第 28 卷 第 4 期
2002 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 4
July, 2002

研究简报

连续状态模糊控制系统的鲁棒稳定性分析[1)]

李永明 史忠科

(西北工业大学自动控制系 西安 710072)

(E-mail: liyongm@snnu.edu.cn, zkeshi@nwpu.edu.cn)

关键词 模糊控制，稳定性，鲁棒稳定性

中图分类号 O231

ROBUST STABILITY ANALYSIS OF CONTINUOUS-TIME FUZZY CONTROL SYSTEMS

LI Yong-Ming SHI Zhong-Ke

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

(E-mail: liyongm@snnu.edu.cn, zkeshi@nwpu.edu.cn)

Key words Fuzzy control, stability, robust stability

1 引言

关于模糊系统的稳定性研究，目前已有许多相关的分析和设计方法[1]. 比如，文献[2]中证明了凡用经典控制能稳定控制的系统必可用模糊控制达到相同的稳定性能，文献[3]中有关 Takagi-Sugeno 模糊系统的稳定性研究，文献[4]中有关关系模型的模糊稳定性分析，文献[5]中有关结论部分为单点的模糊系统的稳定性的讨论等，其它诸如相平面法，绝对圆判据，自适应法等，见文献[6]的综述. 但模糊控制是一种基于系统的模糊模型的控制方法，由于系统本身的非线性和不确定性，以及模糊模型本身的逼近误差，这就要求模糊控制具有鲁棒性. 这一方面已有相关的研究成果（如文献[7～10]等），比如，Tanaka 等人[7]给出了模糊控制系统二次稳定的条件，但该方法过于复杂而难于验证，况且未给出模糊控制鲁棒稳定区间的估计，Chen 等人[8]的结果比较保守，也未给出模糊控制鲁棒稳定区间的估计. 本文就是在这些方面进行研究，给出模糊控制系统鲁棒稳定的一些新条件，并针对单输入单输出系统给出模糊控制系统鲁棒稳定区间的定量估计式来.

2 连续状态模糊控制系统的鲁棒稳定性

假设连续状态 Takagi-Sugeno（简称 T-S）模型一般形式如下[7]

$$R_p^i\text{: If } z_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \cdots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_g^i\text{, then } \dot{\boldsymbol{X}}(t) = A_i\boldsymbol{X}(t) + B_i\boldsymbol{u}(t),\ i = 1,\cdots,l \tag{1}$$

1) 国家自然科学基金(19901028, 60174016)及"国家重点基础研究发展规划项目"专项经费(G1998030417)资助

收稿日期 2000-05-10 收修改稿日期 2001-07-05

其中 M_j^i 是模糊集合，l 是规则个数，$\boldsymbol{u}(t)\in U\subseteq R^m$ 是控制向量，$\boldsymbol{X}(t)\in X\subseteq R^n$ 是状态向量. 定义 $M^i=M_1^i\times\cdots\times M_g^i$ 直积模糊集，即 $M^i(z)=\prod_{j=1}^{g}M_j^i(z_j)$，$z=(z_1,z_2,\cdots,z_g)\in Z$，$Z$ 为 U 或 X 的元素或其组合.

整个系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{i=1}^{l}\omega_i(z(t))[A_i\boldsymbol{X}(t)+B_i\boldsymbol{u}(t)] \tag{2}$$

其中 $\omega_i(z(t))=\dfrac{M^i(z(t))}{\sum_{j=1}^{l}M^j(z(t))}$.

含不确定参数的 T-S 模型表示为

R_p^i: If $z_1(t)$ is M_1^i and $\cdots$ $z_g(t)$ is M_g^i, then

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=(A_i+\Delta A_i)\boldsymbol{X}(t)+(B_i+\Delta B_i)\boldsymbol{u}(t),\ (i=1,\cdots,l) \tag{3}$$

其中 ΔA_i，ΔB_i 为 t 的函数，代表参数的不确定性或摄动;假设已知 ΔA_i，ΔB_i 的上界 A_e，B_e，即 $\Delta A_i^{\mathrm{T}}\Delta A_i\leqslant A_e^{\mathrm{T}}A_e,\Delta B_i^{\mathrm{T}}\Delta B_i\leqslant B_e^{\mathrm{T}}B_e$. 比如，Chen 等人[8]假定 $\begin{bmatrix}\Delta A_i\\ \Delta B_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_i A_e\\ \eta_i B_e\end{bmatrix}$,其中 $\|\delta_i\|\leqslant 1$，$\|\eta_i\|\leqslant 1$,并给出确定 δ_i,η_i 的方法,但一般来说，δ_i,η_i 是不易确定的；也可参考 Cao 等人[11]给出的确定 A_e,B_e 的方法.

