

# 一种基于离散梯度向量域的可视化应用研究

张丽娜, 顾耀林

(江南大学信息工程学院, 无锡 214122)

**摘要:** 研究了基于莫尔斯理论的离散梯度向量域方法, 并将其应用于拓扑可视化。用该方法和流形可视化方法分别演示了 Moebius 带和海螺并做了分析对比, 并介绍了相关理论, 分析了如何构造离散梯度向量域, 最后完成向量域的演示并给出了实验结果证明其有效性。该方法可直接应用于计算机辅助设计和虚拟模拟的演示。

**关键词:** 计算机图形学; 可视化; 拓扑; 向量域; 莫尔斯理论

## Study of Application for Visualization Based on Discrete Gradient Vector Fields

ZHANG Lina, GU Yaolin

(School of Information Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214122)

**【Abstract】** The discrete gradient vector field based on the Morse theory is presented, and is applied to visualization of topologies. This method and another flow visualization way are respectively demonstrated with the Moebius strap and the trumpet shell, the analysis and the compare are presented. The correlative theories are introduced first and then to construct the discrete gradient vector field. Finally the vector field is visualized, and experiments show the availability of the result, and this method can be used for CAD and VR rendering.

**【Key words】** Computer graphics; Visualization; Topology; Vector field; Morse theory

人类获得关于外在世界的信息 80%以上是通过视觉通道获得的, 可视化技术在各个领域的出现和发展满足了社会的巨大需求。可视化是计算机图形学领域中一个重要的研究课题, 如何更有效地可视化几何对象或者理论模型是几年来计算机图形学领域的讨论热点, 但是目前还存在一定困难, 比如拓扑对象的可视化。所以, 本文研究了基于莫尔斯理论的离散梯度向量域<sup>[1]</sup>的方法, 并将其应用到拓扑可视化。

莫尔斯理论的应用由来已久, 并在几何与拓扑之间起到重要的桥梁作用, 它的应用非常广泛, 如图形学、拓扑学、几何建模等。Forman<sup>[5]</sup>在传统的基础上将其发展到离散方面, 使之更为有效、更严密。拓扑学作为一门新兴的学科, 对其它学科发生了和正在发生巨大的影响。一个拓扑对象, 只有其文字描述很难给人以直观感受。本文实验采用拓扑结构中较具代表性 Moebius<sup>[7]</sup>带和海螺, 分别利用可视化离散梯度向量域的方法和流形<sup>[6]</sup>可视化方法给出它们的可视化结果。

### 1 相关理论

#### 1.1 莫尔斯理论和离散结构

单元的精确描述。维数为  $p$  的单元  $\alpha^{(p)}$  固定同胚于开放的球体:

$$D = \{x \in R^p : \|x\| < 1\} \quad (1)$$

一般, 零维 ( $\alpha^0$ ) 是一个点; 一维 ( $\alpha^0, \alpha^1$ ) 是线段; 二维 ( $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$ ) 是面, 比如三角形; 三维 ( $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ ) 是体, 比如四面体。单元联合体是单元调和的集合。连接 0 单元 (点) 可以得到 1 单元 (边), 由 1 单元 (边) 可以得到 2 单元 (面), 再由 2 单元 (面) 即可得到 3 单元 (体), 依此类推, 就可以得到  $n$  单元。本文只讨论由有限个单元构建而成的单元联合体 (有限单元联合体)。假如有  $p$  单元  $\alpha^{(p)}$  和  $q$  单元  $\beta^{(q)}$ , 如

果满足以下条件:

$$\alpha \subset \text{closure}(\beta) \text{ 且 } q = p + 1 \quad (2)$$

其中  $\text{closure}(\beta)$  为  $\beta$  的闭包。则  $\alpha$  和  $\beta$  是相关的, 用  $\alpha^{(p)} \prec \beta^{(q)}$  表示。

#### 1.2 超图和超树

构建离散梯度向量域, 先要构造超图和超树。超图<sup>[4]</sup>实质上是一个序偶  $(N, L)$ ,  $N$  为一系列节点,  $L$  为族, 且  $L$  的每个元素都是节点的族, 称之为超链。  $L$  的元素全部同族。连接两个不同节点的链 (超链的环只与一个节点相关) 称为规则超链 (简称链), 而不规则超链的环可多样性地相关于一个节点也可连接三个或多个节点。目的是通过识别超链的节点并作为其来源为超图定位。图  $(N, R)$  的超链可与一个节点多次相关, 也可不与任何节点相关。其中, 相关部分就是超图  $(N, L)$  的规则部分,  $R$  是  $L$  的一系列规则超链。超图中导向的超环是指有区别的节点的一个序列:  $n_0, n_1, \dots, n_{r+1}$ , 其中  $n_0 = n_{r+1}$ 。对于任意的  $i, 0 \leq i \leq r, n_i$  是指向  $n_{i+1}$  的超链的源。如果一个导向的超图的每个节点最多为一个超链的源, 而且它不含任何超环, 则称之为超树。T. Lewiner<sup>[4]</sup>已证明, 如果  $HF$  为超树, 它的一个规则部分是  $R$ , 则要求:  $R$  为树, 且  $R$  中至多一个点为环或者非规则超链的源。对于超树而言, 如果它的规则成分的节点中没有环或不规则超链的源, 则称之为临界部分。

