# 用二个次序统计量作极值分布的参数估计

茆诗松　费鹤良　丁　元

（数学系）

## 一、前　　言

不少产品寿命服从二参数威布尔分布，如轴承寿命、电子元器件寿命等，因此介决威布尔分布的二个参数的估计问题是有实际意义的。

设随机变量 $T$ 服从二参数威布尔分布，其分布函数为

$$F_T(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}} \quad t>0, \quad \begin{pmatrix}\alpha>0\\ \beta>0\end{pmatrix} \tag{1-1}$$

那末随机变量 $X=\ln T$ 服从 I 型极小值分布，其分布函数为

$$F_X(x)=1-e^{-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}} \quad -\infty<x<\infty \tag{1-2}$$

这里 $\mu=\ln\beta$，$\sigma=1/\alpha$。今后分别称 $\mu$ 与 $\sigma$ 为极值分布(1-2)的位置参数与尺度参数。再经过变换 $y=(x-\mu)/\sigma$ 后，随机变量 $Y$ 服从 $\mu=0$、$\sigma=1$ 的标准极值分布，其分布函数为

$$F_Y(y)=1-e^{-e^{y}} \quad -\infty<y<\infty \tag{1-3}$$

由此可见，经上述变换后，威布尔分布的二个参数的估计问题就转化为极值分布的二个参数的估计问题。

本文在 Swartz 与 Murthy[2] 和 Mann[3] 等人工作的基础上，研究了在极值分布的参数估计中，选用哪二个次序统计量组成的估计量具有最小风险的最佳搭配问题，以及用若干个这种估计的最佳线性组合问题。本文还研究了这种统计量的区间估计问题，并用随机模拟方法给出了参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 作区间估计用的分位点值。

## 二、二个次序统计量的无偏估计(TOUE)和不变估计(TOIE)

设 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是来自威布尔分布的一个容量为 $n$ 的子样，其次序统计量为

$$t_{1,n}\leqslant t_{2,n}\leqslant\cdots\leqslant t_{n,n} \tag{2-1}$$

经过变换 $x=\ln T$，$y=(x-\mu)/\sigma$ 后，次序仍保持不变，即

$$x_{1,n}\leqslant x_{2,n}\leqslant\cdots\leqslant x_{n,n} \tag{2-2}$$

$$y_{1,n}\leqslant y_{2,n}\leqslant\cdots\leqslant y_{n,n} \tag{2-3}$$

这里(2-2)和(2-3)可分别看作是来自极值分布(1-2)和标准极值分布(1-3)的次序统计量。其中标准极值分布的次序统计量(2-3)的一、二阶矩 $E(y_{k,n})$、$\mathrm{Var}(y_{k,n})$、$\mathrm{cov}(y_{k,n}, y_{l,n})$($k, l=1, 2, \cdots, n$, $k\neq l$)都可以算出，对 $n\leqslant25$ 有表可查[1]。

Swartz, G. D. 和 Murthy, V. K[2] 构造了形如

$$\hat{\sigma}=b_{k,l,n}(x_{l,n}-x_{k,n})=b_{k,l,n}\ln\frac{t_{l,n}}{t_{k,n}} \tag{2-4}$$

的估计 $Z$，其中 $l>k$。适当地选择

$$b_{k,l,n}=1/(E(y_{l,n})-E(y_{k,n})) \tag{2-5}$$

就可以使 $\hat{\sigma}$ 是尺度参数 $\sigma$ 的无偏估计。

位置参数 $\mu$ 的估计量可取 Mann, N. R. 在1975年提出的简单无偏估计[3]

$$\hat{\mu}=x_{l,n}-E(y_{l,n})\hat{\sigma} \tag{2-6}$$

上述二个无偏估计量 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 分别称为极值分布的位置参数 $\mu$ 和尺度参数 $\sigma$ 的二个次序统计量的无偏估计，简记为TOUE。它们的协方差矩阵不难算出

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(\hat{\mu}) & \mathrm{cov}(\hat{\mu},\ \hat{\sigma}) \\ \mathrm{cov}(\hat{\mu},\ \hat{\sigma}) & \mathrm{Var}(\hat{\sigma}) \end{pmatrix}=\sigma^2\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \tag{2-7}$$

其中

$$\begin{aligned} A=A_{k,l,n}&=\mathrm{Var}(\hat{\mu}/\sigma) \\ &=\mathrm{Var}(y_{l,n})+CE^2(y_{l,n})-2b_{k,l,n}E(y_{l,n})[\mathrm{Var}(y_{l,n})-\mathrm{cov}(y_{k,n},\ y_{l,n})] \end{aligned} \tag{2-8}$$

$$\begin{aligned} B=B_{k,l,n}&=\mathrm{cov}(\hat{\mu}/\sigma,\ \hat{\sigma}/\sigma) \\ &=b_{k,l,n}[\mathrm{Var}(y_{l,n})-\mathrm{cov}(y_{k,n},\ y_{l,n})]-CE(y_{l,n}) \end{aligned} \tag{2-9}$$

$$\begin{aligned} C=C_{k,l,n}&=\mathrm{Var}(\hat{\sigma}/\sigma) \\ &=b_{k,l,n}^2[\mathrm{Var}(y_{l,n})+\mathrm{Var}(y_{k,n})-2\,\mathrm{cov}(y_{k,n},\ y_{l,n})] \end{aligned} \tag{2-10}$$

可见 $A$、$B$、$C$ 与参数 $\mu$、$\sigma$ 无关，它们仅是次序统计量(2-3)的期望值，方差和相关矩的组合，仅与正整数 $k$, $l$ 和 $n$ 有关。

根据不变估计的基本定理[2][4]，在TOUE的线性组合类

$$U=\{\hat{\theta}=a\hat{\mu}+b\hat{\sigma},\ \ a,\ b\ 为任意实数\}$$

中，参数 $\mu$, $\sigma$ 及其线性组合 $\phi=l_1\mu+l_2\sigma$ ($l_1$, $l_2$ 为已知任意常数）的最小均方误差不变估计(TOIE)分别为

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}&=\frac{1}{1+C}\hat{\sigma} \\ \tilde{\mu}&=\hat{\mu}-\frac{B}{1+C}\hat{\sigma} \\ \tilde{\phi}&=l_1\tilde{\mu}+l_2\tilde{\sigma}=l_1\hat{\mu}+\frac{l_2-l_1B}{1+C}\hat{\sigma} \end{aligned} \tag{2-11}$$

其风险(均方误差)分别为

$$\begin{aligned} R_1(\tilde{\sigma},\ \sigma)&=\frac{C}{1+C} \\ R_2(\tilde{\mu},\ \mu)&=A-\frac{B^2}{1+C} \\ R_3(\tilde{\phi},\phi)&=\frac{1}{1+C}[Al_1^2+Cl_2^2+2Bl_1l_2+(AC-B^2)l_1^2] \end{aligned} \tag{2-12}$$

其中 $A$, $B$, $C$ 如(2-8), (2-9), (2-10)所示。

为了在实际使用中减少计算量，可以将不变估计量 $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\mu}$ 改写为如下形式

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}&=\tilde{b}_{k,l,n}(x_{l,n}-x_{k,n}) \\ \tilde{\mu}&=x_{l,n}-\tilde{d}_{k,l,n}(x_{l,n}-x_{k,n}) \end{aligned} \tag{2-13}$$

其中

$$\tilde{b}_{k,l,n}=\frac{b_{k,l,n}}{1+C_{k,l,n}}$$
$$\tilde{d}_{k,l,n}=\left(E(y_{l,n})+\frac{B_{k,l,n}}{1+C_{k,l,n}}\right)b_{k,l,n} \tag{2-14}$$

在给定的子样容量 $n$，对任意二个正整数 $k$, $l$ $(1\leqslant k<l\leqslant n)$ 无偏系数 $b_{k,l,n}$ 和不变系数 $\tilde{b}_{k,l,n}$ 和 $\tilde{d}_{k,l,n}$ 是可以算出。对 $n\leqslant 25$, 系数 $b_{k,l,n}$, $\tilde{b}_{k,l,n}$, $\tilde{d}_{k,l,n}$ 的数值表已算出，部分数据列于附表(1)。

## 三、最佳搭配的选择

在给定 $n$ 和截尾数 $r$ 的情况下，取不同的 $k$ 和 $l(1\leqslant k<l\leqslant r)$ 无偏估计量 $\hat{\sigma}$(和 $\hat{\mu}$)的方差 $C_{k,l,n}$(和 $A_{k,l,n}$)仍有大小可比。因此在给定 $n$ 和 $r$ 的情况下，可以选择这样的搭配 $k'$, $l'$(和 $k''$, $l''$)，使得

$$C_{k',l',n}=\min_{1\leqslant k<l\leqslant r} C_{k,l,n} \tag{3-1}$$

$$A_{k'',l'',n}=\min_{1\leqslant k<l\leqslant r} A_{k'',l'',n} \tag{3-2}$$

一般地说，$k'$, $l'$ 和 $k''$, $l''$ 不会对应相等。但在实际应用中，一般比较注意参数 $\sigma$ 的估计，并且这里所选用的参数 $\mu$ 的无偏估计 (2-6) 又依赖于参数 $\sigma$ 的估计量。故可以根据 (3-1) 来挑选 $k'$, $l'$ 作为在给定 $n$ 和 $r$ 的情况下的最佳搭配。对 $n\leqslant 25$ 和 $1\leqslant r\leqslant n$, 最佳搭配列于表(1)中。

