

强隐式过程 SIP 在反应堆中子扩散 计算中的应用

楊 应 輝

本文叙述在反应堆设计计算中所使用的强隐式过程 SIP 的推导以及在计算机上的实现, 得出 SIP 在扩散计算中的一些结论。

一、前 言

SIP 是强隐式过程(Strongly Implicit Procedure)的缩写, 1968 年由斯通(H. L. Stone)首次提出用来解多维拉普拉斯方程^[1]。其基本思想是在差分方程的系数矩阵 M 上加一个依赖于参数 θ 的矩阵 N_θ , 使得 $(M+N_\theta)$ 可以分解为 L 和 U 的乘积: $(M+N_\theta)=LU$, 而对于 L, U 是可以直接解出的。

弗勒利希(R. Fröhlich)在叙述多维反应堆计算时指出: SIP 是解大线性方程组的一个“十分有希望”的方法^[2]。

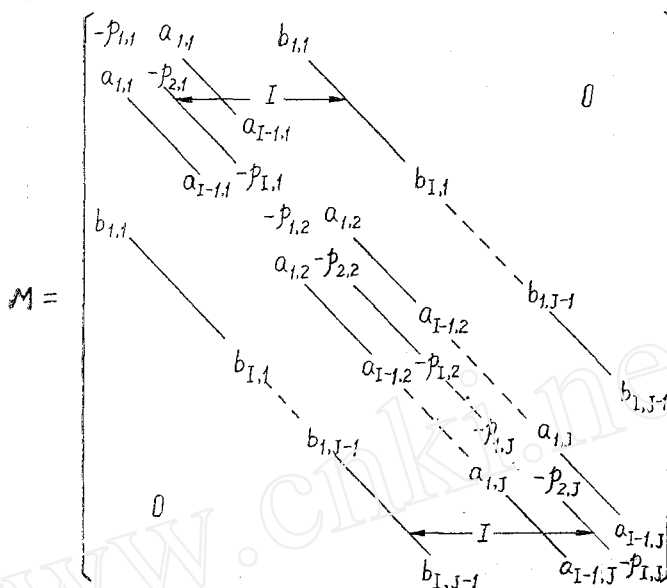
本文叙述我们在反应堆设计的扩散计算中所采用的 SIP 的推导, 在计算机上的实现, 通过对一系列计算结果的分析, 得出 SIP 用于反应堆扩散计算中的一些结论。这里叙述的是扩散计算的内迭代部分, 外迭代方法完全同于文献[3]所述, 这里不再赘述。

二、方法的叙述

1. 矩阵 $(M+N_\theta)$, L, U 的构成 二维中子扩散方程经由离散化之后(省去能群的编号), 得到如下形式的大线性方程组:

$$M\phi = -Q. \quad (1)$$

其中,

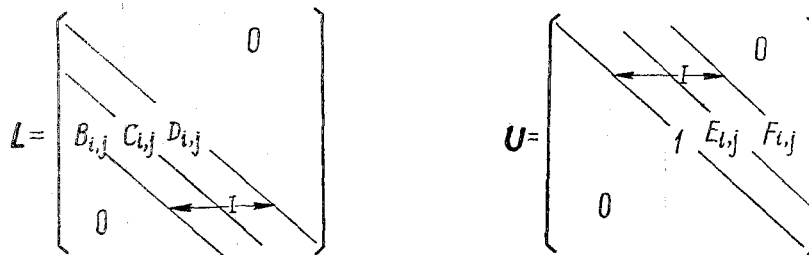


$$\phi = [\varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{I,1}, \dots, \varphi_{I,J}]^T,$$

