短 文

密度非均匀分布具自反馈控制捕鱼系统平衡态的稳定性[1)]

谢胜利

(湖北荆州师范专科学校，江陵 434100)

摘 要

本文对含有常时滞和连续时滞而密度非均匀分布具自反馈控制的 Logistic 捕鱼系统进行了讨论，并通过构造 Liapunov 泛函，给出了系统平衡态稳定的一些充分判据.

关键词： 密度分布非均匀，自反馈控制，捕鱼系统，正平衡态，稳定性.

一、引 言

假定在某个公共水域中，鱼的捕捞不是按严格的计划经济进行的，而是自由捕捞．捕鱼量的大小，只受价值规律来控制．鱼的市场价格高，捕鱼者自然增加，从而捕鱼量也就增多．捕捞的鱼多，鱼的市场价格就会下降，从而捕鱼者又减少．因此鱼的密度和捕鱼能力之间是一个自反馈控制，可用如下模型描述[1]：

$$\begin{cases} dN(t)/N(t)dt = F(N(t)) - E(t), \\ dE(t)/E(t)dt = K(PN(t) - C). \end{cases} \tag{1.1}$$

在(1.1)式中，假定3鱼种群在水域中的密度是均匀分布的．若所考虑的水域很大，则其密度分布不一定是均匀的，这样高密度位置的鱼群就要向低密度位置扩散，鱼的密度不仅是时间的函数而且是空间坐标的函数．从而反映在数学模型上，就必含有扩散项[2-8]，故模型(1.1)要相应的修改为

$$\begin{cases} \partial N(x,t)/N(x,t)\partial t = F(N(x,t)) - E(x,t) + d\Delta N(x,t), \\ \partial E(x,t)/E(x,t)\partial t = K(PN(x,t) - C). \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $N(x,t)$ 是鱼种群在时刻 t 时水域中的密度分布，$N(x,t)F(N(x,t))$ 是鱼的自然增长率，$E(x,t)$ 是当时的捕鱼能力，P 是捕单位重量鱼所得到的利润，C 是单位能力所付出的代价(成本费)，$d\Delta N(x,t)$ 表示种群密度的扩散．Δ 是 R^3 中的开区域 $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3);|x_i| < m, i = 1,2,3\}$ 上的 Laplace 算子 $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \partial^2/\partial x_i^2$；$\Omega$ 有光滑的边界 $\delta\Omega$.

本文于1991年4月1日收到.

1) 国家自然科学基金资助项目.

此外，鱼种群的当前密度增长率要依赖于以前的密度．故应考虑如下三种模型：

具常时滞的自反馈控制 Logistic 模型

$$\begin{cases}\partial N(x,t)/N(x,t)\partial t = a + b_1N(x,t) + b_2N(x,t-\tau) + d\Delta N(x,t) - E(x,t),\\ \partial E(x,t)/E(x,t)\partial t = K(PN(x,t) - C).\end{cases} \tag{1.3}$$

具弱连续时滞的自反馈控制 Logistic 模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N(x,t)}{N(x,t)\partial t} = d\Delta N(x,t) + a + bN(x,t) - f\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-l(t-s)}N(x,s)\mathrm{d}s - E(x,t),\\ \dfrac{\partial E(x,t)}{E(x,t)\partial t} = K(PN(x,t) - C).\end{cases} \tag{1.4}$$

具强连续时滞的自反馈控制 Logistic 模型

$$\begin{aligned}\frac{\partial N(x,t)}{N(x,t)\partial t} &= d\Delta N(x,t) + a - bN(x,t)\\ &\quad - f\int_{-\infty}^{t}(t-s)e^{-l(t-s)}N(x,s)\mathrm{d}s - E(x,t),\\ \frac{\partial E(x,t)}{E(x,t)\partial t} &= K(PN(x,t) - C).\end{aligned} \tag{1.5}$$

本文将采用 Liapunov 泛函方法，对系统(1.3)—(1.5)的平衡态进行稳定性分析．

二、结论与证明

首先考虑系统(1.3)，其相应的初边值条件为

$$\begin{cases}N(x,s) = \varphi(x,s),(x,s)\in \Omega x[-\tau,0],\varphi(x,0) > 0, E(x,0) > 0,\\ \varphi\in C(\Omega\times[-\tau,\infty),R^+),\partial N(x,t)/\partial n = 0,(x,t)\in\delta\Omega\times[-\tau,\infty),\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 n 为 Ω 边界 $\delta\Omega$ 上的单位外法向量．

定理 1．在(1.3)式中，若 K、P、C、d 是正数，且

$$\frac{d}{h^2} - b_1 > 0,\ \left(b_1 - \frac{d}{h^2}\right)^2 - b_2^2 > 0,\ a + \frac{C}{P}(b_1 + b_2) > 0,$$