从表 1 中可以看出，在给定 $n$ 和 $r$ 的情况下，最佳搭配 $k'$, $l'$ 分别为

$$l'=r;\quad k'=\left[\frac{r-1}{5}\right]+1 \tag{3-3}$$

即最佳搭配 $k'$, $l'$ 仅与截尾数 $r$ 有关。

类似地，对不变估计(2-11)亦存在相应的最佳搭配。假如仍然用参数 $\sigma$ 的不变估计 $\tilde{\sigma}$ 的风险的大小作为挑选最佳搭配的标准，并注意到，当 $C_1<C_2$ 时，下列不等式恒成立

$$\frac{C_1}{1+C_1}<\frac{C_2}{1+C_2}$$

就会发现，不变估计的最佳搭配与无偏估计的最佳搭配完全一致(见附表(1))。

例 1　下列子样是从 $\alpha=1.0526$, $\beta=1408$ 的威布尔分布的母体中抽取 $n=6$ 的随机子样

116, 2087, 1303, 3977, 1048, 426。

根据最佳搭配公式(3-3)，选用其中第二个和第六个次序统计量来估计母体的参数 $\alpha$ 与 $\beta$。

为此，先用 TOUE 来估计相应极值分布的二个参数 $\sigma$ 与 $\mu$。因为 $x_{2,6}=\ln 426=6.0565$, $x_{6,6}=\ln 3977=8.2883$, 所以

$$\hat{\sigma}=b_{2,6,6}(x_{6,6}-x_{2,6})=0.4872(8.2883-6.0565)=1.0873$$
$$\hat{\mu}=x_{6,6}-E(y_{6,6})\hat{\sigma}=8.2883-0.7773\times 1.0873=7.4431$$

于是威布尔分布中二个参数 $\alpha$, $\beta$ 的估计值为

$$\hat{\alpha}=1/\hat{\sigma}=0.9197$$
$$\hat{\beta}=e^{\hat{\mu}}=1708$$

若用 TOIE 来估计极值分布中的二个参数 $\sigma$ 与 $\mu$，则有

$$\tilde{\sigma}=\tilde{b}_{2,6,6}(x_{6,6}-x_{2,6})=0.4168(8.2883-6.0565)=0.9302$$
$$\tilde{\mu}=x_{6,6}-\tilde{d}_{2,6,6}(x_{6,6}-x_{2,6})=8.2883-0.3555\times 2.2318=7.4949$$

于是威布尔分布的二个参数 $\alpha$, $\beta$ 的估计值为

$$\hat{\alpha}=1/\tilde{\sigma}=1.0750$$
$$\hat{\beta}=e^{\tilde{\mu}}=1796$$

上面计算中用到的 $b_{2,6,6}$, $\tilde{b}_{2,6,6}$, $\tilde{d}_{2,6,6}$ 均可在附表1中查得，而 $E(y_{6,6})$ 可在[1]中查得。

已经证明[4]，在线性估计类中，最佳线性不变估计(BLIE)的均方误差是最小的。二个次序统计量的无偏估计(TOUE)及其不变估计(TOIE)本质上仍属于线性估计类，它们的均方误差(MSE)有如下的关系：

$$\text{MSE(BLIE)}\leqslant\text{MSE(TOIE)}\leqslant\text{MSE(TOUE)}$$

对 $n=5(5)25$ 和 $2\leqslant r\leqslant n$, 上述三种估计的均方误差皆列于附表2上。图1上画出 $n=20$ 时，参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 的三种估计的均方误差曲线。从附表2和图1上可以看出，在截尾数 $r$ 相对于 $n$ 比较小的情况下，参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 的 TOIE 的均方误差分别比较接近于 BLIE 的均方误差。特别在 $r=2$ 时，这二种估计量的均方误差完全相等。所以在截尾数 $r$ 较小的情况下，使用 TOIE 不仅计算简便，而且也能保持相当的精度；在截尾数 $r$ 相对 $n$ 的比 $r/n\geqslant 1/2$ 时，参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 的 TOUE 的均方误差与 TOIE 的均方误差相差较小。这表明在 $r/n\geqslant 1/2$ 的情况下，使用 TOIE 与使用 TOUE 并无重大差别。应该指出，在截尾数 $r$ 比较靠近样本容量 $n$ 时，参数 $\mu$ 的 TOUE 和 TOIE 的均方误差略有增大趋势，这是因为在挑选最佳搭配时，是根据参数 $\sigma$ 的估计的均方误差最小进行的，因而不能保证参数 $\mu$ 的估计的均方误差也是最小。这在使用时是要加以注意的。但在大多数场合，参数 $\sigma$ 与 $\mu$ 的估计的均方误差的大小是一致的。

## 四、参数 $\sigma$ 的 TOUE 的最佳线性组合

在生产实际中，有时会迂到这样的情况，投入 $n$ 个试验样品，由于测试条件、测试手段等等限制，不能获得全部 $n$ 个试验数据，只能获得其中部分数据，但是在所获得的数据中却往往包含有(它们分别是第几个)次序统计量的信息。譬如在寿命试验中，若采用定时测试，那末所得的数据就接近于上述模型。

例如在母体服从威布尔分布场合下，投入 $n$ 个试验样品，只能得到如下 $k(\leqslant n)$ 个数据

$$t_{r_1}<t_{r_2}<\cdots<t_{r_k} \tag{4-1}$$

其中

$$1\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_k\leqslant n \tag{4-2}$$

这时为了估计母体中的二个参数，可以在上述不完全子样中挑选最佳搭配，使用 TOUE 或 TOIE 进行估计。但是这样还没有充分利用这个不完全子样。为了较充分地利用不完全子样，可以选出若干个较好的搭配(当然所有搭配都做也可以)，用 TOUE 获得若干个无偏估计，设这些无偏估计为

$$\hat{\sigma}_1,\ \hat{\sigma}_2,\ \cdots,\ \hat{\sigma}_m$$

然后做它们的线性组合

$$\hat{\sigma}=a_1\hat{\sigma}_1+a_2\hat{\sigma}_2+\cdots+a_m\hat{\sigma}_m \tag{4-3}$$

其中系数 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_m$ 可以这样来确定，使得 $\hat{\sigma}$ 是无偏估计，且有最小方差。这样 TOUE 的

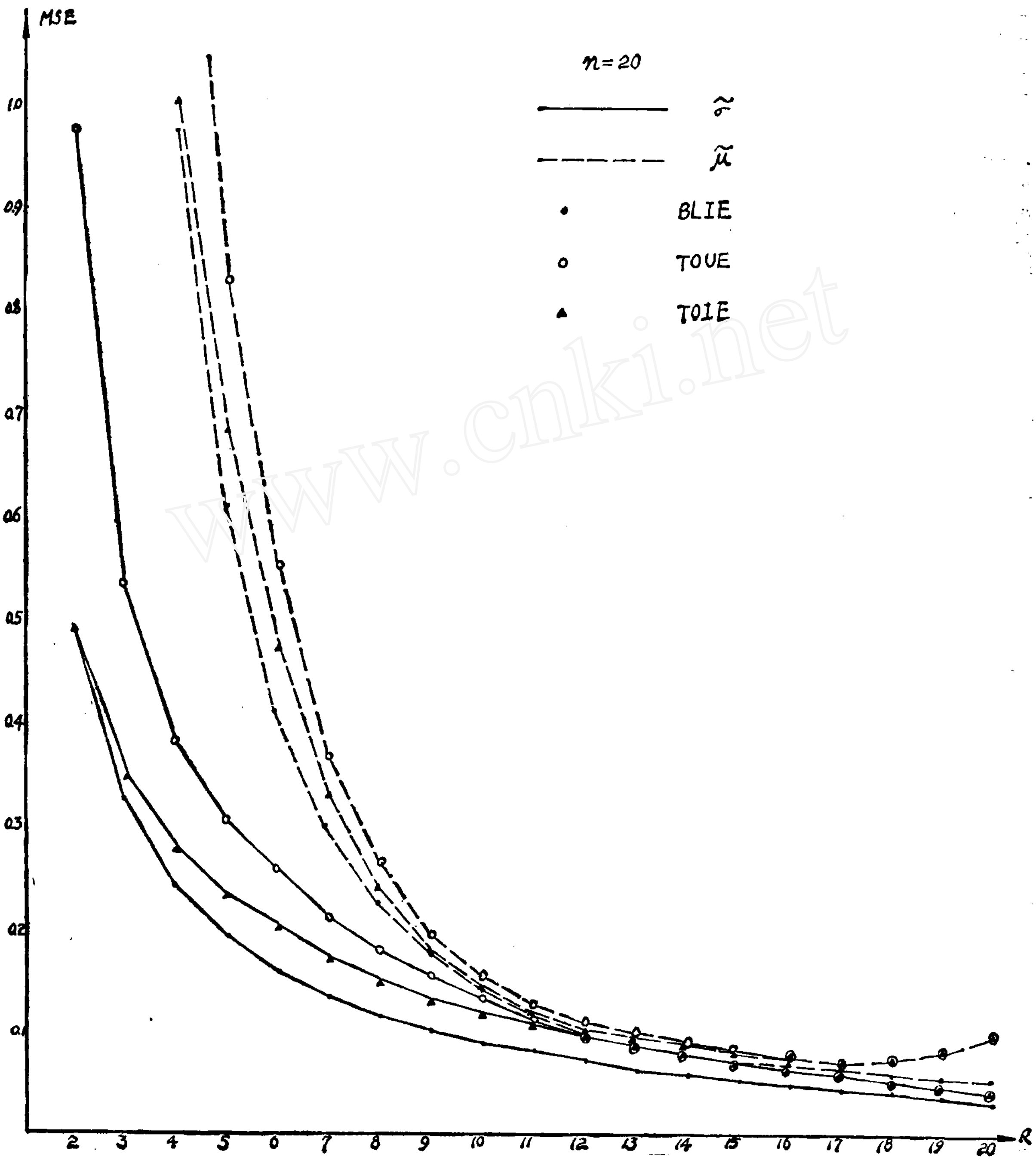
MSE
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
n=20
$\tilde{\sigma}$
$\tilde{\mu}$
BLIE
TOUE
TOIE
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
R

