侃, 可靠性数学引论, 科学出版社, 1986 年.

## A $K$ -OUT-OF- $N$ FAULT TOLERANT SYSTEM WITH VARIOUS COMPONENTS AND ITS RELIABILITY

YAO ZENGQI

(Institute of Automation, Academia Sinica, 100080)

### ABSTRACT

In this paper, the  $K$ -out-of- $N$  fault tolerant system with various components is proposed. We have proven that the system can be made arbitrarily reliable by increasing its component number vector  $\mathbf{N}$  when component reliability vector  $\mathbf{P} \in \Omega(\mathbf{P})$  (reliable region). This makes it possible to construct highly reliable systems. The result of the paper is useful to the reliability analysis and design of artificial neural networks.

**Key words:**  $K$ -out-of- $N$  fault tolerant system; reliability.