

关于铀水反应堆中的临界条件*

黄 祖 洽

本文推出了考虑到氢的慢化作用和铀的非弹性散射后,铀水均匀反应堆(无反射层时)的临界条件:

$$\frac{\eta_{\text{热}}\theta}{1 + \alpha^2 L_{\text{热}}^2} = 1.$$

本文还推导了只考虑铀的一次非弹性散射时 θ 的表示式。在 θ 的更完善的表示式中,所考虑的非弹性散射不限于一次,而可以有任意的次数。

一、引 言

大家都知道,在用含氢物质(普通水或有机液体)当作慢化剂的反应堆中,中子在每次和氢原子核进行弹性碰撞后,平均要失掉所带能量的一半。在这种情形下,中子的慢化过程当然不宜用建筑在连续慢化模型的基础上的费密年龄理论来描写。这是计算具有含氢慢化剂的反应堆的临界大小时所遇到的第一个问题。因为这时,熟知的根据年龄理论导出的临界条件

$$\frac{k_{\infty} e^{-\alpha^2 \tau}}{1 + \alpha^2 L^2} = 1 \quad (1)$$

已经不再适用了。上式中: k_{∞} , τ 及 L 分别为中子在反应堆增殖介质中的增殖系数、年龄及扩散长度; α^2 则为反应堆的拉氏参数。

另一方面,氢对中子的散射截面随中子能量的增加而很快减小这一事实,又使得用作反应堆燃料的铀或钚对快中子的非弹性散射,在中子的慢化过程中起着比较重要(相对于其它类型的堆来说)的作用。这也应当在临界条件中有所反映。

本文以无反射层的轻水均匀反应堆为例,从中子输运理论的 P_1 近似出发,比年龄理论更精确地考虑了氢的慢化作用,引进了铀的非弹性散射,并推出了适用于铀水反应堆的临界条件的解析形式。对于氢的慢化作用,本文的考虑与所谓瑟伦古特-戈尔策耳(Selengut-Goertzel)的方法相当,即只计及中子与氢碰撞时能量的有限损耗,而略去了能量损耗与散射角度间的关联。对于铀的非弹性散射,则采取复推的方法引进。结果中给出了略去二次及二次以上非弹性碰撞的显明表示式。在一般的情况下,一次非弹性碰撞的考虑便已经够了¹⁾。

为集中注意力起见,本文中略去了中子与非氢物质(如氧、铀等)进行弹性散射时能量的损耗。不难估计,这一近似在慢化能力上引起的误差约为百分之一左右。

本文中所用近似方法基本上反映了铀水混合介质中中子慢化过程的两个主要方面:氢的慢化和铀的非弹性散射。同时,方法的应用也不很复杂。这一点使得它除了在本文章中的应用以外,还有可能用到其它类似的问题(例如,中子在其它重元素与水的混合物中的慢化,铀水反应堆中控制棒效率的计算等)中去。

二、中子在铀水介质中的慢化

众所周知,在 P_1 近似中,中子输运方程可写为:

* 国家科学技术委员会于 1961 年 9 月 8 日收到。

1) 这一点已由更精确的计算证明(作者在 1961 年 8 月校对时注)。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{r}, u) + \sigma(u)\varphi_0(\mathbf{r}, u) &= \sum_i \int_0^u \sigma_{si}(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')f_{0i}(u-u')du' + \\ &+ \int_0^u \sigma_U(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')f(u, u')du' + S(\mathbf{r}, u), \\ \frac{1}{3} \nabla \varphi_0(\mathbf{r}, u) + \sigma(u)\varphi_1(\mathbf{r}, u) &= \sum_i \int_0^u \sigma_{si}(u')\varphi_1(\mathbf{r}, u')f_{1i}(u-u')du', \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $u \equiv \ln \frac{E_0}{E}$ 是中子的勒; E 是中子的能量; E_0 取为 10 兆电子伏; $\varphi_0(\mathbf{r}, u)$ 及 $\varphi_1(\mathbf{r}, u)$ 是中子通量分布函数 $\varphi_n(\mathbf{r}, u, \Omega)$ 对球谐函数的展开式中的头两项; σ 是介质的总宏观截面, $\sigma = \sum_i \sigma_{si} + \sigma_c + \sigma_U$; σ_c 为介质的总宏观吸收截面; σ_{si} 为成分 i 的弹性散射宏观截面, f_{0i} 及 f_{1i} 为相应指示函数对球谐函数的展开式的头两项; σ_U 为铀的非弹性散射宏观截面, $f(u, u')$ 为其指示函数(非弹性散射可认为是各向同性的); $S(\mathbf{r}, u)$ 为源强度的分布, 假设为各向同性.