图 1

最佳线性组合是存在的。

**定理 1** 设 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_m$ 分别是参数 $\sigma$ 的 $m$ 个无偏估计量，它们的方差与协方差分别是

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_i/\sigma)=v_{ii} \quad (i=1, 2, \cdots, m)\\
&\mathrm{cov}(\hat{\sigma}_i/\sigma, \hat{\sigma}_j/\sigma)=v_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots, m, i\neq j)
\end{aligned}
\tag{4-4}
$$

那么在任意的线性组合类(4-3)中，使得 $\hat{\sigma}$ 是 $\sigma$ 的最小方差无偏估计是当

$$a_i=\sum_{j=1}^m v^{ij} \Big/ \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m v^{ij} \tag{4-5}$$

即

$$\hat{\sigma}=\sum_{i=1}^m a_i\hat{\sigma}_i=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m v^{ij}\hat{\sigma}_i \Big/ \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m v^{ij} \tag{4-6}$$

并且 $\hat{\sigma}$ 的方差为

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}/\sigma)=1 \Big/ \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m v^{ij} \tag{4-7}$$

其中 $v^{ij}$ 为矩阵 $V=(v_{ij})$ 的逆矩阵中的元素。

**证明** 根据无偏性的要求 $E(\hat{\sigma})=\sigma$，立即可以推出

$$\sum_{i=1}^m a_i=1 \tag{4-8}$$

记

$$a=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}, \quad V=\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ v_{m1} & \cdots & v_{mm}\end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}_m$$

则条件(4-8)可改写为 $a'\mathbb{1}=1$。我们要求在(4-8)的条件下确定 $a$，使得

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma})=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_ia_j\mathrm{cov}(\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j)=a'Va$$

为极小。为此作函数

$$\Psi=\mathrm{Var}(\hat{\sigma})-2\lambda\left(\sum_{i=1}^m a_i-1\right)=a'Va-2\lambda(a'\mathbb{1}-1)$$

其中 $\lambda$ 为拉格朗日因子。利用 $\Psi$ 对向量 $a$ 的导数，并令其为零，

$$\frac{\partial\Psi}{\partial a}=2Va-2\lambda\mathbb{1}=0$$

可得

$$a=\lambda V^{-1}\mathbb{1}, \quad \lambda=\frac{1}{\mathbb{1}'V^{-1}\mathbb{1}}$$

于是

$$a=\frac{V^{-1}\mathbb{1}}{\mathbb{1}'V^{-1}\mathbb{1}}$$

或

$$a_i=\sum_{j=1}^m v^{ij} \Big/ \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m v^{ij}$$

这样就得到估计(4-7)。它的方差

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}/\sigma)=a'Va=\frac{1}{\mathbb{1}'V^{-1}\mathbb{1}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m v^{ij}}$$

其中 $v^{ij}$ 为 $V$ 的逆矩阵 $V^{-1}=(v^{ij})$中的元素。证毕。

从不完全子样 (4-1) 可以获得参数 $\sigma$ 若干个 TOUE, 设其中第 $i$ 个 TOUE $\hat{\sigma}_i$ 是利用不完全子样中某二个样本 $t_{i_1}$, $t_{i_2}$ 进行估计的, 则

$$\hat{\sigma}_i=b_{i_1,i_2,n}(\ln t_{i_1}-\ln t_{i_2}),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{4-9}$$

而它的方差与协方差可以算得

$$v_{ii}=\operatorname{Var}(\hat{\sigma}_i/\sigma)=b^2_{i_1,i_2,n}[\operatorname{Var}(y_{i_1,n})+\operatorname{Var}(y_{i_2,n})-2\operatorname{cov}(y_{i_1,n},\ y_{i_2,n})] \tag{4-10}$$

$$\begin{aligned} v_{ij}&=\operatorname{cov}(\hat{\sigma}_i/\sigma,\ \hat{\sigma}_j/\sigma)\\ &=b_{i_1,i_2,n}\times b_{j_1,j_2,n}[\operatorname{cov}(y_{i_1,n},\ y_{j_1,n})+\operatorname{cov}(y_{i_2,n},\ y_{j_2,n})\\ &\quad-\operatorname{cov}(y_{i_1,n},\ y_{j_2,n})-\operatorname{cov}(y_{i_2,n},\ y_{j_1,n})] \end{aligned} \tag{4-11}$$

其中 $\operatorname{Var}(y_{i,n})$ 和 $\operatorname{cov}(y_{i,n},\ y_{j,n})$ 可在[1]中查得。这时定理 1 的条件都得到满足, TOUE 的最佳线性组合 $\hat{\sigma}$ 立即可以算得。

例 2　某产品的寿命试验中, 投入 $n=10$ 个样品, 获得的不完全子样只含 4 个数据, 它们是 $t_1$, $t_2$, $t_5$, $t_{10}$。若产品寿命服从威布尔分布, 则可利用最佳搭配(1-5)和(2-10)获得相应极值分布中参数 $\sigma$ 的二个无偏估计($x_i=\ln t_i$)

$$\hat{\sigma}_1=b_{1,5,10}(x_5-x_1),\quad v_{11}=\operatorname{Var}(\hat{\sigma}_1/\sigma)=0.2784$$

$$\hat{\sigma}_2=b_{2,10,10}(x_{10}-x_2),\quad v_{22}=\operatorname{Var}(\hat{\sigma}_2/\sigma)=0.0925$$

其中 $b_{1,5,10}$, $b_{2,10,10}$ 和 $v_{11}$, $v_{22}$ 可以在附表 2 中查到, 至于 $v_{12}$, 则要另行计算

$$\begin{aligned} v_{12}&=b_{1,5,10}\times b_{2,10,10}[\operatorname{cov}(y_{5,10},\ y_{10,10})+\operatorname{cov}(y_{1,10},\ y_{2,10})\\ &\quad-\operatorname{cov}(y_{1,10},\ y_{10,10})-\operatorname{cov}(y_{2,10},\ y_{5,10})]\\ &=0.0696 \end{aligned}$$

这样就可以从矩阵 $V=(v_{ij})$ 获得其逆矩阵 $V^{-1}=(v^{ij})$

$$V=\begin{pmatrix}0.2784 & 0.0696\\ 0.0696 & 0.0925\end{pmatrix},\quad V^{-1}=\begin{pmatrix}4.4258 & -3.3301\\ -3.3301 & 13.3206\end{pmatrix}$$

最后获得的 TOUE 的最佳线性搭配 $\hat{\sigma}$ 的方差为

$$\operatorname{Var}(\hat{\sigma}/\sigma)=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}v^{ij}}=\frac{1}{11.0862}=0.0902$$

在方差较小为好的意义下, 这样获得的 $\hat{\sigma}$ 要比 $\hat{\sigma}_1$ 和 $\hat{\sigma}_2$ 更好些。

## 五、参数 $\sigma$ 与 $\mu$ 的区间估计

参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 的区间估计可以通过估计量 $\hat{\sigma}$、$\hat{\mu}$(或 $\tilde{\sigma}$、$\tilde{\mu}$)的分布获得, 但这比较困难。下面用随机模拟的方法[5]来获得参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 的区间估计。因为

$$\hat{\sigma}/\sigma=b_{k,l,n}(y_{l,n}-y_{k,n}) \tag{5-1}$$

$$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}=\frac{y_{l,n}}{\hat{\sigma}/\sigma}-E(y_{l,n}) \tag{5-2}$$

所以, 可以通过计算机上产生大量的标准极值分布的伪随机数, 来获得变量 $\hat{\sigma}/\sigma$ 和 $(\hat{\mu}-\mu)/\sigma$ 的分布的分位点, 用这种分位点可以进行参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 的区间估计。具体方法如下。