$$Q = [q_{1,1}, q_{2,1}, \dots, q_{I,1}, \dots, q_{I,J}]^T.$$

M 就是杨(D. M. Young)^[4]所指出的具有 A 性质的矩阵, ϕ 是通量向量, Q 是源项(包括慢化源和裂变源)向量。

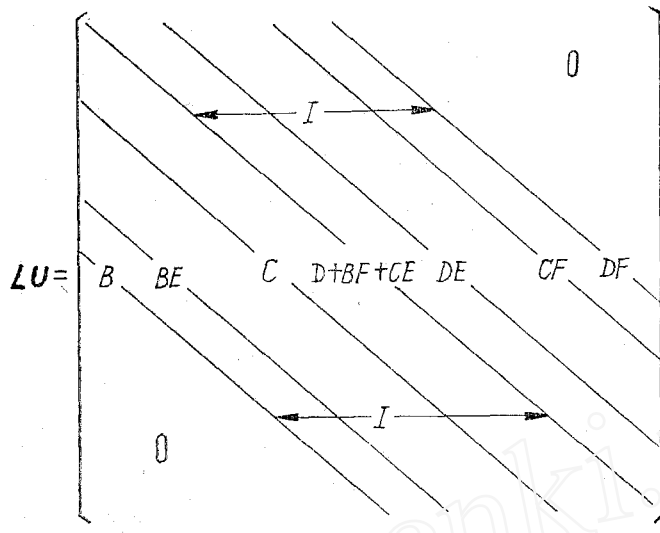
L 和 U 是下、上三角矩阵, 它们都只有三条非零的对角线元素, 非零元素的位置与 M 相同:



按我们的要求有:

$$LU = (M + N_0). \tag{2}$$

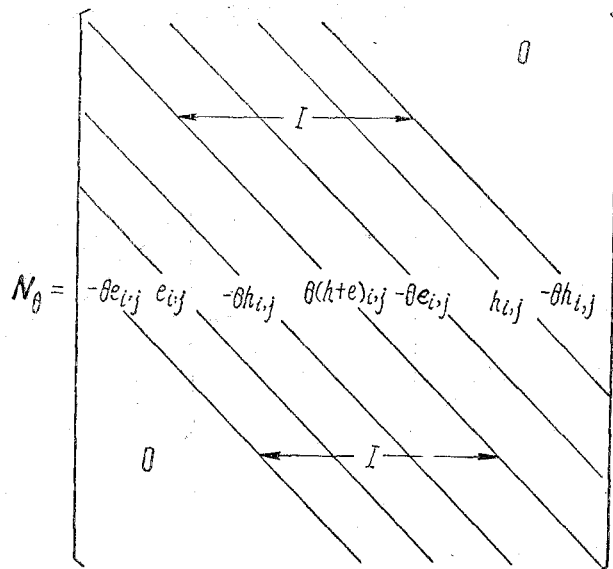
从 L, U 的定义出发有:



矩阵中的元素在 (i, j) 处的值分别为:

$$\begin{aligned}
 B &: B_{i,j}, & BE &: B_{i,j}E_{i,j-1}, & C &: C_{i,j}, \\
 D + BF + CE &: D_{i,j} + B_{i,j}F_{i,j-1} + C_{i,j}E_{i-1,j}, \\
 DE &: D_{i,j}E_{i,j}, & CF &: C_{i,j}F_{i-1,j}, & DF &: D_{i,j}F_{i,j}.
 \end{aligned}$$

这表明, 为了达到可以分解的目的, 要求矩阵 $(M + N_\theta)$ 具有七条非零对角线元素, 因此可以取 $N_\theta (0 \leq \theta < 1)$ 为:



从恒等式(2)出发, 便得到如下关系式:

$$\left. \begin{aligned} B_{i,j}E_{i,j-1} &= e_{i,j}, \\ C_{i,j}F_{i-1,j} &= h_{i,j}, \\ B_{i,j} &= b_{i,j-1} - \theta e_{i,j}, \\ C_{i,j} &= a_{i-1,j} - \theta h_{i,j}, \\ D_{i,j} + B_{i,j}F_{i,j-1} + C_{i,j}E_{i-1,j} &= -p_{i,j} + \theta e_{i,j} + \theta h_{i,j}, \\ D_{i,j}E_{i,j} &= a_{i,j} - \theta e_{i,j}, \\ D_{i,j}F_{i,j} &= b_{i,j} - \theta h_{i,j}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由此方程组解出 B, C, D, E, F , 便得到矩阵 L, U 。

2. 迭代方法 从恒等式:

$$(M + N_\theta)\phi = (M + N_\theta)\phi - (M\phi + Q)$$

出发, 建立如下迭代过程:

$$(M + N_\theta)\phi^{(n+1)} = (M + N_\theta)\phi^{(n)} - (M\phi^{(n)} + Q). \quad (4)$$