若略去中子在与非氢物质弹性碰撞时的能量损耗, 则除

$$f_{0H}(z-u') = e^{-(z-u')}$$

外, $f_{0i \neq H}(u-u')$ 均可取为 $\delta(u-u')$. 其次, 略去弹性散射中能量损耗与散射角度间的关联, 就意味着在(2)式的第二式中作下列近似:

$$\begin{aligned} \int_0^u \sigma_{si}(u')\varphi_1(\mathbf{r}, u')f_{1i}(u-u')du' &= \sigma_{si}(u)\varphi_1(\mathbf{r}, u) \int_0^u f_{1i}(u-u')du' = \\ &= \begin{cases} \sigma_{sH}(u)\varphi_1(\mathbf{r}, u) \int_0^u e^{-\frac{2}{3}(u-u')}du' = \sigma_{sH}(u)\varphi_1(\mathbf{r}, u) \left(\overline{\cos\theta_H} - \frac{2}{3} e^{-\frac{3u}{2}} \right), \\ \sigma_{si}(u)\varphi_1(\mathbf{r}, u) \overline{\cos\theta_i}, & \text{对于 } i \neq H; \end{cases} \end{aligned}$$

式中 $\overline{\cos\theta_H} = \frac{2}{3}$, $\overline{\cos\theta_i}$ 为中子在成分 i 上散射角余弦的平均值.

作了上列近似后, 就可由(2)式中第二式解出 $\varphi_1(\mathbf{r}, u)$. 再代入(2)式中第一式, 便得到

$$\begin{aligned} -D(u)\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r}, u) + [\sigma_{sH}(u) + \sigma_c(u) + \sigma_U(u)]\varphi_0(\mathbf{r}, u) &= \\ = \int_0^u \sigma_{sH}(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')e^{-(u-u')}du' + \int_0^u \sigma_U(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')f(u, u')du' + S(\mathbf{r}, u), \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $D(u)$ 的定义由下式给出:

$$\frac{1}{D(u)} \equiv 3 \left[\sum_i \sigma_{si}(u)(1 - \overline{\cos\theta_i}) + \frac{2}{3} \sigma_{sH}(u)e^{-\frac{3}{2}u} + \sigma_c(u) + \sigma_U(u) \right].$$

(3) 式中右边第二个积分的上限可换成相当于热能之勒 u_{th} , 因为 $\sigma_U(u')$ 当 u' 大于 u_{th} (相当于非弹性散射产生的阈能)时, 或者 $f(u, u')$ 当 u' 大于 u 时, 均自动变成零. 于是(3)式可换写成:

$$\begin{aligned} -D(u)\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r}, u) + [\sigma_{sH}(u) + \sigma_c(u) + \sigma_U(u)]\varphi_0(\mathbf{r}, u) &= \\ = \int_0^u \sigma_{sH}(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')e^{-(u-u')}du' + H(\mathbf{r}, u) + S(\mathbf{r}, u), \end{aligned} \quad (4)$$

$$H(\mathbf{r}, u) \equiv \int_0^{u_{th}} \sigma_U(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')f(u, u')du' \quad (5)$$

(4)及(5)式就是以下据以出发的基本方程.