则其所有正解 $N(x,t)$ 均满足

$$\lim_{t\to\infty}\|N(x,t) - N^*\|_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{2.2}$$

其中 $N^* = \dfrac{C}{P}$，$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \{\int_\Omega|\cdot|^2\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}}$，$h = m/\sqrt{3}$．

证明．对 $N(x,t) > 0, E(x,t) > 0$ 作代换

$$p(x,t) = \log(N(x,t)/N^*), q(x,t) = \log(E(x,t)/E^*), \tag{2.3}$$

其中 $E^* = a + \dfrac{C}{P}(b_1 + b_2)$，则(1.3)式可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t}=dN^*\Delta(e^{p(x,t)})+b_1N^*(e^{p(x,t)}-1)+b_2N^*(e^{p(x,t-\tau)}-1)\\ \qquad\qquad -E^*(e^{q(x,t)}-1),\\ \dfrac{\partial q(x,t)}{\partial t}=PKN^*(e^{p(x,t)}-1).\end{cases}\tag{2.4}$$

由 $r_1=\dfrac{d}{h^2}-b_1>0$ 及 $r_2=\left(b_1-\dfrac{d}{h^2}\right)^2-b_2^2>0$，可选取 $\sigma\in(r_1,r_1+\sqrt{r_2})$，对 (2.4) 式构造 Liapunov 泛函

$$V_1(t)=\frac{1}{PK}\int_\Omega\int_0^{q(x,t)}E^*(e^s-1)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_\Omega\int_0^{p(x,t)}N^*(e^s-1)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$+\sigma\int_\Omega\int_{t-\tau}^{t}[N^*(e^{p(x,s)}-1)]^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x,\tag{2.5}$$

V_1 沿着(2.4)式的解的导数为

$$\dot V_1(t)=\frac{1}{PK}\int_\Omega E^*(e^{q(x,t)}-1)\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x+\int_\Omega N^*(e^{p(x,t)}-1)\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$$
$$+\sigma\int_\Omega[N^*(e^{p(x,t)}-1)]^2\mathrm{d}x-\sigma\int_\Omega[N^*(e^{p(x,t-\tau)}-1)]^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega d(N^*)^2(e^{p(x,t)}-1)\Delta(e^{p(x,t)})\mathrm{d}x+b_1\int_\Omega[N^*(e^{p(x,t)}-1)]^2\mathrm{d}x$$
$$+b_2\int_\Omega(N^*)^2(e^{p(x,t)}-1)(e^{p(x,t-\tau)}-1)\mathrm{d}x$$
$$+\sigma\int_\Omega[N^*(e^{p(x,t)}-1)]^2\mathrm{d}x-\sigma\int_\Omega[N^*(e^{p(x,t-\tau)}-1)]^2\mathrm{d}x,\tag{2.6}$$

令 $W(x,t)=e^{p(x,t)}-1$，则

$$(e^{p(x,t)}-1)\Delta(e^{p(x,t)})=W(x,t)\Delta W(x,t),\tag{2.7}$$

而由(2.3)式知，$W(x,t)=\dfrac{1}{N^*}(N(x,t)-N^*)$，则 $\dfrac{\partial N}{\partial n}\Big|_{\delta\Omega}=0$ 蕴含 $\dfrac{\partial W}{\partial n}\Big|_{\delta\Omega}=0$。从而由散度定理[9]

$$\int_\Omega(\nabla W\nabla W+W\Delta W)\mathrm{d}x=\int\!\!\int_{\delta\Omega}W\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}S,\tag{2.8}$$

其中∇是梯度算子，则

$$\int_\Omega W\Delta W\mathrm{d}x=-\int_\Omega|\nabla W|^2\mathrm{d}x,\tag{2.9}$$

再由 Poincaré 不等式[10]知

$$\int_\Omega|W|^2\mathrm{d}x\leqslant h^2\int_\Omega|\nabla W|^2\mathrm{d}x,\ (h=m/\sqrt{3}),\tag{2.10}$$

则

$$\int_\Omega d(N^*)^2(e^{p(x,t)}-1)\Delta(e^{p(x,t)})\mathrm{d}x\leqslant-\int_\Omega\frac{d(N^*)^2}{h^2}(e^{p(x,t)}-1)^2\mathrm{d}x,\tag{2.11}$$

