第42卷第1期　　原 子 能 科 学 技 术　　Vol. 42, No. 1
2008年1月　　Atomic Energy Science and Technology　　Jan. 2008

裂变链初期增长过程的统计涨落现象研究

郑　春，宋凌莉
（中国工程物理研究院 核物理与化学研究所，四川 绵阳　621900）

摘要：利用超临界系统达到临界后 t 时刻中子密度 n 的概率分布 $P(n,t)$ 与系统内的中子源强度的关系，结合从第 1 个持续裂变链开始到系统的中子密度达到定值的时间分布，得到从系统达到临界开始到系统的中子密度达到定值的时间分布，并与 Godiva 的功率增长过程和 BARS 的脉冲提前引发概率的实验结果进行了比较，相互符合较好。该研究结果可用于脉冲堆安全分析、临界安全研究和反应堆启动程序制定等。

关键词：统计涨落；临界系统；中子增殖；裂变链；临界安全
中图分类号：TL375.2　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1000-6931(2008)01-0010-05

Statistical Fluctuation Phenomenon of Early Growth Fission Chain

ZHENG Chun, SONG Ling-li
(*China Academy of Engineering Physics*, *P. O. Box* 919-210, *Mianyang* 621900, *China*)

Abstract: The early growth of neutron population within a supercritical system of fissile material is of a statistical nature and may depart significantly from the average time dependence neutron population. The probability of a source neutron sponsoring a persistent fission chain was considered for a supercritical system. Then the probability distribution in time of the neutron population reaching a preset level was deduced based on the probability $P(n,t)$ of n neutron at time t. By combing the above two probabilities, the probability that at time t after the system reached critical there were n_0 neutron in the system was derived. The $P(t)$ of Godiva neutron excursion at supercritical, and the pre-burst probability of BARS were calculated by this model, and were found agree with the experiment result.

Key words: statistical fluctuation; critical configuration; neutron multiplication; fission chain; criticality safety

在超临界核系统中，外中子源尤其是弱强度外中子源的统计涨落现象使得从外中子源放出中子时刻开始形成的中子裂变链的引发过程和初期发展过程具有显著的统计涨落。裂变链引发和初期发展过程的涨落现象反映在数学上为系统中实际的随时间变化的中子密度 $n(t)$ 会偏离描写平均值的由中子动态学方程确定的解$\bar{n}(t)$[1]，$n(t)$偏离$\bar{n}(t)$的程度不仅与系统的性

收稿日期：2006-08-08；**修回日期：**2007-01-16
作者简介：郑　春(1971—)，男，四川射洪人，副研究员，博士，辐射测量和核临界安全专业

质相关,还取决于外中子源的强弱。外中子源强度越弱,涨落现象越显著,中子密度 $n(t)$ 偏离满足中子动态学方程的解 $\overline{n}(t)$ 的程度越严重。

对反应性随时间变化的超临界核系统,例如快中子脉冲堆爆发脉冲和发生临界事故时,中子群体初期发展过程的统计涨落直接影响总裂变产额或裂变能量当量。因此,研究弱中子源引发裂变链的统计涨落,可为快中子脉冲堆的安全分析、临界安全研究和反应堆启动程序设计等提供参考。

1960 年,Hansen[1] 在理论上分析了快中子脉冲堆 Godiva 超临界的功率增长过程与中子源强度的关系,在假设中子源强度为实际中子源强度的 10 倍左右的情况下,解释了部分现象。Wimett 等[2] 则在假设中子源强度为实际中子源强度的 3 倍的情况下,在概率母函数的基础上引入一个半经验公式,解释了 Godiva 爆发脉冲的引发时间。1997 年,Spriggs 等[3] 对 Hansen 和 Wimett 的中子源强度的假设进行了理论分析。2000 年,Nolen[4] 对中子引发裂变链的长度分布进行了研究。本文在 Hansen 提出的一个中子引发持续裂变链概率 W 的基础上[1],推导超临界系统中中子密度达到给定值 n_0 的时刻 t 的概率密度 $P(n_0,t)$,并与实验结果进行比较。