如果把 $H(\mathbf{r}, u)$ 及 $S(\mathbf{r}, u)$ 看成是已给定的, 就可以求解方程(4), 将 $\varphi_0(\mathbf{r}, u)$ 通过函数 $H(\mathbf{r}, u)$, $S(\mathbf{r}, u)$ 及适当的边界条件表示出来. 实际上, 在增殖介质中, $S(\mathbf{r}, u)$ 和 $H(\mathbf{r}, u)$ 一样, 也依存于 $\varphi_0(\mathbf{r}, u)$. 因此, 在求解的过程中要应用复推的方法. 如果我们只保留 σ_U 的一

次项(相当于只考虑一次非弹性散射),复推的进行就是比较简单的.

三、铀水反应堆中的临界条件

当铀水反应堆处于稳定的临界状态时,反应堆中中子的慢化、扩散及增殖将由下列方程组描写:

$$\left. \begin{aligned} -D(u)\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r}, u) + [\sigma_{sH}(u) + \sigma_c(u) + \sigma_U(u)]\varphi_0(\mathbf{r}, u) &= \\ = \int_0^u \sigma_{sH}(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')e^{-(u-u')}du' + H(\mathbf{r}, u) + S(\mathbf{r}, u), \\ -D_{\text{热}}\nabla^2\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) + \sigma_{c\text{热}}\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) &= \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma_{sH}(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')e^{-(u_{\text{热}}-u')}du', \\ S(\mathbf{r}, u) = S(u) \left[\eta_{\text{热}}\sigma_{c\text{热}}\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) + \int_0^{u_{\text{热}}} \eta(u')\sigma_c(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')du' \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)式中第一方程即为描写中子慢化的基本方程(4);第二方程描写热中子的扩散,其中 $D_{\text{热}}$ 及 $\sigma_{c\text{热}}$ 分别为热中子的扩散系数及宏观吸收截面, $\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r})$ 为热中子通量;第三方程描写由于热中子及慢化中子被增殖介质吸收后引起裂变而放出次级中子的过程(方括弧中第一及第二项), η 为介质每吸收一个中子放出的次级中子数, $S(u)$ 为熟知的裂变中子谱.快中子通过非弹性散射直接慢化至热能的几率极小,所以在(6)式中第二方程右边,作为热中子源的只有为氢弹性散射的一项:

$$\int_0^{u_{\text{热}}} \sigma_{sH}(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')e^{-(u_{\text{热}}-u')}du'.$$

对于无反射层的裸堆,若略去外推长度对能量的依赖关系,则方程组(6)可用分离变数法求解,而且 $\varphi_0(\mathbf{r}, u)$ 及 $\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r})$ 对空间依存的因子将互成比例,并满足波动方程:

$$\frac{\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r}, u)}{\varphi_0(\mathbf{r}, u)} = \frac{\nabla^2\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r})}{\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r})} = -\alpha^2, \quad (7)$$

式中 α^2 的最小本征值称为系统的拉氏参数,由反应堆的形状及大小决定.

将(7)式代入(6)式,我们得到

$$\left. \begin{aligned} [\alpha^2 D(u) + \sigma_{sH}(u) + \sigma_c(u) + \sigma_U(u)]\varphi_0(\mathbf{r}, u) &= \\ = \int_0^u \sigma_{sH}(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')e^{-(u-u')}du' + e^{-u}F(\mathbf{r}, u), \\ (\alpha^2 D_{\text{热}} + \sigma_{c\text{热}})\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) &= \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma_{sH}(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')e^{-(u_{\text{热}}-u')}du', \\ e^{-u}F(\mathbf{r}, u) \equiv H(\mathbf{r}, u) + S(\mathbf{r}, u) &= \\ = P(\mathbf{r})f(u) + Q(\mathbf{r})S(u), \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

式中 $P(\mathbf{r})$, $Q(\mathbf{r})$ 及 $f(u)$ 定义如下:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) &\equiv \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma_U(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')du', \\ Q(\mathbf{r}) &\equiv \eta_{\text{热}}\sigma_{c\text{热}}\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) + \int_0^{u_{\text{热}}} \eta(u')\sigma_c(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')du', \\ f(u) &= \frac{1}{P(\mathbf{r})} \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma_U(u')\varphi_0(\mathbf{r}, u')f(u, u')du', \end{aligned}$$

$f(u)$ 与 \mathbf{r} 无关,因为 $\varphi_0(\mathbf{r}, u)$ 可分成一包含 \mathbf{r} 的因子与一包含 u 的因子之积.