故(2.6)可化为

$$\dot V_1\leqslant\int_\Omega U(x,t)AU^T(x,t)\mathrm{d}x,\tag{2.12}$$

其中 $U(x,t)=[N^*(e^{p(x,t)}-1),N^*(e^{p(x,t-\tau)}-1)]$,

$$A=\begin{pmatrix}-(d/h^2)+b_1+\sigma & b_2/2\\ b_2/2 & -\sigma\end{pmatrix},$$

因为当 $r_2>0$ 时,方程 $\sigma^2-r_1\sigma+\frac{1}{4}b_2^2=0$ 有两个实根 $\sigma_{1,2}=r_1\pm\sqrt{r_2}$. 从而当 $\sigma\in(r_1,r_1+\sqrt{r_2})$ 时, $\sigma^2-r_1\sigma+\frac{1}{4}b_2^2<0$, 即 $-\sigma(\sigma-r_1)-\frac{1}{4}b_2^2>0$, 而此式蕴含着 $\sigma-r_1<0$。但由

$$\sigma-r_1=-\frac{d}{h^2}+b_1+\sigma<0,-\sigma\left(-\frac{d}{h^2}+b_1+\sigma\right)-\frac{1}{4}b_2^2>0 \tag{2.13}$$

知,A 是负定的. 设 $l>0$ 是 $-A$ 的最小特征值,则

$$U(x,t)AU^T(x,t)\leqslant -l\|U(x,t)\|^2\leqslant -l|N^*(e^{p(x,t)}-1)|^2, \tag{2.14}$$

从而

$$\dot V_1\leqslant -l\int_\Omega |N^*(e^{p(x,t)}-1)|^2\mathrm{d}x, \tag{2.15}$$

积分(2.15)式有

$$V_1(t)+l\int_0^t\int_\Omega |N^*(e^{p(x,s)}-1)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant V_1(0), \tag{2.16}$$

由 $V_1(0)$ 的有界性及 $V_1(t)$ 的非负性知,积分

$$\int_0^t\left\{\int_\Omega |N^*(e^{p(x,s)}-1)|^2\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}s=\int_0^t\left\{\int_\Omega |N(x,s)-N^*|^2\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}s \tag{2.17}$$

是收敛的. 由此可推得

$$\lim_{t\to\infty}\|N(x,t)-N^*\|_{L^2(\Omega)}=0. \tag{2.18}$$

对模型(1.4),(1.5),其初边值条件应为

$$\begin{cases}N(x,s)=\varphi(x,s),(x,s)\in\Omega\times(-\infty,0],\ \varphi(x,0)>0,E(x,0)>0;\\ \varphi\in C(\Omega\times(-\infty,\infty),[0,+\infty)),\partial N(x,t)/\partial n=0,(x,t)\in\delta\Omega\times(-\infty,\infty).\end{cases} \tag{2.19}$$

类似于定理 1 可得到

定理 2 在模型(1.4)中,若 K、P、C、d 是正数,且

$$a+\frac{bC}{P}-\frac{Cf}{Pl}>0,\frac{d}{h^2}-b>0,$$

则其所有正解 $N(x,t)$ 均有

$$\lim_{t\to\infty}\left\|N(x,t)-\frac{C}{P}\right\|_{L^2(\Omega)}=0.$$

定理 3 在模型(1.5)中,若所有参数是正的,且 $2bl^2>f,a-\frac{bC}{P}-\frac{Cf}{Pl^2}>0$, 则其所有正解 $N(x,t)$ 均有

$$\lim_{t\to\infty}\left\|N(x,t)-\frac{C}{P}\right\|_{L^2(\Omega)}=0.$$

对定理 2 和定理 3 只须考虑 Liapunov 泛函

$$V_2(t)=\int_\Omega\int_0^{p(x,t)}N^*(e^s-1)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\frac{1}{PK}\int_\Omega\int_0^{q(x,t)}E^*(e^s-1)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{f}{2}(u(x,t)-u^*)^2\mathrm{d}x,\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}V_3(t)=&\int_\Omega\int_0^{p(x,t)}N^*(e^s-1)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_\Omega\Big[lf(h(x,t)-h^*)^2\\&+\frac{bl}{2}(u(x,t)-\hat{u})^2+f(h(x,t)-h^*)(u(x,t)-\hat{u})\Big]\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{PK}\int_\Omega\int_0^{\hat{q}(x,t)}\hat{E}(e^s-1)\mathrm{d}s\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.21}$$

其中

$$\begin{cases}p(x,t)=\log(N(x,t)/N^*),q(x,t)=\log(E(x,t)/E^*),\\ \hat{q}(x,t)=\log(E(x,t)/\hat{E}),u(x,t)=\int_{-\infty}^t e^{-l(t-s)}N(x,s)\mathrm{d}s,\\ h(x,t)=\int_{-\infty}^t(t-s)e^{-l(t-s)}N(x,s)\mathrm{d}s,N^*=\dfrac{C}{P},u^*=\dfrac{C}{Pl},\\ E^*=a-\dfrac{bC}{P}-\dfrac{fC}{Pl},\ \hat{E}=a-\dfrac{bC}{P}-\dfrac{fC}{Pl^2},h^*=\dfrac{C}{Pl^2},\hat{u}=\dfrac{C}{Pl}.\end{cases}\tag{2.22}$$