(1) 产生标准极值分布的伪随机数, 由标准极值分布函数(1-3)可以得到

$$y=\ln\ln\frac{1}{1-F(y)} \tag{5-3}$$

由于 $F(y)$ 在 $(0, 1)$ 上均匀分布，所以由计算机上产生的均匀分布的伪随机数，就可由(5-3)获得标准极值分布的伪随机数。

(2) 建立估计量 $\hat{\sigma}/\sigma$（或 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$）的分位值 $s(\lambda)$ 与区间 $(0, 1)$（或 $(-0.5, 0.5)$）上的数值 $x$ 之间的线性关系

$$x=a+bs(\lambda) \tag{5-4}$$

在给定子样容量 $n$ 和截尾数 $r$ 时，可以根据附表1确定最佳搭配 $k, l$。由电子计算机按照(5-3)产生 $n$ 个标准极值分布的随机数，并把它们由小到大进行排列，然后选择相应的第 $k$ 个和第 $l$ 个随机数，将它们代入(5-1)和(5-2)，便可获得 $\hat{\sigma}/\sigma$ 和 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$ 的数值。重复上述过程1000次，可以得到 $\hat{\sigma}/\sigma$（或 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$）的数值1000个，并由小到大依次排列，设 $s(0.01)$ 表示1000个 $\hat{\sigma}/\sigma$（或 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$）数值中间依次排列的第10个最小值，相应的 $s(0.99)$ 表示第990个数值，对 $\hat{\sigma}/\sigma$ 按照(5-4)与区间 $(0, 1)$ 中的值建立如下对应

$$\begin{aligned}0.1&=a+bs(0.01)\\0.9&=a+bs(0.99)\end{aligned} \tag{5-5}$$

从而求出 $a, b$。同样对 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$ 按照(5-4)与区间 $(-0.5, 0.5)$ 中的值建立如下对应

$$\begin{aligned}-0.4&=a+bs(0.01)\\0.4&=a+bs(0.99)\end{aligned} \tag{5-6}$$

同样可以求出 $a, b$。

(3) 根据(5-1)和(5-2)对 $\hat{\sigma}/\sigma$ 和 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$ 进行大量模拟计算，一般大于10000次，将这些值对应到区间 $(0, 1)$ 或区间 $(-0.5, 0.5)$ 上。

(4) 将 $(0, 1)$ 区间 $m$ 等分（我们计算时采用 $m=500$），然后计算落入每一等分区间 $\left(\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]$, $i=1, 2, \cdots, m$ 的频数。

令 $s_i$ 满足 $i/m=a+bs_i$，则估计量 $\hat{\sigma}/\sigma$（或 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$）落入区间 $(s_{i-1}, s_i]$ 中的频数等于 $x$ 落入 $\left(\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]$ 中的频数，从而可以获得估计量 $\hat{\sigma}/\sigma$（或 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$）的分布的分位点。

我们对子样容量 $n=20$，截尾数 $r=12$ 以及 $n=20$, $n=20$ 的情况下，在SD-725电子计算机上进行计算，模拟重复次数为10000次，具体结果见附表(3), (4), (5), (6)。

例3　下列子样是从威布尔分布的母体中抽取的随机子样 $(n=20)$

102, 134, 218, 274, 559, 621, 686, 1034, 1206, 1228, 1250, 1414,
1610, 2014, 2071, 2080, 2140, 3880, 4089, 4557。

用最佳搭配，挑选第4个和第20个次序统计量作参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 的TOUE。

$$\hat{\sigma}=b_{4,20,20}\ln\frac{t_{20,20}}{t_{4,20}}=0.9748$$

$$\hat{\mu}=\ln t_{20,20}-E(y_{20,20})\hat{\sigma}=7.2298$$

对信度 $\alpha$，参数 $\sigma$ 的置信区间可以给出如下：

$$P\{x_{\alpha/2}\leqslant\hat{\sigma}/\sigma\leqslant x_{1-\alpha/2}\}=1-\alpha$$

若取 $\alpha=0.05$，则可查附表(5)，可知

$$x_{\alpha/2}=0.6326,\quad x_{1-\alpha/2}=1.4318$$

于是可以算得参数 $\sigma$ 的置信区间 $(0.6801, 1.5409)$，而相应的 $\alpha=1/\sigma$ 的置信区间为 $(0.6490, 1.4704)$。

对信度 $\alpha$，参数 $\mu$ 的置信区间可以如下给出

$$P\left\{x'_{\alpha/2}\leqslant\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}\leqslant x'_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

若取 $\alpha=0.05$，则可查附表(6)，可知

$$x'_{\alpha/2}=-0.5974,\quad x'_{1-\alpha/2}=0.6604$$

于是可以算得参数 $\mu$ 的置信区间为 (6.5860, 7.8121)，而相应的 $\beta=e^{\mu}$ 的置信区间为 (725, 2473)。

如果算得参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 的 TOIE $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\mu}$，要对参数 $\sigma$ 和 $\mu$ 作出区间估计，亦可借助于 $\hat{\sigma}/\sigma$ 和 $(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$ 的分布的分位点表，这是因为

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}=\tilde{b}_{k,l,n}(y_{l,n}-y_{k,n})=\frac{\tilde{b}_{k,l,n}}{b_{k,l,n}}\cdot\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\tag{5-7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\mu}-\mu}{\tilde{\sigma}}&=\frac{y_{l,n}}{\tilde{\sigma}/\sigma}-\tilde{d}_{k,l,n}\frac{y_{l,n}-y_{k,n}}{\tilde{\sigma}/\sigma}\\&=\frac{y_{l,n}}{\hat{\sigma}/\sigma}\cdot\frac{b_{k,l,n}}{\tilde{b}_{k,l,n}}-\frac{\tilde{d}_{k,l,n}}{\tilde{b}_{k,l,n}}\\&=\frac{b_{k,l,n}}{\tilde{b}_{k,l,n}}\left(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}+E(y_{l,n})-\frac{\tilde{d}_{k,l,n}}{b_{k,l,n}}\right)\end{aligned}\tag{5-8}$$

其中 $b_{k,l,n}$, $\tilde{b}_{k,l,n}$, $\tilde{d}_{k,l,n}$ 均可在附表 1 中查得。

## 参 考 文 献


[1] Mann, N. R. (1968) "Result on statistical estimation and hypothesis testing with application to the weibull and extreme-value distributions" ARL-68-0068.

[2] Swartz, G. B. and Murthy, V. K. (1971) "Further contributions to reliability" ARL-71-0261.

[3] Mann, N. R. and Fertig, K. W. "Simplified efficient point and interval estimation for weibull parameters" Technometrics, Vol. 17, No. 3.

[4] 上海师大应用数学组(1976)"二参数 weibull 分布的参数估计(综合报告)"上海师大油印。

[5] Mann, N. R. Schafer, R. E and Singpurwalla, N. D. (1974) "Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data" John Wiley and Sons, New York.


### 附表(1) TOUE 和 TOIE 最佳搭配系数表

符号说明：$b$：$\hat{\sigma}$ 的 TOUE 系数，$\tilde{b}$：$\tilde{\sigma}$ 的 TOIE 系数，$\tilde{d}$：$\tilde{\mu}$ 的 TOIE 系数，$c=c_{k,l,n}=\mathrm{Var}\left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right)$

| $n$ | $k$ | $L(=r)$ | $b$ | $\tilde{b}$ | $\tilde{d}$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 0.7213 | 0.4214 | 0.1107 | 0.7119 |
| 3 | 1 | 2 | 0.8221 | 0.4521 | −0.1660 | 0.8184 |
| 3 | 1 | 3 | 0.4809 | 0.3507 | 0.1761 | 0.3714 |
| 4 | 1 | 2 | 0.8690 | 0.4655 | −0.3470 | 0.8670 |
| 4 | 1 | 3 | 0.5384 | 0.3771 | −0.0151 | 0.4275 |
| 4 | 1 | 4 | 0.3942 | 0.3125 | 0.2027 | 0.2612 |
| 5 | 1 | 2 | 0.8963 | 0.4730 | −0.4814 | 0.8950 |
| 5 | 1 | 3 | 0.5678 | 0.3898 | −0.1462 | 0.4567 |
| 5 | 1 | 4 | 0.4360 | 0.3356 | 0.0533 | 0.2992 |
| 5 | 1 | 5 | 0.3476 | 0.2880 | 0.2164 | 0.2068 |