可视化过程中, 需要根据给定的离散对象定义其平滑相似物。在由流<sup>[5]</sup>所引起的变形过程中合并单元, 因为不可循环, 所以形成一种确立于临界单元的树, 就是上面说的超树。

**作者简介:** 张丽娜(1980—), 女, 硕士生, 主研方向: 计算机图形学与虚拟现实; 顾耀林, 教授

**收稿日期:** 2005-09-22 **E-mail:** zln5688@163.com

### 1.3 Forman's 离散莫尔斯理论

组合向量域<sup>[5]</sup>定义于单元联合体之上,是相关单元 $\alpha^{(p)} \prec \beta^{(q)}$ 的一个不相关的集合 $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(q)}\}$ 。这些配对均满足:

$$v(\alpha) = \beta \text{ 且 } v(\beta) = 0 \quad (3)$$

如果一个单元 $\sigma$ 不属于任何配对,则 $v(\sigma) = 0$ ,用从 $\alpha^{(p)}$ 到 $\beta^{(p+1)}$ 的箭头表示这个配对。 $\alpha_i^{(p+1)} \neq \alpha_i^{(p)}$ 时,单元的一个交替的序列 $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$ ,如果该序列满足:

$$\{\alpha_i^{(p)} \prec \beta_i^{(p+1)}\} \in V \text{ 且 } \beta_i^{(p+1)} \succ \alpha_i^{(p)} \quad (4)$$

则称之为V-路径。如果V-路径中 $\alpha_{r+1} = \alpha_0$ ( $r \geq 1$ ),则称V-路径是闭合的。离散梯度向量域就是不存在任何闭合V-路径的组合向量域。

构造向量域需要用到Hasse编码(参看图2(a)和图2(b))。单元联合体K的Hasse图H是一种导向的编排。其中:H的每个节点代表K的一个单元;H的链连接表示K的相关单元的节点,多重相关由多个链表示。每个链的源是最高维的一个单元。

参考文献[1]中已证明,有着合成拓扑的对象一定有其对应的合成几何图形。Forman将该命题拓展到离散结构。Forman的理论依赖于单元联合体的梯度向量域,而向量域构建的同时也构造了相应的离散Morse函数。前面提到流,带有流的离散梯度向量域正是基于单元的合并,这种合并可用配对表示。Forman证明带离散梯度向量域的单元联合体简单同伦<sup>[6]</sup>等价于另一个联合体(该联合体完全由v的临界单元所构建)。

### 2 离散梯度向量域的构造方法

流体的拓扑和它的临界部分有关。这里所说的临界单元是指没有与其它任何单元配对的单元,即

$$v(\alpha) = 0 \text{ 且 } \alpha \in I_-(v) \quad (5)$$

由于临界单元的数量依赖于离散梯度向量域的定义,因此临界单元的数量并不是拓扑不变量。从而得知,如果离散梯度向量域的临界单元的数量越少则该向量域越优,也由此可以优化算法。

图1为构造离散梯度向量域的算法流程。该算法以一种递归的形式实现。从n维单元联合体开始,重复图示操作直至未选择的单元形成一维联合体,也就是一个图。

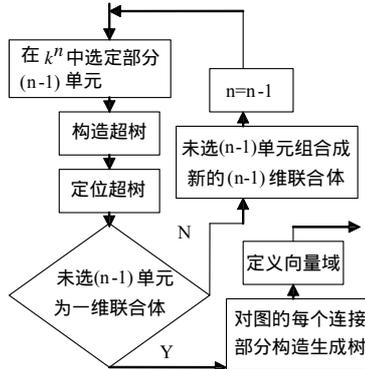


图1 算法流程

然后为图的每个链接的部分构建成生成树,对于生成树,配对它所有的节点和链(根r除外),所有不在树上的链会保持未配对(即临界)状态。之后,选择根节点r(r也为未配对),配对它的每个链至它的相关节点直至根。生成树的节点表示顶点,链表示边。最后通过确定方位在图上构建向量域。因为树不包含环,所以结果得出的向量域可以认为是离散梯

度向量域。图2(c)给出以图2(a)为例的折叠方案。第1个是原始联合体,从左到右依次折叠:面→临界边→点/边→点/边,直至临界点。图2(d)给出以图2(a)为例选择面和边形成超树,图2(e)为处理剩下的边和点。

