

一种快速计算 Zernike 矩的改进 q -递归算法

付 波¹, 刘凌云¹, 权 轶¹, 张国军², 刘 晋³

(1. 湖北工业大学电气与电子工程学院, 武汉 430086; 2. 华中科技大学机械科学与工程学院, 武汉 430074;
3. 华中电网有限公司, 武汉 430077)

摘 要: 提出了一种快速计算 Zernike 矩的改进 q -递归算法, 该方法通过同时降低核函数中 Zernike 多项式和 Fourier 函数的计算复杂度以提高 Zernike 矩的计算效率。采用 q -递归法快速计算 Zernike 多项式以避免复杂的阶乘运算, 再利用 x 轴、 y 轴、 $x=y$ 和 $x=-y$ 4 条直线将图像域分成 8 等分。计算 Zernike 矩时, 仅计算其中 1 个区域的核函数的值, 其他区域的值可以通过核函数关于 4 条直线的对称性得到。该方法不仅减少了核函数的存储空间, 而且大大降低了 Zernike 矩的计算时间。试验结果表明, 与现有方法相比, 改进 q -递归算法具有更好的性能。

关键词: 改进 q -递归算法; q -递归公式; 对称性; Zernike 矩

Modified q -Recursive Algorithm for Fast Computing Zernike Moments

FU Bo¹, LIU Ling-yun¹, QUAN Yi¹, ZHANG Guo-jun², LIU Jin³

(1. School of Electrical and Electric Engineering, Hubei University of Technology, Wuhan 430086; 2. School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074; 3. Central China Grid Company Limited, Wuhan 430077)

【Abstract】 The paper proposes a modified q -recursive algorithm of fast computing Zernike moments. The method improves the efficiency of calculating Zernike moments by reducing the computational complexities of the Zernike polynomials and the Fourier functions of the kernel functions. In the first step, the q -recursive method, which avoids the factorial operations and the power series of radius involved in radial polynomials, is employed to compute the Zernike polynomials. In the second step, the image domain is divided into eight equal parts by four lines, which are $x=0$, $y=0$, $x=y$ and $x=-y$. On computing Zernike moments, the kernel functions are merely calculated in one part. The function values of the other parts can be obtained by the symmetry property about the four lines of the kernel functions. It not only saves the storages for the kernel polynomials but also reduces the computation time. The performance of the algorithm is experimentally examined using a binary image, and it shows that the computational speed of Zernike moments has been substantially improved over the present methods.

【Key words】 modified q -recursive algorithm; q -recurrence relation; symmetry; Zernike moments

1 概述

Zernike 矩作为图像的特征描述已广泛用于光学、模式识别等领域^[1-4]。由于 Zernike 多项式含有大量的阶乘与幂运算, 直接运算非常复杂。近年来, 国内外学者提出了许多算法以提高 Zernike 矩的计算速度。

文献[5]提出了两种 Zernike 矩的快速算法: 轮廓积分法与方圆变换法。但轮廓积分法只适用于二值图像且需要离线分析轮廓点, 方圆变换法会影响 Zernike 矩的计算精度; 文献[6]通过将径向多项式展开为递归形式并结合 FFT 算法提出了一种快速算法。该方法避免了复杂的阶乘运算, 但一次运算只能计算一个 Zernike 矩; 文献[7-8]提出了 Zernike 多项式的递归公式, 但不能应用于 $(p=q)$, $(q=0)$ 和 $(p-q=4)$ 的情况, 这些情况下的矩必须得单独计算, 而且该方法不易得到特定阶数的矩。

C.W.Chong 等提出用一套递归公式表达多项式系数以消除阶乘计算^[9], 但仍需计算每一个系数与极径的幂, 当阶数增大后, 矩的计算时间也相当可观。舒华忠等基于 Kintner 的递归公式提出了一种快速方法^[10], 主要思路是将乘法转变为加法以降低运算时间, 但该方法在计算单一阶数的 Zernike

矩时显得不便。为改进以上缺点, C.W.Chong 等提出了一种 q -递归法^[11], 针对特定的一重阶数 p , 用二重阶数 q 递归 Zernike 多项式。该方法不包含任何阶乘计算, 同时允许计算任意指定阶的 Zernike 矩而不需要考虑其他阶数的矩, 一套 p 阶矩在一个循环即可求得。

以上方法着重于减少 Zernike 核多项式的计算复杂度, 但 Zernike 矩的核函数包含两项: Zernike 多项式与傅里叶函数。如果能同时减少 Zernike 多项式与傅里叶函数的计算量, 将进一步提高 Zernike 矩的计算速度。