（续表）

| $n$ | $k$ | $L(=r)$ | $b$ | $\tilde{b}$ | $\tilde{a}$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 2 | 0.9141 | 0.4778 | −0.5833 | 0.9133 |
| 6 | 1 | 3 | 0.5861 | 0.3974 | −0.2471 | 0.4749 |
| 6 | 1 | 4 | 0.4586 | 0.3473 | −0.0514 | 0.3205 |
| 6 | 1 | 5 | 0.3812 | 0.3085 | 0.0917 | 0.2355 |
| 6 | 2 | 6 | 0.4872 | 0.4168 | 0.3555 | 0.1690 |
| 7 | 1 | 2 | 0.9267 | 0.4811 | −0.6769 | 0.9261 |
| 7 | 1 | 3 | 0.5986 | 0.4024 | −0.3292 | 0.4874 |
| 7 | 1 | 4 | 0.4732 | 0.3546 | −0.1334 | 0.3344 |
| 7 | 1 | 5 | 0.3999 | 0.3193 | 0.0037 | 0.2523 |
| 7 | 2 | 6 | 0.5527 | 0.4633 | 0.1942 | 0.1929 |
| 7 | 2 | 7 | 0.4367 | 0.3837 | 0.3494 | 0.1380 |
| 8 | 1 | 2 | 0.9361 | 0.4836 | −0.7525 | 0.9356 |
| 8 | 1 | 3 | 0.6077 | 0.4061 | −0.3985 | 0.4965 |
| 8 | 1 | 4 | 0.4834 | 0.3596 | −0.2012 | 0.3444 |
| 8 | 1 | 5 | 0.4123 | 0.3263 | −0.0661 | 0.2637 |
| 8 | 2 | 6 | 0.5913 | 0.4896 | 0.0715 | 0.4443 |
| 8 | 2 | 7 | 0.4899 | 0.4237 | 0.2114 | 0.1563 |
| 8 | 2 | 8 | 0.4015 | 0.3593 | 0.3445 | 0.1176 |
| 9 | 1 | 2 | 0.9434 | 0.4855 | −0.8184 | 0.9430 |
| 9 | 1 | 3 | 0.6146 | 0.4088 | −0.4584 | 0.5035 |
| 9 | 1 | 4 | 0.4911 | 0.3633 | −0.2591 | 0.3518 |
| 9 | 1 | 5 | 0.4212 | 0.3312 | −0.1245 | 0.2720 |
| 9 | 2 | 6 | 0.6178 | 0.5072 | −0.0301 | 0.2181 |
| 9 | 2 | 7 | 0.5218 | 0.4467 | 0.1070 | 0.1682 |
| 9 | 2 | 8 | 0.4467 | 0.3944 | 0.2228 | 0.1324 |
| 9 | 2 | 9 | 0.3754 | 0.3403 | 0.3403 | 0.1032 |
| 10 | 1 | 2 | 0.9491 | 0.4870 | −0.8769 | 0.9488 |
| 10 | 1 | 3 | 0.6201 | 0.4110 | −0.5111 | 0.5090 |
| 10 | 1 | 4 | 0.4971 | 0.3662 | −0.3097 | 0.3576 |
| 10 | 1 | 5 | 0.4280 | 0.3348 | −0.1748 | 0.2784 |
| 10 | 2 | 6 | 0.6375 | 0.5200 | −0.1174 | 0.2258 |
| 10 | 2 | 7 | 0.5440 | 0.4623 | 0.0203 | 0.1766 |
| 10 | 2 | 8 | 0.4740 | 0.4150 | 0.1313 | 0.1420 |
| 10 | 2 | 9 | 0.4148 | 0.3718 | 0.2308 | 0.1156 |
| 10 | 2 | 10 | 0.3651 | 0.3250 | 0.3367 | 0.0925 |
| 11 | 1 | 2 | 0.9538 | 0.4882 | −0.9293 | 0.9536 |
| 11 | 1 | 3 | 0.6245 | 0.4127 | −0.5582 | 0.5134 |
| 11 | 1 | 4 | 0.5019 | 0.3684 | −0.3546 | 0.3622 |
| 11 | 1 | 5 | 0.4334 | 0.3377 | −0.2190 | 0.2834 |
| 11 | 2 | 6 | 0.6527 | 0.5299 | −0.1942 | 0.2318 |
| 11 | 2 | 7 | 0.5607 | 0.4739 | −0.0547 | 0.1831 |
| 11 | 2 | 8 | 0.4932 | 0.4291 | 0.0553 | 0.1494 |
| 11 | 2 | 9 | 0.4388 | 0.3904 | 0.1491 | 0.1239 |
| 11 | 2 | 10 | 0.3902 | 0.3537 | 0.2366 | 0.1031 |
| 11 | 3 | 11 | 0.4168 | 0.3847 | 0.4141 | 0.0835 |

（续表）

| $n$ | $k$ | $L(=r)$ | $b$ | $\tilde{b}$ | $\tilde{d}$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 1 | 2 | 0.9577 | 0.4893 | −0.9769 | 0.9575 |
| 12 | 1 | 3 | 0.6282 | 0.4141 | −0.6008 | 0.5171 |
| 12 | 1 | 4 | 0.5058 | 0.3702 | −0.3949 | 0.3660 |
| 12 | 1 | 5 | 0.4377 | 0.3400 | −0.2584 | 0.2875 |
| 12 | 2 | 6 | 0.6649 | 0.5377 | −0.2628 | 0.2366 |
| 12 | 2 | 7 | 0.5738 | 0.4829 | −0.1209 | 0.1882 |
| 12 | 2 | 8 | 0.5079 | 0.4397 | −0.0106 | 0.1549 |
| 12 | 2 | 9 | 0.4559 | 0.4034 | 0.0811 | 0.1301 |
| 12 | 2 | 10 | 0.4117 | 0.3707 | 0.1624 | 0.1103 |
| 12 | 3 | 11 | 0.4648 | 0.4256 | 0.3055 | 0.0922 |
| 12 | 3 | 12 | 0.3958 | 0.3680 | 0.4061 | 0.0754 |
| 13 | 1 | 2 | 0.9610 | 0.4901 | −1.0204 | 0.9609 |
| 13 | 1 | 3 | 0.6313 | 0.4153 | −0.6396 | 0.5201 |
| 13 | 1 | 4 | 0.5090 | 0.3717 | −0.4315 | 0.3693 |
| 13 | 1 | 5 | 0.4413 | 0.3419 | −0.2941 | 0.2909 |
| 13 | 2 | 6 | 0.6749 | 0.5440 | −0.3248 | 0.2405 |
| 13 | 2 | 7 | 0.5844 | 0.4901 | −0.1803 | 0.1923 |
| 13 | 2 | 8 | 0.5194 | 0.4480 | −0.0691 | 0.1594 |
| 13 | 2 | 9 | 0.4690 | 0.4132 | 0.0220 | 0.1350 |
| 13 | 2 | 10 | 0.4271 | 0.3827 | 0.1007 | 0.1158 |
| 13 | 3 | 11 | 0.4949 | 0.4505 | 0.2219 | 0.0986 |
| 13 | 3 | 12 | 0.4388 | 0.4052 | 0.3057 | 0.0828 |
| 13 | 3 | 13 | 0.3784 | 0.3540 | 0.3994 | 0.0689 |
| 14 | 1 | 2 | 0.9638 | 0.4908 | −1.0605 | 0.9637 |
| 14 | 1 | 3 | 0.6339 | 0.4163 | −0.6753 | 0.5228 |
| 14 | 1 | 4 | 0.5118 | 0.3730 | −0.4652 | 0.3719 |
| 14 | 1 | 5 | 0.4444 | 0.3435 | −0.3266 | 0.2938 |
| 14 | 2 | 6 | 0.6833 | 0.5493 | −0.3813 | 0.2438 |
| 14 | 2 | 7 | 0.5931 | 0.4961 | −0.2344 | 0.1956 |
| 14 | 2 | 8 | 0.5289 | 0.4547 | −0.1218 | 0.1630 |
| 14 | 2 | 9 | 0.4794 | 0.4209 | −0.0305 | 0.1389 |
| 14 | 2 | 10 | 0.4389 | 0.3919 | 0.0470 | 0.1201 |
| 14 | 3 | 11 | 0.5168 | 0.4684 | 0.1509 | 0.1035 |
| 14 | 3 | 12 | 0.4658 | 0.4280 | 0.2293 | 0.0884 |
| 14 | 3 | 13 | 0.4175 | 0.3882 | 0.3057 | 0.0754 |
| 14 | 3 | 14 | 0.3638 | 0.3421 | 0.3935 | 0.0636 |
| 15 | 1 | 2 | 0.9663 | 0.4915 | −1.0976 | 0.9662 |
| 15 | 1 | 3 | 0.6361 | 0.4171 | −0.7083 | 0.5250 |
| 15 | 1 | 4 | 0.5142 | 0.3741 | −0.4961 | 0.3742 |
| 15 | 1 | 5 | 0.4469 | 0.3448 | −0.3565 | 0.2963 |
| 15 | 2 | 6 | 0.6904 | 0.5538 | −0.4333 | 0.2466 |
| 15 | 2 | 7 | 0.6005 | 0.5013 | −0.2842 | 0.1979 |
| 15 | 2 | 8 | 0.5367 | 0.4603 | −0.1697 | 0.1661 |
| 15 | 2 | 9 | 0.4480 | 0.4272 | −0.0780 | 0.1422 |
| 15 | 2 | 10 | 0.4485 | 0.3991 | −0.0008 | 0.1236 |