对应系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{i=1}^{l}\omega_i(z(t))[(A_i+\Delta A_i)\boldsymbol{X}(t)+(B_i+\Delta B_i)\boldsymbol{u}(t)] \tag{4}$$

基于(1)的模糊控制的模糊模型为

R_u^i: If $z_1(t)$ is M_1^i and $\cdots$ $z_g(t)$ is M_g^i, then $\boldsymbol{u}(t)=K_i\boldsymbol{X}(t)$, $(i=1,\cdots,l)$ (5)

控制器输出为

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i=1}^{l}\omega_i(z(t))K_i\boldsymbol{X}(t) \tag{6}$$

把式(6)代入式(2)，(4)得

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\omega_i(z(t))\omega_j(z(t))\,G_{ij}\boldsymbol{X}(t) \tag{7}$$

其中 $G_{ij}=A_i+B_iK_j$，这是模糊控制对系统的逼近模型(2)的控制系统状态方程形式.

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\omega_i(z(t))\omega_j(z(t))(G_{ij}+\Delta G_{ij})\boldsymbol{X}(t) \tag{8}$$

其中 $\Delta G_{ij}=\Delta A_i+\Delta B_iK_j$. 这是模糊控制对含不确定参数的系统(4)的控制系统状态方程形式.

系统(7)稳定的一般判据如下.

定理 1[3]. 对于上面描述的模糊闭环系统(7),如果存在一个共同的正定矩阵 P，对于所有的子系统均有

$$G_{ij}^{\mathrm{T}}P+PG_{ij}<0,\ (i,j=1,2,\cdots,l) \tag{9}$$

则模糊控制系统(7)是全局渐近稳定的.

在此基础上，我们研究系统(8)稳定的条件. 以下约定用 $\lambda(A),\lambda_{\max}(A),\lambda_{\min}(A)$ 分别表示矩阵 A 的特征值，模最大特征值和模最小特征值.

令 $-P_{ij}=G_{ij}^{\mathrm{T}}P+PG_{ij}$，$P_{ij}>0$，$(i,j=1,2,\cdots,l)$，则一定存在正数 g,$0<g<1$,使得 $-Q_{ij}=-P_{ij}+\dfrac{1-g}{g}P^{\mathrm{T}}P<0$，$(i,j=1,2,\cdots,l)$. 实际上，若取

$$g=\frac{\lambda_{\max}(P^{\mathrm{T}}P)}{\lambda_{\max}(P^{\mathrm{T}}P)+\min\limits_{i,j}(\lambda_{\min}(P_{ij}))}+\varepsilon \tag{10}$$

其中 ε 为适当的正数，则 $\lambda_{\max}(P^{\mathrm{T}}P)<\frac{g}{1-g}\min\limits_{i,j}(\lambda_{\min}(P_{ij}))$，从而由下面引理 2 有 $P^{\mathrm{T}}P<\frac{g}{1-g}P_{ij}$，即 $-Q_{ij}=-P_{ij}+\frac{1-g}{g}P^{\mathrm{T}}P<0\ (i,j=1,2,\cdots,l)$. 当然，$g$ 可以取得更小点，以减少结论的保守性.

本文主要结论如下.

定理 2. 若式(6)可稳定控制式(2)且存在正数 $g,0<g<1$，共同的正定矩阵 P，使得

$$-Q_{ij}=G_{ij}^{\mathrm{T}}P+PG_{ij}+\frac{1-g}{g}P^{\mathrm{T}}P<0 \quad (i,j=1,2,\cdots,l)$$

则式(6)可稳定控制含不确定性 $\Delta A_i,\Delta B_i$的系统(4)的充分条件为下列条件之一成立

i) $-Q_{ij}+\frac{g}{1-g}\Delta G_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta G_{ij}<0\ (i,j=1,2,\cdots,l)$.

ii) $\lambda_{\max}(\Delta G_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{T}}\Delta G_{\mathrm{ij}})<\frac{1-g}{g}\lambda_{\min}(Q_{ij})\ (i,j=1,2,\cdots,l)$.

iii) 存在 $0<g_1<1$ 使得 $\frac{1}{g_1}A_e^{\mathrm{T}}A_e+\frac{1}{1-g_1}(B_eH_j)^{\mathrm{T}}(B_eH_j)-\frac{1-g}{g}Q_{ij}<0\ (i,j=1,2,\cdots,l)$.

iv) 存在 $0<g_1<1$ 使得 $\lambda_{\max}\left(\frac{1}{g_1}A_e^{\mathrm{T}}A_e+\frac{1}{1-g_1}(B_eH_j)^{\mathrm{T}}(B_eH_j)\right)<\frac{1-g}{g}\min\limits_{i}(\lambda_{\min}(Q_{ij}))$ $(i,j=1,2,\cdots,l)$.

该定理的证明需要如下引理.

引理 1. 设 A,B 为同阶方阵，$g>0$，则 $A^{\mathrm{T}}B+AB^{\mathrm{T}}\leqslant gA^{\mathrm{T}}A+\frac{1}{g}BB^{\mathrm{T}}$.