根据以上思路, 本文提出一种改进的 q -递归算法计算 Zernike 矩。该算法主要是基于 Zernike 矩核函数的两个性质: Zernike 多项式的 q -递归性与核函数的对称性。 q -递归算法极

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60702079); 国家“973”计划基金资助项目(2005CB724100); 湖北省自然科学基金资助项目(2006ABA027)

作者简介: 付 波(1973 -), 男, 博士, 主研方向: 模式识别; 刘凌云, 博士; 权 轶, 硕士; 张国军, 教授、博士; 刘 晋, 高级工程师、硕士

收稿日期: 2007-04-25 **E-mail:** fubofanxx@yahoo.com.cn

大地降低了 Zernike 多项式的计算复杂度；而核函数的对称性使得笔者仅计算图像 1/8 区域的核函数的值就可以求得整幅图像的 Zernike 矩，这个性质不仅节省了存储核函数所需的内存，而且极大地加快了矩的计算速度。

2 Zernike 矩

Zernike 矩源于 Zernike 提出的一套在单位圆上正交的复多项式系。该复多项式定义为

$$V_{nm}(x, y) = V_{nm}(r, \theta) = R_{nm}(r) \exp(jm\theta) \quad (1)$$

其中， $n, m \in \mathbb{Z}; n \geq 0; -n \leq m \leq n; r$ 是像素到原点的矢量 r 的极径； θ 是 r 与 x 轴的夹角。

径向 Zernike 多项式 $R_{nm}(r)$ 定义为

$$R_{nm}(r) = \sum_{s=0}^{n-|m|/2} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+|m|}{2} - s\right)! \left(\frac{n-|m|}{2} - s\right)!} r^{n-2s} \quad (2)$$

其中， $R_{n,-m}(r) = R_{nm}(r)$ 。

该多项式满足以下正交性：

$$\iint_{|x|^2+|y|^2 \leq 1} [V_{nm}(x, y)]^* V_{pq}(x, y) dx dy = \frac{\pi}{n+1} \delta_{np} \delta_{mq} \quad (3)$$

其中， $\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 。

Zernike 矩是图像函数在这些正交基函数上的投影。图像函数的 (n, m) 阶 Zernike 矩表示为

$$A_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \iint_{|x|^2+|y|^2 \leq 1} f(x, y) V_{nm}^*(x, y) dx dy \quad (4)$$

可以用和的形式来表达积分公式：

$$A_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \Delta s \sum_x \sum_y f(x, y) V_{nm}^*(x, y) \quad (5)$$

其中， $\Delta s = \Delta x \Delta y$ ； $x^2 + y^2 \leq 1$ 。

3 Zernike 矩的 q -递归公式

C.W.Chong 提出的 q -递归公式表达如下：

$$R_{p(q-4)}(r) = H_1 R_{pq}(r) + \left(H_2 + \frac{H_3}{r^2} \right) R_{p(q-2)}(r) \quad (6)$$

其中，

$$H_1 = \frac{q(q-1)}{2} - qH_2 + \frac{H_3(p+q+2)(p-q)}{8};$$

$$H_2 = \frac{H_3(p+q)(p-q+2)}{4(q-1)} + (q-2);$$

$$H_3 = \frac{-4(q-2)(q-3)}{(p+q-2)(p-q+4)}.$$

对于两种特殊情况，有如下结论：

$$R_{pp}(r) = r^p \quad p = q \quad (7)$$

$$R_{p(p-2)}(r) = pR_{pp}(r) - (p-1)R_{p(p-2)}(r) \quad p - q = 2 \quad (8)$$

利用 q 级数法计算 Zernike 矩的乘法计算量为 $O(p)$ ，它极大地缩短了 Zernike 矩的计算时间。

4 对称算法

4.1 Fourier 核函数的对称性

假设 $x, y \in \mathbb{R}$ ， $I = x + jy \in \mathbb{C}$

其中， \mathbb{R} 是实数集； \mathbb{C} 是复数集； $j = \sqrt{-1}$ 。

定义 $F_0 I = x + jy$ ； $F_1 I = y + jx$ 。

核 Fourier 多项式可以定义为

$$K_q(\theta) = \exp(-jq\theta) = KR_q(\theta) + jKI_q(\theta) \quad (9)$$

图 1 显示 4 条直线 $x=0, y=0, x=y$ 和 $x=-y$ 将整个图像域分成

8 个部分。分属这 8 个区域的点 $P_1 \sim P_8$ 关于这 4 条线对称。假设点 P_1 的坐标为 (r, θ) ，那么其他 7 个点的坐标可以表示为

$$\begin{aligned} P_2 &= (r, \pi/2 - \theta); P_3 = (r, \pi/2 + \theta) \\ P_4 &= (r, \pi - \theta); P_5 = (r, \pi + \theta) \\ P_6 &= (r, 3\pi/2 - \theta); P_7 = (r, 3\pi/2 + \theta) \\ P_8 &= (r, 2\pi - \theta) \end{aligned} \quad (10)$$