（续表）

| $n$ | $k$ | $L(=r)$ | $b$ | $\tilde{b}$ | $\tilde{d}$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 3 | 11 | 0.5340 | 0.4822 | 0.0880 | 0.1074 |
| 15 | 3 | 12 | 0.4857 | 0.4445 | 0.1643 | 0.0927 |
| 15 | 3 | 13 | 0.4421 | 0.4093 | 0.2349 | 0.0803 |
| 15 | 3 | 14 | 0.3997 | 0.3738 | 0.3055 | 0.0694 |
| 15 | 3 | 15 | 0.3514 | 0.3317 | 0.3884 | 0.0593 |
| 16 | 1 | 2 | 0.9684 | 0.4920 | −1.1322 | 0.9683 |
| 16 | 1 | 3 | 0.6381 | 0.4179 | −0.7390 | 0.5270 |
| 16 | 1 | 4 | 0.5162 | 0.3750 | −0.5245 | 0.3765 |
| 16 | 1 | 5 | 0.4492 | 0.3459 | −0.3842 | 0.2984 |
| 16 | 2 | 6 | 0.6965 | 0.5576 | −0.4814 | 0.2491 |
| 16 | 2 | 7 | 0.6068 | 0.5052 | −0.3293 | 0.2011 |
| 16 | 2 | 8 | 0.5434 | 0.4650 | −0.2138 | 0.1687 |
| 16 | 2 | 9 | 0.4951 | 0.4325 | −0.1213 | 0.1449 |
| 16 | 2 | 10 | 0.4564 | 0.4051 | −0.0441 | 0.1266 |
| 16 | 3 | 11 | 0.5479 | 0.4933 | 0.0313 | 0.1106 |
| 16 | 3 | 12 | 0.5012 | 0.4572 | 0.1070 | 0.0962 |
| 16 | 3 | 13 | 0.4602 | 0.4245 | 0.1750 | 0.0842 |
| 16 | 3 | 14 | 0.4223 | 0.3933 | 0.2394 | 0.0738 |
| 16 | 3 | 15 | 0.3846 | 0.3613 | 0.3051 | 0.0644 |
| 16 | 4 | 16 | 0.3897 | 0.3690 | 0.4409 | 0.0559 |
| 17 | 1 | 2 | 0.9703 | 0.4925 | −1.1647 | 0.9702 |
| 17 | 1 | 3 | 0.6398 | 0.4185 | −0.7676 | 0.5287 |
| 17 | 1 | 4 | 0.5180 | 0.3759 | −0.5516 | 0.3780 |
| 17 | 1 | 5 | 0.4511 | 0.3459 | −0.4100 | 0.3002 |
| 17 | 2 | 6 | 0.7018 | 0.5609 | −0.5262 | 0.2512 |
| 17 | 2 | 7 | 0.6123 | 0.5089 | −0.3717 | 0.2033 |
| 17 | 2 | 8 | 0.5492 | 0.4690 | −0.2546 | 0.1709 |
| 17 | 2 | 9 | 0.5013 | 0.4369 | −0.1613 | 0.1473 |
| 17 | 2 | 10 | 0.4630 | 0.4101 | −0.0838 | 0.1291 |
| 17 | 3 | 11 | 0.5595 | 0.5025 | −0.0206 | 0.1133 |
| 17 | 3 | 12 | 0.5139 | 0.4675 | 0.0551 | 0.0991 |
| 17 | 3 | 13 | 0.4745 | 0.4364 | 0.1221 | 0.0873 |
| 17 | 3 | 14 | 0.4390 | 0.4075 | 0.1838 | 0.0773 |
| 17 | 3 | 15 | 0.4056 | 0.3798 | 0.2427 | 0.0677 |
| 17 | 4 | 16 | 0.4303 | 0.4060 | 0.3544 | 0.0599 |
| 17 | 4 | 17 | 0.3769 | 0.3583 | 0.4341 | 0.0521 |
| 18 | 1 | 2 | 0.9720 | 0.4929 | −1.1951 | 0.9719 |
| 18 | 1 | 3 | 0.6414 | 0.4191 | −0.7945 | 0.5302 |
| 18 | 1 | 4 | 0.5196 | 0.3767 | −0.5767 | 0.3796 |
| 18 | 1 | 5 | 0.4528 | 0.3478 | −0.4341 | 0.3019 |
| 18 | 2 | 6 | 0.7065 | 0.5638 | −0.5681 | 0.2530 |
| 18 | 2 | 7 | 0.6171 | 0.5120 | −0.4112 | 0.2052 |
| 18 | 2 | 8 | 0.5542 | 0.4725 | −0.2926 | 0.1728 |
| 18 | 2 | 9 | 0.5066 | 0.4408 | −0.1984 | 0.1493 |
| 18 | 2 | 10 | 0.4687 | 0.4143 | −0.1204 | 0.1312 |

（续表）

| $n$ | $k$ | $L(=r)$ | $b$ | $\tilde{b}$ | $\tilde{d}$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 3 | 11 | 0.5693 | 0.5103 | −0.0685 | 0.1158 |
| 18 | 3 | 12 | 0.5245 | 0.4761 | 0.0077 | 0.1016 |
| 18 | 3 | 13 | 0.4861 | 0.4460 | 0.0743 | 0.0900 |
| 18 | 3 | 14 | 0.4522 | 0.4187 | 0.1346 | 0.0802 |
| 18 | 3 | 15 | 0.4211 | 0.3929 | 0.1910 | 0.0716 |
| 18 | 4 | 16 | 0.4563 | 0.4291 | 0.2886 | 0.0634 |
| 18 | 4 | 17 | 0.4147 | 0.3928 | 0.3518 | 0.0558 |
| 18 | 4 | 18 | 0.3658 | 0.3487 | 0.4281 | 0.0489 |
| 19 | 1 | 2 | 0.9734 | 0.4933 | −1.2239 | 0.9734 |
| 19 | 1 | 3 | 0.6427 | 0.4196 | −0.8199 | 0.5316 |
| 19 | 1 | 4 | 0.5210 | 0.3773 | −0.6004 | 0.3810 |
| 19 | 1 | 5 | 0.4543 | 0.3486 | −0.4567 | 0.3033 |
| 19 | 2 | 6 | 0.7106 | 0.5664 | −0.6073 | 0.2546 |
| 19 | 2 | 7 | 0.6212 | 0.5148 | −0.4482 | 0.2068 |
| 19 | 2 | 8 | 0.5585 | 0.4755 | −0.3281 | 0.1745 |
| 19 | 2 | 9 | 0.5112 | 0.4441 | −0.2329 | 0.1511 |
| 19 | 2 | 10 | 0.4736 | 0.4180 | −0.1544 | 0.1331 |
| 19 | 3 | 11 | 0.5778 | 0.5170 | −0.1130 | 0.1177 |
| 19 | 3 | 12 | 0.5335 | 0.4834 | −0.0362 | 0.1037 |
| 19 | 3 | 13 | 0.4959 | 0.4541 | 0.0305 | 0.0922 |
| 19 | 3 | 14 | 0.4630 | 0.4277 | 0.0901 | 0.0826 |
| 19 | 3 | 15 | 0.4333 | 0.4034 | 0.1449 | 0.0742 |
| 19 | 4 | 16 | 0.4757 | 0.4466 | 0.2315 | 0.0652 |
| 19 | 4 | 17 | 0.4388 | 0.4144 | 0.2897 | 0.0589 |
| 19 | 4 | 18 | 0.4011 | 0.3811 | 0.3495 | 0.0523 |
| 19 | 4 | 19 | 0.3559 | 0.3401 | 0.4227 | 0.0462 |
| 20 | 1 | 2 | 0.9748 | 0.4936 | −1.2511 | 0.9747 |
| 20 | 1 | 3 | 0.6440 | 0.4201 | −0.8438 | 0.5328 |
| 20 | 1 | 4 | 0.5223 | 0.3779 | −0.6226 | 0.3822 |
| 20 | 1 | 5 | 0.4557 | 0.3493 | −0.4780 | 0.3046 |
| 20 | 2 | 6 | 0.7143 | 0.5687 | −0.6444 | 0.2561 |
| 20 | 2 | 7 | 0.6251 | 0.5173 | −0.4830 | 0.2083 |
| 20 | 2 | 8 | 0.5624 | 0.4782 | −0.3615 | 0.1761 |
| 20 | 2 | 9 | 0.5153 | 0.4470 | −0.2653 | 0.1526 |
| 20 | 2 | 10 | 0.4780 | 0.4212 | −0.1862 | 0.1347 |
| 20 | 3 | 11 | 0.5852 | 0.5228 | −0.1546 | 0.1194 |
| 20 | 3 | 12 | 0.5413 | 0.4897 | −0.0771 | 0.1055 |
| 20 | 3 | 13 | 0.5043 | 0.4609 | −0.0100 | 0.0942 |
| 20 | 3 | 14 | 0.4722 | 0.4353 | 0.0494 | 0.0846 |
| 20 | 3 | 15 | 0.4434 | 0.4120 | 0.1033 | 0.0764 |
| 20 | 4 | 16 | 0.4912 | 0.4596 | 0.1822 | 0.0687 |
| 20 | 4 | 17 | 0.4569 | 0.4304 | 0.2368 | 0.0616 |
| 20 | 4 | 18 | 0.4236 | 0.4015 | 0.2905 | 0.0552 |
| 20 | 4 | 19 | 0.3891 | 0.3708 | 0.3473 | 0.0492 |
| 20 | 4 | 20 | 0.3470 | 0.3325 | 0.4178 | 0.0439 |