引进新的函数

$$\varphi(\mathbf{r}, u) \equiv [\alpha^2 D(u) + \sigma_{sH}(u) + \sigma_c(u) + \sigma_U(u)]\varphi_0(\mathbf{r}, u),$$

并用记号 D , σ_{sH} , σ_c 及 σ_U 分别代表 $D(u)$, $\sigma_{sH}(u)$, $\sigma_c(u)$ 及 $\sigma_U(u)$,用 $[\alpha^2 D(u) + \sigma_{sH}(u) +$

$\sigma_c(u) + \sigma_u(u)$] 除过之值, 并用记号上加“ \cdot ”或“ \prime ”等之法表示这些量中的宗数 u 换成了 u' 或 u'' 等, 便可将方程组(8.1)重写为:

$$\left. \begin{aligned} e^u \varphi(\mathbf{r}, u) &= \int_0^u \sigma'_{iH} e^{u'} \varphi(\mathbf{r}, u') du' + F(\mathbf{r}, u), \\ (\alpha^2 D_{\text{热}} + \sigma_{c\text{热}}) \varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) &= e^{-u_{\text{热}}} \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_{iH} e^{u'} \varphi(\mathbf{r}, u') du, \\ e^{-u} F(\mathbf{r}, u) &= P(\mathbf{r}) f(u) + Q(\mathbf{r}) S(u), \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

式中

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) &= \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_U \varphi(\mathbf{r}, u') du', \\ Q(\mathbf{r}) &= \eta_{\text{热}} \sigma_{c\text{热}} \varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) + \int_0^{u_{\text{热}}} \eta' \sigma'_c \varphi(\mathbf{r}, u') du', \\ f(u) &= \frac{1}{P(\mathbf{r})} \int_0^u \sigma'_U \varphi(\mathbf{r}, u') f(u, u') du', \end{aligned}$$

注意, η' 单纯为 $\eta(u')$ 之简写, 含意与 σ'_{iH} 等不同.

通过微分, 可将(8.2)式中第一式化成微分方程 [$F(\mathbf{r}, u)$ 看成给定]:

$$\frac{\partial}{\partial u} [e^u \varphi(\mathbf{r}, u)] = \sigma_{iH} e^u \varphi(\mathbf{r}, u) + \frac{\partial}{\partial u} F(\mathbf{r}, u), \quad (9)$$

函数 $e^u \varphi(\mathbf{r}, u)$ 在 $u=0$ 时的初始值也可以由(8.2)式中第一式给出:

$$[e^u \varphi(\mathbf{r}, u)]_{u=0} = F(\mathbf{r}, 0) = 0,$$

因为 E_0 的选择使得 $S(u)$ 在 $u=0$ 时很小, 可以略去. 于是微分方程(9)之解可以马上写出:

$$\begin{aligned} e^u \varphi(\mathbf{r}, u) &= \int_0^u \frac{\partial F(\mathbf{r}, u')}{\partial u'} e^{\int_{u'}^u \sigma'_{iH} du''} du' = \\ &= F(\mathbf{r}, u) + \int_0^u F(\mathbf{r}, u') \sigma'_{iH} e^{\int_{u'}^u \sigma'_{iH} du''} du', \end{aligned} \quad (10.1)$$

或将 $F(\mathbf{r}, u)$ 的表示式代入, 得到

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, u) &= Q(\mathbf{r}) [S(u) + \int_0^u S(u') \sigma'_{iH} e^{-\int_{u'}^u (1-\sigma'_{iH}) du''} du'] + \\ &+ P(\mathbf{r}) [f(u) + \int_0^u f(u') \sigma'_{iH} e^{-\int_{u'}^u (1-\sigma'_{iH}) du''} du'], \end{aligned} \quad (10.2)$$