1　中子密度达到定值时间的概率密度

假设一不断加入反应性达到超临界的核系统的临界为 0 时刻,分析系统的中子密度达到某一定值 n_0 的时刻 t 的概率密度。Hansen[1] 定义系统中某时刻 t 产生的 1 个中子在产生后引发持续裂变链的概率为 W,有:

$$W \approx 2\left(\frac{k-1}{k}\right)\frac{1}{\bar{\nu}D_\nu} \approx \frac{2\Delta k}{\bar{\nu}D_\nu}$$

$$0 < \Delta k \ll 1 \tag{1}$$

$$W = 0 \quad \Delta k \leqslant 0 \tag{2}$$

式中:k 为中子增殖系数,$\Delta k = k-1$,$\Delta k/k$ 为反应性;$\bar{\nu}$ 为每次裂变释放的平均中子数;D_ν 为 Diven 因子;对于各种裂变材料,$2/(\bar{\nu}D_\nu)\approx 1$。

根据实际的物理过程,将时间 t 分为两部分:第 1 个持续裂变链产生的时间 t_1 和从第 1 个持续裂变链开始到中子密度达到定值的时间 t_2。

考虑在强度为 S 的外中子源情况下,假设反应性为阶跃加入,Hansen[1] 推导得出:

$$P(t_1)\mathrm{d}t_1 = \mathrm{e}^{-WSt_1}WS\mathrm{d}t_1 \tag{3}$$

Williams[5] 在 Hansen 的基础上推导了 0 时刻产生 1 个持续裂变链后,系统中 t 时刻有 n 个中子的概率 $P(n,t)$ 为:

$$P(n,t) \approx \left(1-\frac{2\Delta k}{\bar{\nu}D_\nu}\right)\delta_{n,0} + (1-\delta_{n,0})\frac{2\Delta k}{\bar{\nu}D_\nu}\left\{\frac{2\Delta k}{\bar{\nu}D_\nu}\exp\left(-\frac{\Delta kt}{\tau}\right)\cdot \exp\left[-\frac{2\Delta kn}{\bar{\nu}D_\nu}\exp\left(-\frac{\Delta kt}{\tau}\right)\right]\right\} \tag{4}$$

式中:$\delta_{n,0}$ 为狄拉克函数;τ 为中子寿命。

考虑到 1 个源中子引发持续裂变链的概率 $W\approx 2\Delta k/(\bar{\nu}D_\nu)$,式(4)具有如下形式:

$$P(n,t) = (1-W)\delta_{n,0} + (1-\delta_{n,0})WP_\mathrm{p}(n,t) \tag{5}$$

式中:$P_\mathrm{p}(n,t)$ 表示在 $t=0$ 时刻引发持续裂变链的条件下在时刻 t 出现 n 个中子的概率。

定义 $\alpha=\Delta k/\tau$,将式(4)与(5)比较,得到:

$$P_\mathrm{p}(n,t) \approx \frac{2\Delta k}{\bar{\nu}D_\nu}\exp(-\alpha t)\exp\left[-\frac{2\Delta kn}{\bar{\nu}D_\nu}\cdot \exp(-\alpha t)\right] \approx W\exp(-\alpha t)\cdot \exp[-nW\exp(-\alpha t)] \tag{6}$$

式中:$P_\mathrm{p}(n,t)\Delta n$ 表示在 $t=0$ 时刻引发持续裂变链的条件下在 t 时刻中子数落在 n 附近 Δn 范围内的概率,如果忽略在中子数比较大以后不同持续裂变链的中子数增长的统计涨落,即认为在中子数比较大以后不同持续裂变链的中子数均按照 $n'\exp[\alpha(t-t')]$ 的形式增长(这里 n' 表示在 $t=t'$ 时刻持续裂变链的中子数),那么,$P_\mathrm{p}(n,t)\Delta n$ 也表示持续裂变链的中子数在时刻 t 附近的时间间隔 $\Delta t=(\Delta n/n)(1/\alpha)$ 内达到数目 n 的概率 $P_2(n,t)\Delta t$,有:

$$P_\mathrm{p}(n,t)\Delta n \approx P_2(n,t)\Delta t = P_2(n,t)(\Delta n/n)(1/\alpha) \tag{7}$$

$$P_2(n,t) \approx \alpha n P_\mathrm{p}(n,t) \tag{8}$$

因此,有:

$$P_2(n,t) \approx n\alpha W\exp(-\alpha t)\cdot \exp[-nW\exp(-\alpha t)] \tag{9}$$

$P_2(n,t)$ 对 t 的偏导数为:

$$\partial P_2(n,t)/\partial t \approx nW\alpha^2\exp(-\alpha t)\exp[-nW\cdot \exp(-\alpha t)][nW\exp(-\alpha t)-1] \tag{10}$$