## 附 表 (2)

| 参数$\sigma$的三种估计量的均方误差 | | | | 参数$\mu$的三种估计量的均方误差 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | BLIE | TOIE | TOUE | $r$ | BLIE | TOIE | TOUE |
| | $n=5$ | | | | $n=5$ | | |
| 2 | 0.4723 | 0.4723 | 0.8950 | 2 | 1.2492 | 1.2492 | 1.7892 |
| 3 | 0.2942 | 0.3135 | 0.4567 | 3 | 0.4903 | 0.4905 | 0.5316 |
| 4 | 0.2024 | 0.2303 | 0.2992 | 4 | 0.2906 | 0.3005 | 0.3008 |
| 5 | 0.1428 | 0.1714 | 0.2068 | 5 | 0.2304 | 0.2935 | 0.2990 |
| | $n=10$ | | | | $n=10$ | | |
| 2 | 0.4869 | 0.4869 | 0.9488 | 2 | 2.3174 | 2.3174 | 3.9041 |
| 3 | 0.3154 | 0.3373 | 0.5090 | 3 | 0.9491 | 0.9777 | 1.2737 |
| 4 | 0.2293 | 0.2634 | 0.3576 | 4 | 0.4962 | 0.5140 | 0.5955 |
| 5 | 0.1773 | 0.2178 | 0.2784 | 5 | 0.3034 | 0.3093 | 0.3327 |
| 6 | 0.1422 | 0.1842 | 0.2258 | 6 | 0.2097 | 0.2143 | 0.2208 |
| 7 | 0.1167 | 0.1501 | 0.1766 | 7 | 0.1607 | 0.1643 | 0.1651 |
| 8 | 0.0970 | 0.1243 | 0.1420 | 8 | 0.1340 | 0.1447 | 0.1448 |
| 9 | 0.0810 | 0.1036 | 0.1156 | 9 | 0.1197 | 0.1451 | 0.1459 |
| 10 | 0.0668 | 0.0847 | 0.0925 | 10 | 0.1125 | 0.1691 | 0.1710 |
| | $n=15$ | | | | $n=15$ | | |
| 2 | 0.4914 | 0.4914 | 0.9662 | 2 | 3.1726 | 3.1726 | 5.6146 |
| 3 | 0.3217 | 0.3443 | 0.5250 | 3 | 1.3802 | 1.4406 | 1.9894 |
| 4 | 0.2367 | 0.2723 | 0.3742 | 4 | 0.7464 | 0.8023 | 0.9960 |
| 5 | 0.1856 | 0.2286 | 0.2963 | 5 | 0.4576 | 0.4964 | 0.5775 |
| 6 | 0.1513 | 0.1978 | 0.2466 | 6 | 0.3061 | 0.3360 | 0.3738 |
| 7 | 0.1268 | 0.1652 | 0.1979 | 7 | 0.2193 | 0.2314 | 0.2464 |
| 8 | 0.1083 | 0.1424 | 0.1661 | 8 | 0.1665 | 0.1713 | 0.1772 |
| 9 | 0.0937 | 0.1245 | 0.1422 | 9 | 0.1330 | 0.1350 | 0.1369 |
| 10 | 0.0819 | 0.1100 | 0.1236 | 10 | 0.1112 | 0.1137 | 0.1141 |
| 11 | 0.0721 | 0.0970 | 0.1074 | 11 | 0.0968 | 0.1012 | 0.1012 |
| 12 | 0.0638 | 0.0848 | 0.0927 | 12 | 0.0872 | 0.0958 | 0.0959 |
| 13 | 0.0564 | 0.0743 | 0.0803 | 13 | 0.0809 | 0.0963 | 0.0966 |
| 14 | 0.0498 | 0.0649 | 0.0694 | 14 | 0.0769 | 0.1031 | 0.1037 |
| 15 | 0.0434 | 0.0560 | 0.0593 | 15 | 0.0746 | 0.1219 | 0.1227 |
| | $n=20$ | | | | $n=20$ | | |
| 2 | 0.4936 | 0.4936 | 0.9747 | 2 | 3.8801 | 3.8801 | 7.0333 |
| 3 | 0.3247 | 0.3476 | 0.5328 | 3 | 1.7554 | 1.8438 | 2.6157 |
| 4 | 0.2402 | 0.2765 | 0.3822 | 4 | 0.9779 | 1.0704 | 1.3709 |
| 5 | 0.1894 | 0.2335 | 0.3046 | 5 | 0.6118 | 0.6874 | 0.8291 |
| 6 | 0.1555 | 0.2039 | 0.2561 | 6 | 0.4132 | 0.4766 | 0.5520 |
| 7 | 0.1312 | 0.1724 | 0.2083 | 7 | 0.2954 | 0.3311 | 0.3679 |
| 8 | 0.1129 | 0.1497 | 0.1761 | 8 | 0.2209 | 0.2410 | 0.2598 |

| 参数$\sigma$的三种估计量的均方误差 | | | |
|---|---|---|---|
| $r$ | BLIE | TOIE | TOUE |
| $n=20$ | | | |
| 9 | 0.0987 | 0.1324 | 0.1526 |
| 10 | 0.0872 | 0.1187 | 0.1347 |
| 11 | 0.0778 | 0.1067 | 0.1194 |
| 12 | 0.0699 | 0.0954 | 0.1055 |
| 13 | 0.0631 | 0.0861 | 0.0942 |
| 14 | 0.0572 | 0.0780 | 0.0846 |
| 15 | 0.0521 | 0.0710 | 0.0764 |
| 16 | 0.0475 | 0.0643 | 0.0687 |
| 17 | 0.0433 | 0.0580 | 0.0616 |
| 18 | 0.0394 | 0.0523 | 0.0552 |
| 19 | 0.0358 | 0.0468 | 0.0492 |
| 20 | 0.0321 | 0.0420 | 0.0439 |
| $n=25$ | | | |
| 2 | 0.4949 | 0.4949 | 0.9798 |
| 3 | 0.3265 | 0.3496 | 0.5375 |
| 4 | 0.2422 | 0.2790 | 0.3869 |
| 5 | 0.1916 | 0.2362 | 0.3093 |
| 6 | 0.1579 | 0.2073 | 0.2615 |
| 7 | 0.1337 | 0.1761 | 0.2138 |
| 8 | 0.1156 | 0.1537 | 0.1817 |
| 9 | 0.1014 | 0.1367 | 0.1584 |
| 10 | 0.0901 | 0.1234 | 0.1407 |
| 11 | 0.0808 | 0.1117 | 0.1257 |
| 12 | 0.0730 | 0.1008 | 0.1120 |
| 13 | 0.0664 | 0.0917 | 0.1010 |
| 14 | 0.0607 | 0.0841 | 0.0918 |
| 15 | 0.0557 | 0.0774 | 0.0839 |
| 16 | 0.0513 | 0.0712 | 0.0767 |
| 17 | 0.0474 | 0.0655 | 0.0701 |
| 18 | 0.0439 | 0.0604 | 0.0643 |
| 19 | 0.0403 | 0.0558 | 0.0591 |
| 20 | 0.0378 | 0.0516 | 0.0545 |
| 21 | 0.0351 | 0.0476 | 0.0500 |
| 22 | 0.0326 | 0.0437 | 0.0457 |
| 23 | 0.0302 | 0.0401 | 0.0418 |
| 24 | 0.0278 | 0.0367 | 0.0381 |
| 25 | 0.0254 | 0.0338 | 0.0350 |

| 参数$\mu$的三种估计量的均方误差 | | | |
|---|---|---|---|
| $r$ | BLIE | TOIE | TOUE |
| $n=20$ | | | |
| 9 | 0.1716 | 0.1824 | 0.1920 |
| 10 | 0.1379 | 0.1432 | 0.1480 |
| 11 | 0.1142 | 0.1179 | 0.1204 |
| 12 | 0.0973 | 0.0993 | 0.1003 |
| 13 | 0.0851 | 0.0870 | 0.0873 |
| 14 | 0.0761 | 0.0792 | 0.0793 |
| 15 | 0.0695 | 0.0750 | 0.0750 |
| 16 | 0.0647 | 0.0718 | 0.0718 |
| 17 | 0.0611 | 0.0721 | 0.0723 |
| 18 | 0.0586 | 0.0750 | 0.0753 |
| 19 | 0.0568 | 0.0815 | 0.0819 |
| 20 | 0.0538 | 0.0966 | 0.0969 |
| $n=25$ | | | |
| 2 | 4.4859 | 4.4859 | 8.2494 |
| 3 | 2.0853 | 2.1982 | 3.1673 |
| 4 | 1.1874 | 1.3131 | 1.7112 |
| 5 | 0.7560 | 0.8656 | 1.0647 |
| 6 | 0.5174 | 0.6141 | 0.7272 |
| 7 | 0.3730 | 0.4337 | 0.4935 |
| 8 | 0.2797 | 0.3192 | 0.3528 |
| 9 | 0.2167 | 0.2424 | 0.2621 |
| 10 | 0.1726 | 0.1891 | 0.2007 |
| 11 | 0.1409 | 0.1529 | 0.1601 |
| 12 | 0.1176 | 0.1245 | 0.1285 |
| 13 | 0.1001 | 0.1039 | 0.1061 |
| 14 | 0.0869 | 0.0891 | 0.0902 |
| 15 | 0.0767 | 0.0781 | 0.0786 |
| 16 | 0.0689 | 0.0705 | 0.0707 |
| 17 | 0.0628 | 0.0649 | 0.0650 |
| 18 | 0.0580 | 0.0612 | 0.0612 |
| 19 | 0.0543 | 0.0592 | 0.0592 |
| 20 | 0.0514 | 0.0586 | 0.0586 |
| 21 | 0.0491 | 0.0576 | 0.0577 |
| 22 | 0.0474 | 0.0591 | 0.0593 |
| 23 | 0.0461 | 0.0623 | 0.0625 |
| 24 | 0.0452 | 0.0686 | 0.0682 |
| 25 | | 0.0807 | 0.0809 |