引理 2. 设 P,Q 为同阶(半)正定阵且 $\lambda_{\max}(Q)<\lambda_{\min}(P)$，则 $Q<P$.

定理 2 的证明. 取 Lyapunov 函数为 $V(t)=\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{X}(t)$，利用上述引理验证 $\dot{V}(t)<0$ 即可. 证毕.

上述判据未能明确给出 $\Delta A_i,\Delta B_i$中各元素的上、下界或 A_e,B_e的变化范围，下面针对单输入单输出系统讨论不确定参数鲁棒稳定区间估计. 其规则形式为

R_p^i: If $z_1(t)$ is M_1^i and $\cdots$ $z_g(t)$ is M_g^i, then

$$x^{(n)}=a_1^ix^{(n-1)}+a_2^ix^{(n-2)}+\cdots+a_n^i\dot{x}+b^iu(t)\quad (i=1,\cdots,l) \tag{11}$$

令

$$\boldsymbol{X}(t)=[x^{(n-1)},x^{(n-2)},\cdots,\dot{x},x]^{\mathrm{T}},\ A_i=\begin{bmatrix}a_1^i & a_2^i & \cdots & a_n^i\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},\ B_i=\begin{bmatrix}b^i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

则式(11)可写为如下形式

$$R_p^i\text{: If } z_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \cdots\ z_g(t) \text{ is } M_g^i\text{, then } \dot{\boldsymbol{X}}(t)=A_i\boldsymbol{X}(t)+B_i\boldsymbol{u}(t) \tag{12}$$

以下假设不确定性只出现在 A_i，即 ΔA_i，规则形式为

R_p^i: If $z_1(t)$ is M_1^i and $\cdots$ $z_g(t)$ is M_g^i, then

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=(A_i+\Delta A_i)\boldsymbol{X}(t)+B_i\boldsymbol{u}(t),\ i=1,\cdots,l \tag{13}$$

其中 $\Delta A_i=\begin{bmatrix}\Delta a_1^i & \Delta a_2^i & \cdots & \Delta a_n^i\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$，则 $\Delta G_{ij}=\Delta A_i$. 假设 ΔA_i各元的上界已知，即存在 Δa_j

($j=1,2,\cdots,n$)使得$|\Delta a_j^i|\leqslant\Delta a_j(i=1,2,\cdots,l)$.

对式(12),(13)定理 2 是成立的，在此基础上，给出使系统(13)稳定的 $\Delta a_j(j=1,2,\cdots,n)$变化估计. 则得结论

定理 3. 条件同定理 2，令 $r_i=\frac{1-g}{g}\min_j\lambda_{\min}(Q_{ij})$，$r=\min_i r_i$,若 ΔA_i满足如下条件之一，则式(6)可稳定控制含不确定性 ΔA_i的系统(13)

1) $\sum_{j=1}^{n}(\Delta a_j^i)^2<r_i(i=1,2,\cdots,l)$;

2) $\sum_{j=1}^{n}(\Delta a_j)^2<r$.

定理 3 给出了针对系统(13)的鲁棒稳定区间的估计式. 利用该定理，使用 Tanaka 等人使用的弹簧减震器例子[7]可验证本文方法的有效性与优越性.

3 结论

本文给出了模糊控制器对含不确定参数的模糊系统的鲁棒稳定性的一些新的条件,并针对单输入单输出系统给出这些参数鲁棒稳定的估计式,该估计式给出模糊系统鲁棒稳定区域的定量形式,这是该方法的优点. 若能选择合适的 P(参见文献[12]),g, 则可减小结论的保守性.

参 考 文 献

1 孙增圻等. 智能控制理论及其应用. 北京：清华大学出版社,1997

2 李永明,史忠科. 一类非线性系统的模糊控制与稳定性. 自动化学报，2001,**27**(5):714～718

3 Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **45**(2): 135～156

4 Chen J Q, Lu J H, Chen L J. Analysis and synthesis of fuzzy closed-loop control systems. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybertics*, 1995, **25**(5): 881～888

5 Sugeno M. On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 1999, **7**(2):201～224

6 Kandel A, Luo Y, Zhang Y Q. Stability analysis of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, **105**(1): 33～48

7 Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 1996, **4**(1):1～13

8 Chen B S, Tseng C S T, Uang H J. Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 1999, **7**(5):571～585

9 Kim S W, Cho Y W, Park M. A multirule-base controller using the robust property of a fuzzy controller and its design method. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 1996, **4**(3):315～327

10 Uang H J, Kwon C, Park. Robust stability analysis and design method for the fuzzy feedback linearization regulator. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 1998, **6**(5):464～472

11 Cao S G, Rees N W, Feng G. Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, 1996, **27**(2):193～203

12 李永明,史忠科. 模糊系统的分区域渐近稳定性分析. 控制与决策,2001,**16**(1):42～46

李永明　博士,教授. 主要研究方向为拓扑学、模糊数学与模糊控制系统等.

史忠科　博士,教授. 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制、交通规划与控制等.