从式(10)易看出,令 t_0 满足以下条件:

$$n_0 = \frac{1}{W}\exp(\alpha t_0) \tag{11}$$

则在 $t=0$ 时刻有1个持续裂变链，在 t 时刻单位时间内中子密度达到 n_0 的概率为：

$$P_2(n_0,t)n_0 \approx \exp(-\alpha(t-t_0)) \cdot \exp[-\exp(-\alpha(t-t_0))] \tag{12}$$

设定常系统中有强度为 S 的独立中子源。于是，单位时间内在系统内所引发的独立持续裂变链的数目的期望值为 WS，因此，在第1个持续裂变链 t_1 后的 t 时刻 $\mathrm{d}t$ 时间内，引发持续裂变链的概率为 $WS\mathrm{d}t$。在 t_1 后，中子数按指数上升。

由于中子源是独立的，因此，在第1个持续裂变链发生后引发另1个持续裂变链是独立的，假设第1个持续裂变链的开始时刻为 t_{01}，第1个持续裂变链开始的中子密度为 A_p，则 t 时刻的中子密度为：

$$n(t) = A_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\alpha(t-t_{01})} \tag{13}$$

从 t_{01} 开始，t_{11} 时刻附近 $\mathrm{d}t_{11}$ 时间内引起持续裂变链的概率为 $WS\mathrm{d}t_{11}$，则中子密度的变化是由这些独立的持续裂变链开始独立的上升，总的中子密度应为所有的裂变链开始的中子密度之和，有：

$$n(t) = \int_{t_{01}}^{t} A_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\alpha(t-t_{11})}WS\mathrm{d}t_{11} \tag{14}$$

在 t_0 时刻，则有：

$$n(t_0) = \int_{t_{01}}^{t_0} A_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\alpha(t_0-t_{11})}WS\mathrm{d}t_{11} \tag{15}$$

为计算 t_0，令 $t_{01}=0$，即假设第1个持续裂变链在0时刻被引发。则有：

$$n(t_0) = A_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\alpha t_0}\ \frac{WS}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t_0}) \tag{16}$$

令

$$\begin{aligned} n(t_0) &= n_0 \\ x &= \mathrm{e}^{\alpha t_0} \end{aligned} \tag{17}$$

则

$$\begin{aligned} n_0 &= A_\mathrm{p}x\left[\frac{WS}{\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] \\ t_0 &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{n_0\alpha}{A_\mathrm{p}WS}+1\right) \end{aligned} \tag{18}$$

根据式(12)，有：

$$P_2(n_0,t_2)n_0 = \mathrm{e}^{-\alpha(t_2-t_0)}\exp[-\mathrm{e}^{\alpha(t_2-t_0)}] \tag{19}$$

这样，可得在0时刻系统达到临界、t 时刻系统中子数达到 n_0 的时间分布为 P_1 和 P_2 的联合分布(t' 时刻产生的第1个持续裂变链在 $t-t'$ 时刻中子密度达到 n_0 的所有 t' 之和)，即：

$$P(n_0,t) = \int_0^t P_1(t')P_2(t-t')\mathrm{d}t' \tag{20}$$

由此可得到反应性阶跃增加后系统中中子数达到 n_0 的时刻 t 的概率分布为：

$$\begin{aligned} P(n_0,t)n_0 &= \int_0^t \mathrm{e}^{-WSt_1}WS\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0-t_1)} \cdot \\ &\exp[-\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0-t_1)}]\mathrm{d}t_1 = WS\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} \cdot \\ &\int_0^t \mathrm{e}^{(\alpha-WS)t_1}\exp[-\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0-t_1)}]\mathrm{d}t_1 \end{aligned} \tag{21}$$