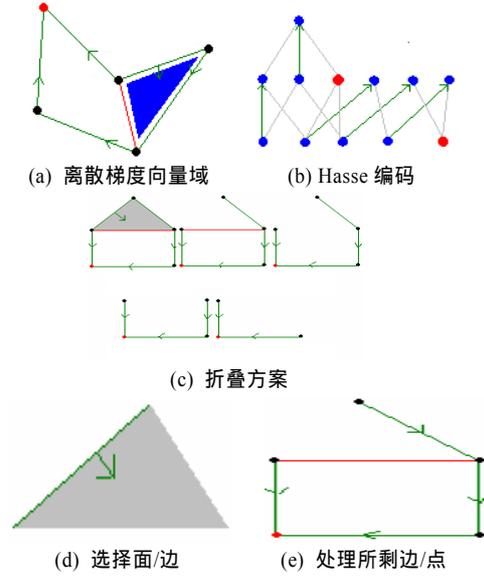


图2 超树构造示意图

构造超树。假设有一个从单元联合体中析取的超树(N,L),其节点就表示该单元联合体的p单元。表示单元联合体的(p-1)单元的超链会连接与之相关的p单元的节点。与前面相反的是,该向量匹配节点至超链,而不是匹配超链至节点。

选择超链。前面已经介绍过临界部分的概念,选择超链和定位超链都是在临界单元的基础上进行的。首先,处理每个规则部分,由于(N,L)不含任何超环,则至少一个规则成分R<sub>0</sub>是临界的或与一个环相关。随后处理R<sub>0</sub>,规则部分R<sub>i</sub>(i>0)通过一个不规则超链连接于R<sub>i-1</sub>。如果R<sub>i</sub>是临界部分,它的根r可以为随意的节点,否则,根r或者是环的源或者是相关于R<sub>i</sub>的非规则超链的源。根r是唯一由定义得来的,如果该部分为临界部分,则r将保持未配对(即临界)状态,否则,将r与其相关的环或非规则超链匹配。由于超树不含任何超环,则匹配结果与一个合理的离散梯度向量域相对应。

构建生成树时采用合并/查找的结构,该结构可将组成部分的数目赋予每个单元。对超树而言,如果超链数目增加,则节点数目会减少。因此,为使算法更优,需尽量选择最多数量的超链。选择超图的单元构造离散梯度向量域时采用了贪婪算法。首先,对于每个规则超链,检验它是否与一个或者二个部分连接,因为要构造超树,先选择它,同时更新合并/查找结构。此时,树的相连成分就是超树的规则成分。然后,处理超图的每一个环。给超树增加环,要求每个规则成分最多增加一个环。最后,处理不规则超链。选择超图单元的流程如图3所示。

图3 选择超图单元流程

图3 选择超图单元流程: 构造规则成分的生成树 -> 为超树的规则成分增加环 -> 处理不规则超链

对于每个不规则超链lkB的右边,首先必须测试它是否与临界部分相关。要求选中的临界部分仅共享lk的一个节点。因此,需要将lkB添加到超树,同时去移除该部分的临界地位(即临界状态)。因为临界部分多样相关于每个与之相关的临界成分,所以只要有临界部分,就必须测试不规则超链直

到可以添加它或者移除它的临界地位为止。

### 3 可视化

Moebius 带。仅仅将单位正方形  $I^2 = [0,1]$  中的一对竖直的对边上的每一对点  $(0, y)$  和  $(1, -y)$  粘合,也就是将正方形的一对对边经过一次翻转再粘合,所得到的拓扑空间就是 Moebius 带。如图 4(a)和图 4(b)所示。

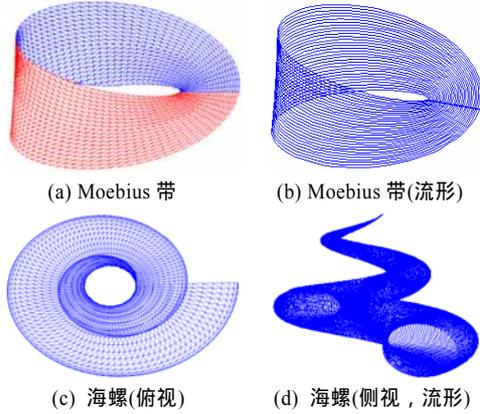


图 4 可视化演示结果

在图 4(a)中,为了更清楚表现 Moebius 带的拓扑结构,假设图 4(a)所用的单位正方形为两面异色的(一面红,另一面蓝),并做了消隐处理,从图中可以很容易看出 Moebius 带是由一两面异色的纸带扭转拼接而成。图 4(b)是采用流线方法实现的流形图,为了表现其流形,没有做消隐处理。