其中， $\pi/4 \leq \theta < 3\pi/4$ 。

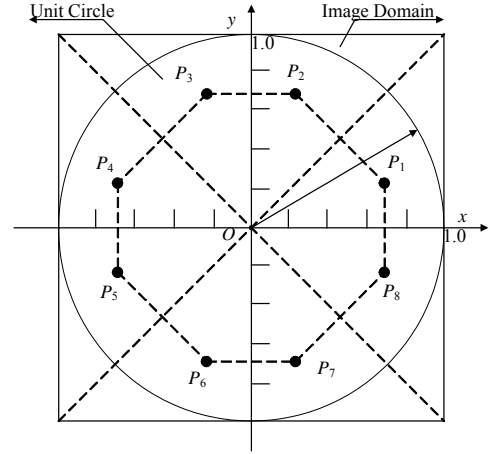


图 1 核函数的对称性

可得如下关系：

$$\begin{aligned} K_q(\theta) &= F_0 K_q(\theta); K_q(\pi/2 - \theta) = F_1 K_q(\theta) \\ K_q(\pi/2 + \theta) &= -F_1 K_q(\theta)^*; K_q(\pi - \theta) = -F_0 K_q(\theta)^* \\ K_q(\pi + \theta) &= -F_0 K_q(\theta); K_q(3\pi/2 - \theta) = -F_1 K_q(\theta) \\ K_q(3\pi/2 + \theta) &= F_1 K_q(\theta)^*; K_q(2\pi - \theta) = F_0 K_q(\theta)^* \end{aligned} \quad (11)$$

其中， $\pi/4 \leq \theta < 3\pi/4$ 。

4.2 核 Zernike 多项式的对称性

如图 1 所示，8 个点 $P_1 \sim P_8$ 到原点的极径是相等的，因此对于这 8 个点的指定阶数 (p, q) 的 Zernike 核多项式具有相等的值：

$$\begin{aligned} R_p(r, \theta) &= R_p(r, \pi/2 - \theta) = R_p(r, \pi/2 + \theta) = \\ &R_p(r, \pi - \theta) = R_p(r, \pi + \theta) = \\ &R_p(r, 3\pi/2 - \theta) = R_p(r, 3\pi/2 + \theta) = R_p(r, -\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

4.3 对称算法

根据前文的分析，采用对称性，仅通过计算 $\pi/4 \leq \theta < 3\pi/4$ ， $1 > r > 0$ 这个区域的核函数的值，即可计算整幅图像的 Zernike 矩：

$$\begin{aligned} A_{pq} &= \frac{1}{2\pi a_p} \int_0^{2\pi} \int_0^1 R_{pq}(r) \exp(-jq\theta) f(r, \theta) r dr d\theta = \\ &\frac{1}{2\pi a_p} \left[\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 (F_0 K_q(\theta) \cdot f(r, \theta) + \right. \\ &F_1 K_q(\theta) \cdot f(r, \pi/2 - \theta) - \\ &F_1 K_q(\theta)^* \cdot f(r, \pi/2 + \theta) - \\ &F_0 K_q(\theta)^* \cdot f(r, \pi - \theta) - F_0 K_q(\theta) \cdot f(r, \pi + \theta) - \\ &F_1 K_q(\theta) \cdot f(r, 3\pi/2 - \theta) + \\ &F_1 K_q(\theta)^* \cdot f(r, 3\pi/2 + \theta) + \\ &\left. F_0 K_q(\theta)^* \cdot f(r, -\theta) \right) R_{pq}(r) r dr \quad (13) \end{aligned}$$

可见, 对称算法只需计算 1/8 图像区域的核函数的值。这不仅减少了多项式的存储空间, 而且极大地降低了 Zernike 矩的运算时间。

5 试验研究

在试验中, 使用如图 2 所示的一幅 60×60 分辨率的二值中文图像来测试本算法以及目前已存在的 3 种典型方法: Prata 法、改进 Kintner 法与 q -级数法的计算时间。