2 实验检验

2.1 Godiva 脉冲实验

Godiva 脉冲实验的过程为：1) 缓发临界状态功率约1 W，测量系统所需的反应性；2) 在深次临界状态等待20 min，等待测量反应性阶段产生的缓发中子先驱核的衰减；3) 系统重新装配到接近缓发临界附近，等待15 s；4) 在20 ms时间内插入脉冲棒；5) 系统反应性为超缓发临界，等待脉冲的产生，记录脉冲的引发时间。共测量了116次脉冲的引发时间[2]。Godiva 的 $\bar{\nu}_\mathrm{p}=2.59$，$\tau=6\times10^{-9}$ s，$\Delta k=0.000\ 33$，$\alpha=1.05\times10^6\ \mathrm{s}^{-1}$。代入式(18)，可得到 $t_0=364\ \mu\mathrm{s}$。由此可见，从1个持续裂变链开始到中子密度达到定值的时间可忽略不计。因此，脉冲的引发时间主要取决于第1个持续裂变链的产生时间。则有：

$$P(n_0,t) = \mathrm{e}^{-WSt}WS \tag{22}$$

Godiva 的引发源主要是浓缩铀中的 ^{238}U 自发裂变产生的中子。Godiva 以 ^{235}U 含量为93.2%的金属浓缩铀为燃料，根据 ^{238}U 自发裂变半衰期和每次裂变产生的平均中子数计算出其中子发射率为90 s^{-1}，即 $S=90\ \mathrm{s}^{-1}$。计算得到的引发时间的平均值和均方差均为1.60 s。实验得到的引发时间的平均值和均方差分别为2.89和2.25 s。如果考虑到中子源的分布，假设等效中心中子源强度为60 s^{-1}，则计算得到的引发时间的平均值和均方差均为2.40 s，与实验值接近(图1)。

2.2 Godiva 超缓发临界实验

Gidiva 的超缓发临界运行实验共进行89次，测量了从系统达到超缓发临界到裂变率达

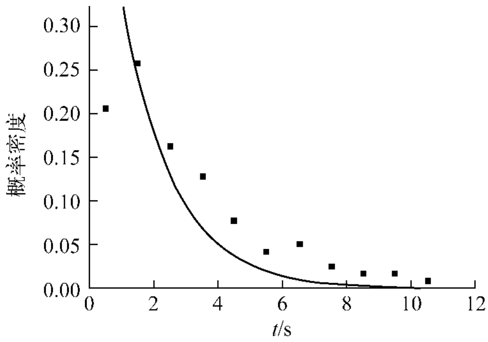

图1　Godiva 的脉冲引发时间

Fig. 1　Wait time of Godiva burst

■——实验值;实线——理论计算值

到定值的时间分布。前面的23次实验设定的裂变率为 $2.73\times10^{11}\ s^{-1}$,后面的66次为 $1.48\times10^{11} s^{-1}$。根据上升周期,将前面的23次的时间统一到裂变率达到 $1.48\times10^{11}\ s^{-1}$ 的时间[1,5]。

假设阶跃加入反应性,则有:

$$P(n_0,t)n_0=\int_0^t WS\exp(-WSt_1)\exp(-\alpha\cdot(t-t_0-t_1))\exp(-\exp(-\alpha(t-t_0-t_1)))\mathrm{d}t_1=WS\exp(-\alpha(t-t_0))\int_0^t\exp((\alpha-WS)t_1)\cdot\exp(-\exp(-(t-t_0-t_1)))\mathrm{d}t_1 \quad (23)$$

$$t_0=\ln\left(\frac{n_0\alpha}{A_{\mathrm{p}}WS}+1\right)/\alpha=27.2\ \mathrm{s} \quad (24)$$

计算的 Godiva 时间分布与实验的比较示于图2。计算的平均时间和均方差分别为30.6和3.36 s。根据 Hansen 采用的模型计算得到的平均时间和均方差分别为32.5和3.3 s[1]。实验得到的平均时间和均方差分别为31.9和6.26 s。

与实验相比较,理论计算得到的平均时间略低于实验值,而均方差小于实验值;增加中子源的强度,则平均时间更小,均方差也更小。由于中子源强度是通过浓缩铀材料的质量估算的,而采用的理论未考虑到中子源的分布。因此,可适当减小中子源的强度进行计算。假设中子源强度为 $60\ s^{-1}$,可计算得到平均时间和均方差分别为31.7和4.43 s。