从舍入误差和通量收敛准则的需要出发, 我们将迭代过程修改如下。

令

$$\delta^{(n+1)} = \phi^{(n+1)} - \phi^{(n)} \quad (5)$$

表示通量 ϕ 从第 n 次到第 $n+1$ 次的改变量, 并令

$$r^{(n)} = -(M\phi^{(n)} + Q) \quad (6)$$

表示第 n 次迭代的剩余量, 则迭代过程为

$$(M + N_\theta)\delta^{(n+1)} = r^{(n)}. \quad (7)$$

用 $LU = (M + N_\theta)$ 代入, 便得:

$$LV = r^{(n)}, \quad (8)$$

$$U\delta^{(n+1)} = V. \quad (9)$$

(3), (5), (6), (8), (9) 等式构成了由 ϕ 的第 n 次值求 ϕ 的第 $(n+1)$ 次值连同误差 $\delta^{(n+1)}$ 的一个完整过程。

所谓“强隐式”指的是矩阵 L, U, N_θ 的产生是由原系数矩阵 M 经由一组递推关系式“隐式”地确定。

三、在计算机上的实现

上述迭代过程显然由两个步骤组成, 第一步是一个消去过程, 包括(3), (6), (8)式, 由它们产生中间系数 $B, C, D, E, F, r^{(n)}$ 和 V ; 第二步是一个回代过程, 由(9)式得到 $\delta^{(n+1)}$ 后由(5)式得到 $\phi^{(n+1)}$ 。

由(3), (6), (8)式及矩阵 M 的对称性得到:

$$\left. \begin{aligned} B_{i,j} &= b_{i,j-1} / (1 + \theta E_{i,j-1}), \\ C_{i,j} &= a_{i-1,j} / (1 + \theta F_{i-1,j}), \\ D_{i,j} &= -p_{i,j} - B_{i,j}(F_{i,j-1} - \theta E_{i,j-1}) - C_{i,j}(E_{i-1,j} - \theta F_{i-1,j}), \\ E_{i,j} &= (a_{i,j} - \theta B_{i,j}E_{i,j-1}) / D_{i,j}, \\ F_{i,j} &= (b_{i,j} - \theta C_{i,j}F_{i-1,j}) / D_{i,j}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$r_{i,j}^{(n)} = -(q_{i,j} + a_{i,j}\varphi_{i+1,j}^{(n)} + b_{i,j}\varphi_{i,j+1}^{(n)} + a_{i-1,j}\varphi_{i-1,j}^{(n)} + b_{i,j-1}\varphi_{i,j-1}^{(n)} - p_{i,j}\varphi_{i,j}^{(n)}), \quad (11)$$

$$V_{i,j} = (r_{i,j}^{(n)} - C_{i,j}V_{i-1,j} - B_{i,j}V_{i,j-1}) / D_{i,j}. \quad (12)$$

上列各式按 $j=1, 2, \dots, J, i=1, 2, \dots, I$ 的顺序进行计算, 在计算机存贮量容许的情况下, 系数 $B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}, E_{i,j}$ 和 $F_{i,j}$ 可以全部存起来, 整个迭代过程不变。

由(9)式得到:

$$\delta_{i,j}^{(n+1)} = V_{i,j} - E_{i,j} \delta_{i+1,j}^{(n+1)} - F_{i,j} \delta_{i,j+1}^{(n+1)} \quad (13)$$

此式按 $j=J, J-1, \dots, 1; i=I, I-1, \dots, 1$ 的顺序计算。最后, 由(5)式得到:

$$\varphi_{i,j}^{(n+1)} = \varphi_{i,j}^{(n)} + \delta_{i,j}^{(n+1)}, \quad (14)$$

同时产生用以判别迭代是否结束的误差项:

$$R^{(n+1)} = \sum_{i,j} |\delta_{i,j}^{(n+1)}|. \quad (15)$$

类似于交替方向法(ADI)的思想, 我们对奇次迭代采用上述顺序进行, 而对偶次迭代, 其消去过程按 $j=J, J-1, \dots, 1, i=1, 2, \dots, I$ 顺序进行; 回代过程按 $j=1, 2, \dots, J, i=I, I-1, \dots, 1$ 顺序进行, 迭代参数 θ 取相同的值。这样做的目的, 是加速收敛并改善收敛解。