再将 $Q(\mathbf{r})$ 和 $P(\mathbf{r})$ 的定义及(8.2)式中的第二式代入(10.2)式, 便可得到一组三个决定 $\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r})$, $Q(\mathbf{r})$ 及 $P(\mathbf{r})$ 的齐次联立方程:

$$\left. \begin{aligned} Q(\mathbf{r}) &= \eta_{\text{热}} \sigma_{c\text{热}} \varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) + Q(\mathbf{r}) \int_0^{u_{\text{热}}} \eta' \sigma'_c [S(u')] du' + P(\mathbf{r}) \int_0^{u_{\text{热}}} \eta' \sigma'_c [f(u')] du', \\ P(\mathbf{r}) &= Q(\mathbf{r}) \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_U [S(u')] du' + P(\mathbf{r}) \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_U [f(u')] du', \\ (\alpha^2 D_{\text{热}} + \sigma_{c\text{热}}) \varphi_{\text{热}}(\mathbf{r}) &= Q(\mathbf{r}) \int_0^{u_{\text{热}}} e^{-(u_{\text{热}}-u')} \sigma'_{iH} [S(u')] pu' + \\ &+ P(\mathbf{r}) \int_0^{u_{\text{热}}} e^{-(u_{\text{热}}-u')} \sigma'_{iH} [f(u')] du', \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中我们应用了如下的算符记法:

$$[S(u)] \equiv S(u) + \int_0^u S(u') \sigma'_{iH} e^{-\int_{u'}^u (1-\sigma'_{iH}) du''} du', \quad (12)$$

$$[f(u)] \equiv f(u) + \int_0^u f(u') \sigma'_{sH} e^{-\int_{u'}^u (1-\sigma'_{sH}) du''} du',$$

从(11)式中消去 $\varphi_{\text{热}}(\mathbf{r})$, $Q(\mathbf{r})$ 及 $P(\mathbf{r})$, 就可以得到我们所要求的临界条件:

$$\frac{\eta_{\text{热}}}{1 + \sigma^2 L_{\text{热}}^2} \Theta = 1, \quad (13)$$

式中

$$L_{\text{热}}^2 = \frac{D_{\text{热}}}{\sigma_{c\text{热}}},$$

而

$$\Theta \equiv \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} e^{-(u_{\text{热}}-u')} \sigma'_{sH} [S(u')] du' + \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} e^{-(u_{\text{热}}-u')} \sigma'_{sH} [f(u')] du' \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_{\text{U}} [S(u')] du'}{1 - \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_{\text{U}} [f(u')] du'}}{1 - \int_0^{u_{\text{热}}} \eta' \sigma'_c [S(u')] du' - \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} \eta' \sigma'_c [f(u')] du' \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_{\text{U}} [S(u')] du'}{1 - \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_{\text{U}} [f(u')] du'}}. \quad (14.1)$$

Θ 中所包含的积分都具有 $\int_0^{u_{\text{热}}} g(u') [S(u')] du'$ 或 $\int_0^{u_{\text{热}}} g(u') [f(u')] du'$ 的形状, 这儿 $g(u')$ 是 u' 的任意函数. 这种形状的积分可以作如下变换:

$$\int_0^{u_{\text{热}}} g(u') [S(u')] du' = \int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [g(u')]^\dagger du', \quad (15)$$

式中

$$g(u)^\dagger \equiv g(u) + \sigma_{sH} \int_u^{u_{\text{热}}} g(u') e^{-\int_u^{u'} du''}. \quad (16)$$

(16)式中及以下各式中, 一个仅标出上下限的积分号被用来代表函数 $(1 - \sigma_{sH})$ 在所标出上下限间的积分, 例如 $\int_u^{u'}$ 即应理解为 $\int_u^{u'} (1 - \sigma'_{sH}) du''$.