综合分析发现,理论得到的均方差总比实验值小,而平均值很接近。这表明,实际的统计涨落比理论模型所设计到的统计涨落更大,有

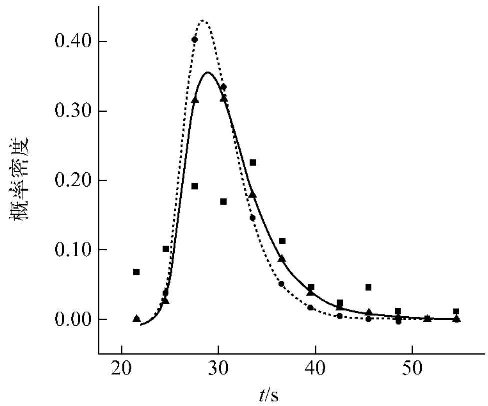

图2　Godiva 实验值与理论计算的延迟时间的分布比较

Fig. 2　Comparison between calculated and experiment delayed time for Godiva

■——Godiva 延迟时间的实验值;●——$S=90\ s^{-1}$ 的理论计算值;▲——$S=60\ s^{-1}$ 的理论计算值

可能一些涨落还未考虑在其中。如中子源发射中子的随机性,在理论计算中并未予以考虑。

2.3　脉冲堆提前引发脉冲的概率

脉冲堆在中子源强度很大、反应性加入速度不够大的情况下,可能在尚未达到最大反应性时脉冲就产生了,这就是提前引发。匀速 α 加入反应性后,参考文献[1]可推导出引发第1个持续裂变链的概率随时间的变化,为:

$$W(t)=\frac{\sqrt{\dfrac{8\alpha\tau}{\pi\,\bar{\nu}^2 D_\nu^2}}\exp\left(-\dfrac{\alpha t^2}{2\tau}\right)}{1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\dfrac{\alpha t}{2\tau}}\right)} \quad (25)$$

这样,第1个持续裂变链产生的时间概率分布为:

$$P_1(t_1)\mathrm{d}t_1=\exp\left[-\int_{-\infty}^{t_1}W(t')S\mathrm{d}t'\right]W(t_1)S\mathrm{d}t_1 \quad (26)$$

式(26)的积分不可积,需设定参数来采用数值积分。为与实验进行比较,采用俄罗斯 BARS 系列脉冲堆的参数。BARS 系列的脉冲堆在反应性加入速度为 $0.57\ s^{-1}$ 时,中子源强度为 $5\times10^7\ s^{-1}$,由此得到提前引发的概率约为8%(共进行了约1 000次实验,其中,92%的实验达到了预定产额 2×10^{17})。假设中子源强度为 $10^7\ s^{-1}$,则提前引发的概率为3%;中子源强度为 $5\times10^7\ s^{-1}$,则提前引发的概率为14%。实验得到的概率为8%在两者之间,符合较好。计算结果示于图3。

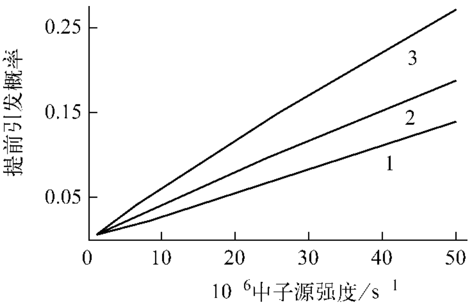

图 3 BARS 脉冲堆提前引发的概率随中子源强度的变化

Fig. 3 Calculation of BARS pre-burst probability at various neutron source intensities

反应性加入速度，s^{-1}：1——0.57；2——1.00；3——2.03

3 结论

超临界核系统中的功率增长过程与反应性加入速度和系统中的中子源强度密切相关，但因核反应的随机性，使得功率随时间的变化没有确定关系，而是服从一定的概率分布。通过裂变链的统计涨落研究，可为快中子脉冲堆的安全分析、临界安全研究和反应堆启动程序设计等提供参考。例如，核潜艇中不能使用强中子源来启动反应堆，则需控制反应性加入速度，以防止功率剧增。

参考文献：

[1] HANSEN G E. Assembly of fissionable material in the presence of a weak neutron source[J]. Nucl Sci Eng, 1960, 8: 709-718.

[2] WIMETT T F, WHITE R H, STRATTON W R, et al. Godiva Ⅱ: An unmoderated pulse-irradiation reactor[J]. Nucl Sci Eng, 1960, 8: 691-708.

[3] SPRIGGS G D, BUSCH R D, SAKURAI T, et al. The equivalent fundamental-mode source, LA-UR-97-1[R]. USA: LANL, 1997.

[4] NOLEN S D. The chain-length distribution in subcritical systems[D]. USA: LANL, 2000.

[5] WILLIAMS M R. Random processes in nuclear reactors[M]. Oxford: Pergamon Press, 1974: 50-58.