## 附 表 (3)

$$D(x)=P\left[\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}<x\right]$$

子样容量 $n=20$, 截尾数 $r=12$ ($k=3$, $l=12$)

| $x$ | $D(x)$ | $x$ | $D(x)$ | $x$ | $D(x)$ | $x$ | $D(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.2765672 | 0.001 | 0.5363369 | 0.050 | 1.0535321 | 0.600 | 1.6424778 | 0.965 |
| 0.3116269 | 0.002 | 0.5561789 | 0.060 | 1.0842943 | 0.650 | 1.6731106 | 0.970 |
| 0.3350000 | 0.003 | 0.5749639 | 0.070 | 1.1338868 | 0.700 | 1.7101180 | 0.975 |
| 0.3482445 | 0.004 | 0.5910790 | 0.080 | 1.1863479 | 0.750 | 1.7510209 | 0.980 |
| 0.3622686 | 0.005 | 0.6045297 | 0.090 | 1.2481993 | 0.800 | 1.8152970 | 0.985 |
| 0.3759530 | 0.006 | 0.6062090 | 0.100 | 1.3263167 | 0.850 | 1.8347746 | 0.986 |
| 0.3875895 | 0.007 | 0.6776974 | 0.150 | 1.4242304 | 0.900 | 1.8456821 | 0.987 |
| 0.3934328 | 0.008 | 0.7263234 | 0.200 | 1.4527355 | 0.910 | 1.8717820 | 0.988 |
| 0.4012238 | 0.009 | 0.7715031 | 0.250 | 1.4788660 | 0.920 | 1.8815209 | 0.989 |
| 0.4085820 | 0.010 | 0.8083411 | 0.300 | 1.5009480 | 0.930 | 1.9072313 | 0.990 |
| 0.4369328 | 0.015 | 0.8437694 | 0.350 | 1.5423150 | 0.940 | 1.9214499 | 0.991 |
| 0.4589484 | 0.020 | 0.8807900 | 0.400 | 1.5628674 | 0.945 | 1.9341104 | 0.992 |
| 0.4744695 | 0.025 | 0.9206557 | 0.450 | 1.5812876 | 0.950 | 1.9633267 | 0.993 |
| 0.4898469 | 0.030 | 0.9588874 | 0.500 | 1.5999305 | 0.955 | 1.9828043 | 0.994 |
| 0.5131550 | 0.040 | 0.9949145 | 0.550 | 1.6214949 | 0.960 | 2.0334461 | 0.995 |

## 附 表 (4)

$$U(x)=P\left[\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}<x\right]$$

子样容量 $n=20$, 截尾数 $r=12$ ($k=3$, $l=12$)

| $x$ | $U(x)$ | $x$ | $U(x)$ | $x$ | $U(x)$ | $x$ | $U(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1.3348509 | 0.001 | −0.6794341 | 0.050 | 0.0920845 | 0.600 | 0.5450532 | 0.965 |
| −1.3062954 | 0.002 | −0.6300491 | 0.060 | 0.1287863 | 0.650 | 0.5704359 | 0.970 |
| −1.2753602 | 0.003 | −0.5903681 | 0.070 | 0.1701631 | 0.700 | 0.5974050 | 0.975 |
| −1.2491844 | 0.004 | −0.5485547 | 0.080 | 0.2142420 | 0.750 | 0.6307197 | 0.980 |
| −1.2063511 | 0.005 | −0.5143000 | 0.090 | 0.2628797 | 0.800 | 0.6800970 | 0.985 |
| −1.1777956 | 0.006 | −0.4874662 | 0.100 | 0.3130083 | 0.850 | 0.6925900 | 0.986 |
| −1.1501919 | 0.007 | −0.3725303 | 0.150 | 0.3766097 | 0.900 | 0.7092474 | 0.987 |
| −1.1302031 | 0.008 | −0.2873695 | 0.200 | 0.3929272 | 0.910 | 0.7243184 | 0.988 |
| −1.1093586 | 0.009 | −0.2187344 | 0.250 | 0.4105527 | 0.920 | 0.7473214 | 0.989 |
| −1.0810242 | 0.010 | −0.1607869 | 0.300 | 0.4314023 | 0.930 | 0.7877750 | 0.990 |
| −1.0195504 | 0.015 | −0.1125471 | 0.350 | 0.4570071 | 0.940 | 0.8139509 | 0.991 |
| −0.9426886 | 0.020 | −0.0562244 | 0.400 | 0.4695001 | 0.945 | 0.8702687 | 0.992 |
| −0.8851016 | 0.025 | −0.0245539 | 0.450 | 0.4837779 | 0.950 | 0.9638673 | 0.993 |
| −0.8220416 | 0.030 | 0.0162117 | 0.500 | 0.5030599 | 0.955 | | |
| −0.7392513 | 0.040 | 0.0541606 | 0.550 | 0.5169736 | 0.960 | | |

## 附 表 (5)

$$D(x)=P\left[\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}<x\right]$$

子样容量　$n=20$，$r=20$ ($k=4$, $l=20$)

| $x$ | $D(x)$ | $x$ | $D(x)$ | $x$ | $D(x)$ | $x$ | $D(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.4727209 | 0.001 | 0.6866547 | 0.050 | 1.0375565 | 0.600 | 1.4045242 | 0.965 |
| 0.5020075 | 0.002 | 0.6988789 | 0.060 | 1.0673618 | 0.650 | 1.4208759 | 0.970 |
| 0.5172610 | 0.003 | 0.7178528 | 0.070 | 1.0980365 | 0.700 | 1.4407054 | 0.975 |
| 0.5288536 | 0.004 | 0.7236483 | 0.080 | 1.1315418 | 0.750 | 1.4635856 | 0.980 |
| 0.5333280 | 0.005 | 0.7352160 | 0.090 | 1.1662449 | 0.800 | 1.4981601 | 0.985 |
| 0.5422767 | 0.006 | 0.7458595 | 0.100 | 1.2122949 | 0.850 | 1.5071088 | 0.986 |
| 0.5489882 | 0.007 | 0.7902369 | 0.150 | 1.2732942 | 0.900 | 1.5126407 | 0.987 |
| 0.5585471 | 0.008 | 0.8246381 | 0.200 | 1.2883351 | 0.910 | 1.5258197 | 0.988 |
| 0.5654620 | 0.009 | 0.8540574 | 0.250 | 1.3003338 | 0.920 | 1.5339549 | 0.989 |
| 0.5727836 | 0.010 | 0.8822981 | 0.300 | 1.3201712 | 0.930 | 1.5453441 | 0.990 |
| 0.5945045 | 0.015 | 0.9081605 | 0.350 | 1.3366768 | 0.940 | 1.5618179 | 0.991 |
| 0.6142730 | 0.020 | 0.9306235 | 0.400 | 1.3479034 | 0.945 | 1.5721902 | 0.992 |
| 0.6325772 | 0.025 | 0.9575089 | 0.450 | 1.3600689 | 0.950 | 1.5839049 | 0.993 |
| 0.6479178 | 0.030 | 0.9835628 | 0.500 | 1.3720648 | 0.955 | 1.6022904 | 0.994 |
| 0.6689143 | 0.040 | 1.0103658 | 0.550 | 1.3869523 | 0.960 | 1.6169337 | 0.995 |

## 附 表 (6)

$$\overline{U}(x)=P\left[\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}<x\right]$$

子样容量　$n=20$，$r=20$ ($k=4$, $l=20$)

| $x$ | $U(x)$ | $x$ | $U(x)$ | $x$ | $U(x)$ | $x$ | $U(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −0.8466835 | 0.001 | −0.4942715 | 0.050 | 0.0969625 | 0.600 | 0.6115919 | 0.965 |
| −0.8182122 | 0.002 | −0.4788336 | 0.060 | 0.1388210 | 0.650 | 0.6333521 | 0.970 |
| −0.8011293 | 0.003 | −0.4420553 | 0.070 | 0.1824609 | 0.700 | 0.6603999 | 0.975 |
| −0.7910062 | 0.004 | −0.4156470 | 0.080 | 0.2293102 | 0.750 | 0.7046887 | 0.980 |
| −0.7707599 | 0.005 | −0.3989520 | 0.090 | 0.2820806 | 0.800 | 0.7515083 | 0.985 |
| −0.7479828 | 0.006 | −0.3803485 | 0.100 | 0.3423512 | 0.850 | 0.7669461 | 0.986 |
| −0.7340835 | 0.007 | −0.3094186 | 0.150 | 0.4248134 | 0.900 | 0.7811185 | 0.987 |
| −0.7242566 | 0.008 | −0.2456217 | 0.200 | 0.4416677 | 0.910 | 0.7925071 | 0.988 |
| −0.7125518 | 0.009 | −0.1962276 | 0.250 | 0.4633782 | 0.920 | 0.8084510 | 0.989 |
| −0.7045979 | 0.010 | −0.1493764 | 0.300 | 0.4909116 | 0.930 | 0.8274319 | 0.990 |
| −0.6625688 | 0.015 | −0.1032965 | 0.350 | 0.5173706 | 0.940 | 0.8502089 | 0.991 |
| −0.6227089 | 0.020 | −0.0602281 | 0.400 | 0.5357862 | 0.945 | 0.8694429 | 0.992 |
| −0.5975592 | 0.025 | −0.0223049 | 0.450 | 0.5509434 | 0.950 | 0.8843746 | 0.993 |
| −0.5684778 | 0.030 | 0.0168312 | 0.500 | 0.5696712 | 0.955 | 0.8960162 | 0.994 |
| −0.5278044 | 0.040 | 0.0542337 | 0.550 | 0.5886521 | 0.960 | 0.9413173 | 0.995 |