象记号本身所表明的一样, 算符 $[\dots]^\dagger$ 就是算符 $[\dots]$ 的伴随算符 [比较(16)及(12)!], 注意到关系式

$$[e^{-(u_{\text{热}}-u)} \sigma_{sH}]^\dagger = \sigma_{sH} e^{-\int_u^{u_{\text{热}}} du''}, \quad (17)$$

我们可将(14.1)式改写成如下形式:

$$\Theta = \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} S(u') \sigma'_{sH} e^{-\int_{u'}^{u_{\text{热}}} du''} du' + \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} f(u') \sigma'_{sH} e^{-\int_{u'}^{u_{\text{热}}} du''} du' \int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma'_{\text{U}}]^\dagger du'}{1 - \int_0^{u_{\text{热}}} f(u') [\sigma'_{\text{U}}]^\dagger du'}}{1 - \int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\eta' \sigma'_c]^\dagger du' - \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} f(u') [\eta' \sigma'_c]^\dagger du' \int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma'_{\text{U}}]^\dagger du'}{1 - \int_0^{u_{\text{热}}} f(u') [\sigma'_{\text{U}}]^\dagger du'}}. \quad (14.2)$$

为了计算 Θ , 还需要定出 $f(u)$, 应用(10.2)及(11)式中第二式, 可得

$$\varphi(\mathbf{r}, u) = Q(\mathbf{r}) \left\{ [S(u)] + \frac{[f(u)] \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_{\text{U}} [S(u')] du'}{1 - \int_0^{u_{\text{热}}} \sigma'_{\text{U}} [f(u')] du'} \right\}. \quad (18)$$

代入 $f(u)$ 的定义, 并经过一些变换后, 便可得出 $f(u)$ 所满足的积分方程:

$$f(u) = f_0(u) + \int_0^{u_{\text{热}}} K(u, u') f(u') du', \quad (19)$$

式中

$$f_0(u) \equiv \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma'_U f(u, u')] du'}{\int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma'_U] du'} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} K(u, u') &\equiv [\sigma'_U f(u, u')] du' - [\sigma'_U] \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma'_U f(u, u')] du'}{\int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma'_U] du'} = \\ &= [\sigma'_U f(u, u')] du' - [\sigma'_U] f_0(u) \end{aligned} \quad (21)$$

$[\] du'$ 表示将括弧内的表示式看成 u' 的函数, 运用算符.

(19) 式为费列德荷姆(Fredholm)型积分方程, 通过复推法可将其解写成纽曼(Newmann)级数的形式:

$$f(u) = f_0(u) + f_1(u) + \dots, \quad (22)$$

式中

$$f_i(u) = \int_0^{u_{\text{热}}} K(u, u') f_{i-1}(u') du', \quad (i = 1, 2, \dots)$$

若将 σ_U 看成数量级为 ε 的小量, 则

$$\begin{aligned} K(u, u') &= 0(\varepsilon), \\ f_i(u) &= 0(\varepsilon^i). \end{aligned}$$

如果我们只考虑一次非弹性散射, 则在(14.2)式中可只保留 σ_U 的一次项:

$$\Theta = \frac{\int_0^{u_{\text{热}}} S(u') \sigma'_{HE} \int_{u'}^{u_{\text{热}}} du' + \int_0^{u_{\text{热}}} \int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma'_U f(u, u')] du' \sigma'_{HE} \int_{u'}^{u_{\text{热}}} du du'}{1 - \int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\eta' \sigma_c] du' - \int_0^{u_{\text{热}}} \int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma'_U f(u, u')] du' [\eta \sigma_c] du du'} \quad (14.3)$$

四、討 論

临界条件(13)式中各因子应当具有的物理意义是明显的: $\eta_{\text{热}}$ 是增殖介质每吸收一个热中子所放出的次级中子数; $(1 + \alpha^2 L_{\text{热}}^2)^{-1}$ 是热中子在扩散中不漏出反应堆外的几率; 因子 Θ 表示对于每个裂变中子, 有多少中子在反应堆中达到热能, Θ 中既包括了裂变中子在慢化到热能的过程中引起的增殖效应, 也包括了慢化过程中逃脱吸收和不漏出反应堆外的几率.