对模型(1.3)—(1.5)，类似于文[11]和[12]的方法可进一步的改善其结果．另外也可类似考虑

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N(x,t)}{\partial t}=d\Delta N(x,t)+N(x,t)[a+b_1N(x,t)+b_2N(x,t-\tau)-E(x,t)],\\ \dfrac{\partial E(x,t)}{\partial t}=KE(x,t)(PN(x,t)-C).\end{cases}\tag{2.23}$$

及对应于式(1.4)，(1.5)的相应模型，此将另文讨论．

参 考 文 献

[1] 陈兰荪，数学生态学的基本理论和研究方法，科学出版社，1988.
[2] Zhou, L. and Pao, C.N., Asymptotic Behavior of a Competition-Diffusion System in Population Dynamics, *Nonlinear Anal.*, **6**(1982), (12), 1163—1184.
[3] 谢胜利，一类含时滞的抛物型偏泛函微分方程解的稳定性，科学通报，**36**(1991)，(18)，1433—1434.
[4] 谢胜利，密度分布非均匀的反馈控制模型平衡态的稳定性，科学通报，**37**(1992)，(3)，172—173.
[5] 谢胜利，混合型偏泛函微分方程解的稳定性，青年微分方程论文集，科学出版社，1991.
[6] Zhou Li, Song Kaitai, The Analysis of Hopf Bifurcation for a Prey-Predator System With Diffusion and Delay, *Acta Mathematica Scientia*, **11**(1991), (2), 73—80.
[7] 何猛省，抽象泛函微分方程解的稳定性，数学学报，**32**(1989)，(1)，91—97.
[8] 何猛省，抽象泛函微分方程的周期解和概周期解，数学学报，**33**(1990)，(2)，205—212.
[9] 吉耳巴格，塔丁格著，叶其孝等译，二阶椭圆型偏微分方程，上海科技出版社，1981.
[10] Bers, L., Joho, F. and Schechter, Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc., Providence. Rhode Island, 1964.
[11] 谢胜利，一类含时滞的偏泛函微分方程解的稳定性，科学通报，37(1992)，(14)，1042—1046.
[12] 谢胜利，具有扩散的m维 Lotka-Volterra 滞后生态模型平衡态的扇型稳定性，控制理论与应用，待发表.

THE STABILITY OF POSITIVE STEADY STATE OF THE NON-HOMOGENEOUS DENSITY DISTRIBUTION FISH-CATCHING SYSTEMS WITH FEEDBACK CONTROL

Xie Shengli

(*Jingzhou Teacher's College, Jiangling, Hubei* 434100)

Abstract

In this paper, we discuss the stability problem of the positive steady state of the non-homogeneous density distribution logistic fish-catching systems with feedback control and time-delays, and give some sufficient conditions of stability via Liapunov functional approach.

Key words: Non-homogeneous density distribution, feedback control, fish-Catching system; positive steady state, stability.

IFAC TS'94 征文

国际自控联 IFAC 第七届交通系统工程学术讨论会征文

IFAC TS'94 将于 1994 年 7 月26—28日在天津召开. 组织委员会主席为李光泉教授,国际程序委员会双主席分别为法国国家交通安全研究所 J. M. Blosseville 博士和天津大学刘豹教授.

会议宗旨: IFAC TS'94 是 IFAC 系列会议——交通系统学术讨论会的第七届会议,上届会议是 1989 年在巴黎召开的 (CCCT'89), 得到很好的效果. 本届会议宗旨是将交通系统系列学术会议扩展,交流各种交通系统控制方面的研究和发展中经验,同时也检查和探讨在控制信息系统、人工智能、知识基础与新型材料方面的新理论和新技术如何用来推动交通系统的规划、设计、建造、操作和维护.本会既欢迎大学师生、研究所工作人员,也欢迎与各类交通系统有关工作的专家们参加. 本会将组织论述现代交通系统工程各控制领域的现况其发展的综述论文, 邀请以多学科和交互学科方法解决复杂而难解决的交通系统问题的论文, 也欢迎应用先进计算机技术与交通系统规划人员和设计人员交互作用的新想法和经验方向的论著.

会议论文领域:

1. 在各种交通领域的实时控制与监督: 1.1 道路交通; 1.2 导航系统; 1.3 船运;1.4 空运.

2. 新型交通模型　3. 在各类交通领域中应用的先进通信系统

4. 先进的交通测量仪器及传感器　5. 大规模或先进交通管理系统 (下转第238页)