图 4(c)和图 4(d)为海螺的可视化结果。出于同样的目的,图 4(c)做了消隐处理。图 4(d)没有做消隐处理。

以上给出了两种方法的演示结果。可以得出以下结论:利用基于离散梯度向量域的方法演示的图更能够表现对象的拓扑结构,证明它是更为有效的。

实验主要研究了几何对象和理论模型拓扑结构的可视化,以上给出用离散梯度向量域方法实现的两种比较具有代表性的拓扑结构的可视化结果,该方法为研究可视化提供了

进行试验及预测理论对象视觉映像的一种可行的实用方法。对于几何对象或理论模型,只给出其抽象描述往往难以理解,抽象对象的可视化结果能够给人直接的视觉感受。特别对于空间对象而言,因为梯度域表示了小单元的合并,所以较之流形方法,离散梯度向量域方法能够更清楚地表现其在空间的翻转和扭曲。可将该方法应用于计算机辅助设计和虚拟模拟的演示,计算机和拓扑学的辅助教学。为节点的数据结构加上能量信息,还可以表示能量场,可应用于 GIS。

### 4 结束语

实验采用硬件直接支持 OpenGL 实现,使得算法和响应速度较高。所采用的基于离散梯度向量域的可视化方法,经过实验,证明了其有效性和可行性。因为拓扑对象和理论模型可以是高维的,比如在四维空间才可以真实存在的 Klein 瓶<sup>[7]</sup>。因为基于离散梯度向量域的可视化方法的维数没有限制,所以理论上可以把它扩展到四维及更高维对象的可视化应用。这也正是作者下一步打算要做的工作。

#### 参考文献

- 1 Lewiner T. Constructing Discrete Morse Functions[J]. MS Thesis, 2002, 6(6): 44-56.
- 2 Lewiner T, Lopes H, Tavares G. Applications of Forman's Discrete Morse Theory to Topology Visualization and Mesh Compression[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2004, 5(10): 499-508.
- 3 Dey T K, Edesbrunner H, Guha S. Computational Topology[J]. Advances in Discrete and Computational Geometry, 1999, 3(6): 109-143.
- 4 Lewiner T, Lopes H, Tavares G. Toward Optimality in Discrete Morse Theory[J]. Experimental Math, 2003, 3(12): 271-285.
- 5 Forman R. A Discrete Morse Theory Functions[J]. Advances in Math, 2002, 4(4): 66-78.
- 6 徐森林. 微分拓扑[M]. 天津: 天津教育出版社, 2004.
- 7 斯蒂芬·巴尔. 拓扑实验[M]. 上海: 上海教育出版社, 2003.

(上接第 209 页)

后曲面的等高斯曲率线图。结果表明此算法可以改善光顺前后曲面的等高斯曲率线图的平滑状况,使新曲面的光顺状况得到显著改进。

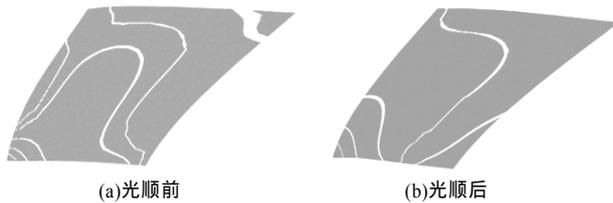


图 1 光顺前后曲面等高斯曲率线

### 6 结论

针对以上对问题的具体分析,有以下结论:

(1)将对曲面的光顺过程变为对修改矩阵的确定过程,可以使设计者摆脱对具体运算过程的纠缠,面对的只是一个与曲面点对应的矩阵;可以随意地完成对曲面的光顺处理。

(2)对曲面的曲率彩图,如果利用图形处理软件进行处理之后可以方便地得到修改矩阵,从而可以比较快捷地得到与之对应的修改曲面。

#### 参考文献

- 1 Andersson K. Surface with Prescribed Curvature [J]. Computer Aided Geometric Design, 1993, 10(3): 431-452.
- 2 Zhang C, Zhang P, Frank. Fairing Spline Curves and Surface by Minimizing Energy[J]. Computer Aided Design, 2001, 33(12): 913-923.
- 3 Farin G, Sapidis N. Curvature and the Fairness of Curves and Surfaces[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1989, 9 (1): 52-57.
- 4 Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design —A Practical Guide(3<sup>rd</sup> Ed.)[M]. New York: Academic Press, 1993.
- 5 Ferguson D R, Frank P D, Jones A K. Surface Shape Control Using Constrained Optimization on the B-spline Representation[J]. Computer Aided Geometric Design, 1988, 5(1): 87-103.
- 6 Higashi M, Kushimoto T, Hosaka M. On Formulation and Display for Visualizing Features and Evaluating Quality of Free-form Surface[C]. EUROGRAPHICS'90, North-Holland, 1990: 299-309.
- 7 Sapidis N S, Frey W H. Controlling the Curvature of Quadratic Bézier Curve[J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(2): 85-91.