在反应堆的内迭代计算中, 上述两个过程交替使用, 直至如下不等式:

$$R^{(n+1)} \leq \delta R^{(1)} \quad (16)$$

满足为止。 δ 是输入参数, 一般取 $\delta=0.1$ 。

四、分析和评价

SIP 已正式用于反应堆设计和分析计算, 大量的计算结果表明, 这是一个很有效的方法, 特别是对于具有强烈非均匀性介质和网格步长问题, 其优越性尤为显著。

跟传统的 MSLOR 方法 (改良的线超松弛: $\omega_1=1, \omega_2=\omega_{opt}$) 比较工作量显著减少, 在复杂问题中工作量可减少 5/6。

表 1 MSLOR 与 SIP 方法工作量对比
($\theta=0.98$)

问题类型	快热耦合	
	MSLOR	SIP
1	92	21
2	94	22
3	98	21
4	95	18
5	93	18
6	96	18
7	98	18
8	101	18
9	102	—
10	105	—
总和	974	154
MSLOR/SIP	6.3:1	

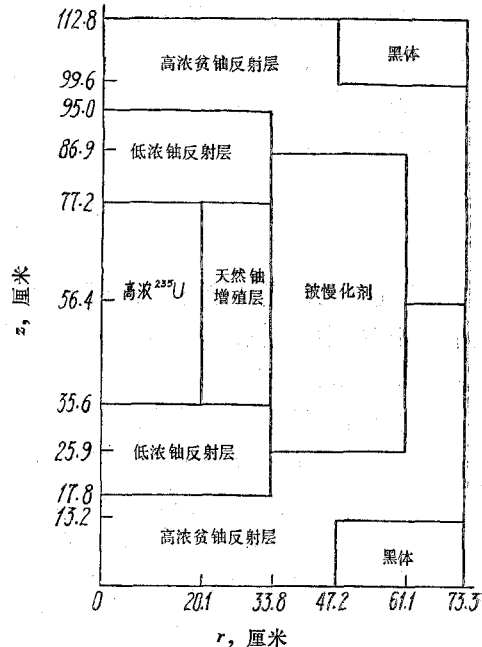


图 1 快热耦合堆布置图

(下转第 144 页)

电压可适当降低,充分获取低压注入的优点。

文献[7]中介绍的边耦合腔结构具有环形耦合腔,不仅加工简单,工作更加稳定,也较适于按装磁透镜。

参 考 文 献

- [1] 姚充国、陈益梅,原子能科学技术, 3, 212(1978).
- [2] K. Irie et al., *Jap. J. Appl. Phys.*, 12, 277(1973).
- [3] Kenneth Whithan, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-18, 3, 542(1971).
- [4] C. S. Han et al., *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-18, 3, 292(1971).
- [5] 小野胜弘, 东芝レビュー, 29, 11, 981(1974).
- [6] K. Ono et al., *Particle Accelerators*, 5, 4, 207(1973).
- [7] D. T. Tran, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-24, 3, 1774(1977).

(上接第 126 页)

在一般情况下,收敛性不强烈依赖于参数 θ ,在 θ 满足 $0 \leq \theta < 1$ 的条件下都可以得到收敛的结果,但是随着问题的介质和网格步长的不均匀性的增长,对 θ 的依赖关系也显得明显。在均匀的试验问题中可取 $\theta=1.0$,这是最好、也是最大的容许值,一般可取 $\theta=0.98$ 即能达到满意的收敛速度和得到满意的收敛解。

这里提供一个临界的快热耦合堆作为例子,其布置如图 1 所示,工作量的对比列于表 1 中, m 是外迭代的次数,表中数字表示每次外迭代中四群内迭代次数的总和,由程序 MADES^[5]提供。

SIP 的缺陷也是十分明显的,首先,矩阵 N_0 对于 θ 的依赖关系是含糊不清的,其次 N_0 的非对称性导致 $(M+N_0)$ 的非对称性,这就使得难以对迭代矩阵作理论分析和在理论上确定“最优” θ 值造成困难,一定程度上影响了 SIP 的广泛使用。在即将使用的三维程序中,我们将采用对称的 SIP,以克服上述的缺陷。

参 考 文 献

- [1] H. L. Stone, *SIAM J. Numer. Anal.*, 5, 3, 530(1968).
- [2] R. Fröhlich, KFK-1821(1973).
- [3] 杨应辉等,原子能科学技术, 1, 32(1979).
- [4] D. M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Academic Press, 1971.
- [5] 杨应辉, MADES——用 SIP 方法解中子扩散方程的 FORTRAN 程序, 内部资料, 1977.