图 2 60×60 分辨率的二值中文字符

试验结果如图 3、图 4 所示, 由于各方法之间计算时间相差太大, 图中时间轴采用对数坐标表示。

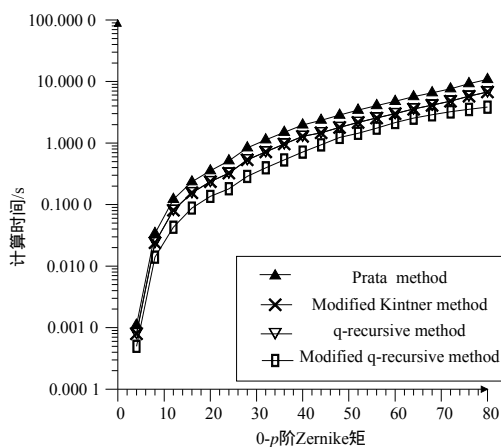


图 3 $0-p$ 阶 Zernike 矩计算时间

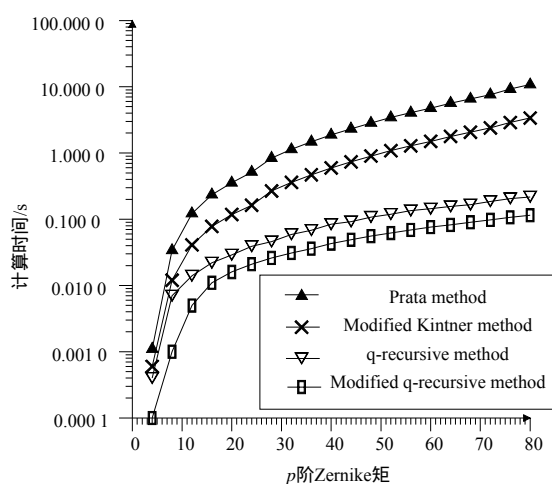


图 4 p 阶 Zernike 矩计算时间

试验结果表明对于所有的 p , 计算两种情况的矩所用的时间, 改进 q -递归法所花费的时间总是最少的。

6 结束语

本文提出了一种改进 q -递归法快速计算 Zernike 矩。该算法考虑 Zernike 矩核函数的两个部分: Zernike 多项式与 Fourier 核函数的特性, 采用 q -递归法快速计算 Zernike 多项式; 同时考虑图像与核函数的对称性, 用图像区域 $\pi/4 - \theta < 0, 1 > r > 0$ 内核函数的值表示其他 7 个区域核函数的值, 这样核函数的计算量减少了 7/8。针对 $0-p$ 阶以及单 p 阶两类 Zernike 矩计算时间的试验用来检验本文算法与现存算法计算效率的差异, 试验结果表明本文所提方法具有很高的计算效率。

参考文献

- [1] Teague M. Image Analysis via the General Theory of Moments[J]. J. Opt. Soc. Am. 1980, 70(8): 920-930.
- [2] 刘茂福, 何炎祥, 胡慧君. 图像挖掘中基于 Zernike 矩的形状特征描述与评价[J]. 计算机工程, 2006, 32(22): 178-180.
- [3] 温昌兵, 杨扬, 颜斌. 并行特征融合在金融手写汉字识别中的应用[J]. 计算机工程, 2005, 31(19): 178-179.
- [4] Gu Jia, Luo Limin, Shu Huazhong. A Local Optimization Algorithm for Computing 2-D Optical-Flow Field of Heart-Echocardiograph Image Using Zernike Moment[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(3): 350-353.
- [5] Mukundan R, Ramakrishnan K R. Fast Computation of Legendre and Zernike Moments[J]. Pattern Recognition, 1995, 28(9): 1433-1442.
- [6] Belkasim S O, Ahmadi M, Shridhar M. An Efficient Algorithm for Fast Computation of Zernike Moments[J]. Journal of the Franklin Institute, 1996, 333(4): 577-581.
- [7] Prata A, Rusch W V T. Algorithm for Computation of Zernike Polynomials Expansion Coefficients[J]. Appl. Opt., 1989, 28(4): 749-754.
- [8] Kintner E C. On the Mathematical Properties of the Zernike polynomials[J]. Opt. Acta, 1976, 23(8): 679-680.
- [9] Chong C W, Mukundan R, Raveendran P. An Efficient Algorithm for Fast Computation of Zernike moments[C]//Proc. of International Conference on Computer Vision, Pattern Recognition and Image Processing. Durham. South Carolina, USA: [s. n.], 2002.
- [10] Gu Jia, Shu Huazhong, Toumoulin C, et al. A Novel Algorithm for Fast Computation of Zernike Moments[J]. Pattern Recognition. 2002, 35(12): 2905-2911.
- [11] Chong C W, Raveendran P, Mukundan R. A Comparative Analysis of Algorithms for Fast Computation of Zernike Moments[J]. Pattern Recognition, 2003, 36(3): 731-742.