为了搞清楚 Θ 的表达式的物理解释, 先要注意 $\alpha^2 D + \sigma_{\text{H}} + \sigma_c + \sigma_U = 1$ 中, 各项分别表示一个勒为 u 的中子漏失、被氢弹性散射、被吸收以及被铀非弹性散射的几率, 它们之和等于 1. 因为我们略去了中子与非氢核弹性碰撞时能量的损耗(勒为 u 的中子与非氢核弹性碰撞后, 仍然属于勒为 u 的中子内), 因此,

$$e^{-\int_u^{u'} \sigma_{\text{H}} du''} \equiv e^{-\int_u^{u'} (1 - \sigma''_{\text{H}}) du''}, \quad (u < u')$$

就表示中子在由勒 u 到勒 u' 的慢化过程中, 既不漏失, 又不被吸收, 也不与铀作非弹性碰撞的几率, 即中子在反应堆中由勒 u “平安”地慢化到勒 u' 的几率. 记住这一点, 就可以看出: 如果 $g(u)$ 表示一个中子在勒为 u 时引起过程 g 的几率, 则 $[g(u)]^{\dagger}$ 表示它在勒为 u 或勒为由 u 到 $u_{\text{热}}$ 间的 u' 时引起过程 g , 而不在此以前漏失、被吸收或遭受非弹性散射的几率[参看(16)式].

由此可见, 临界条件(14.3)的分子表示裂变中子从产生后一直“平安”地慢化到热能(第一项)或中间经过一次非弹性碰撞而仍能“平安”到达热能(第二项)的几率, (14.3)的分母则表示慢化过程中增殖的影响, 其中各项的物理如下:

$$\int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\eta' \sigma_c]^\dagger du'$$

表示裂变中子在由氢慢化的过程中被增殖介质吸收而放出的次级中子的可几数; 而

$$\int_0^{u_{\text{热}}} \int_0^{u_{\text{热}}} S(u') [\sigma_{\text{U}}^0 f(u, u')]_{u'}^\dagger [\eta \sigma_c]^\dagger du du'$$

则表示裂变中子在慢化过程中先经受了一次非弹性碰撞然后才被增殖介质吸收, 所放出的次级中子的可几数。

更完善的临界条件(14.2)或(14.1)式的物理解释也和上述的类似。唯一的差别在于, 现在所考虑的非弹性散射不限于一次, 而可以有任意的次数。

最后, 写出裂变中子为单能时临界条件(14.3)的退化形状, 也许是有兴趣的[这时 $S(u) = \delta(u)$]:

$$\Theta = \frac{\sigma_{\text{H}}^0 e^{-\int_0^{u_{\text{热}}} \sigma_{\text{H}}^0 du} + \int_0^{u_{\text{热}}} [\sigma_{\text{U}}^0 f(u, 0)]_{0}^\dagger \sigma_{\text{H}}^0 e^{-\int_0^u \sigma_{\text{H}}^0 du} du}{1 - [\eta^0 \sigma_c^0]_{0}^\dagger - \int_0^{u_{\text{热}}} [\sigma_{\text{U}}^0 f(u, 0)]_{0}^\dagger [\eta \sigma_c]^\dagger du}, \quad (23.1)$$

式中: $\sigma_{\text{H}}^0, \sigma_c^0, \sigma_{\text{U}}^0$ 表示记号 $\sigma_{\text{H}}, \sigma_c, \sigma_{\text{U}}$ 中宗数 u 取为 0; 而 $\eta^0 = \eta(0)$; $[g(0)]_{0}^\dagger$ 表示在 $[g(u)]^\dagger$ 中取 $u = 0$ 。

如完全不考虑非弹性散射, 则(23.1)可进一步简化, 而临界条件可写成相当简单的形式:

$$\frac{\eta_{\text{热}}}{1 + \alpha^2 L_{\text{热}}^2} \frac{\sigma_{\text{H}}^0 e^{-\int_0^{u_{\text{热}}} \sigma_{\text{H}}^0 du}}{1 - [\eta^0 \sigma_c^0]^\dagger} = 1. \quad (23.2)$$

与年龄理论或其单群近似不同, 在我们推出的临界条件中不能将表示不漏失几率的因子完全分出。相反, 可以看到慢化中漏失、慢化、吸收及增殖等几种过程的相互影响。

(编辑部收稿日期 1965 年 11 月 6 日)