一类半线性抛物方程的 Laguerre-Fourier 全离散谱逼近

向新民，张伟斌

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘　要：考虑用 Laguerre-Fourier 谱方法解一类半线性抛物方程，给出了全离散谱逼近格式，并得到了误差估计。

关键词：Laguerre-Fourier 谱方法；半线性抛物方程；全离散谱逼近格式；误差估计

中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2002)01-0007-06

0　引　言

利用谱方法对发展方程近似求解时，一般在空间方向采用某种谱方法，而在时间方向总是采用差分法，这样整体解的误差估计因时间方向误差的影响，精度会大大降低。对此，有些作者考虑在时间方向也采用谱方法，如文献[3]，[4]考虑了在有限时间采用谱方法，得到了很好的效果。

对于大时间的初边值问题，时间方向采用差分法不仅会增加大量的计算，也会对方法的稳定性提出更高的要求。鉴于 Laguerre 多项式在 $[0, +\infty)$ 上具有加权正交性，本文尝试对如下一类半线性抛物方程

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + f(u) = g(t, x), \quad x \in R,\ t > 0, & (1.1) \\ u(x, t) = u(x + 2\pi, t), \quad t > 0, & (1.2) \\ u(x, 0) = 0,\ \lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = 0, & (1.3) \end{cases}$$

在空间方向采用 Fourier 谱方法，而在时间方向采用 Laguerre 谱方法建立计算格式并给出误差估计。

2　记号和预备知识

记 $S_M = \mathrm{Span}\{e^{ikx} \mid -M \leqslant k \leqslant M-1\}$，$\omega(t) = e^{-t}$，$L_l(t)$ 表示 l 次 Laguerre 多项式，即

$$L_l(t) = \frac{1}{l!} e^t \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t}(t^l e^{-t}), \quad l = 0, 1, 2, \cdots,$$

收稿日期　2001-10-12

基金项目　国家自然科学基金(19871056)，上海市科学发展基金及上海市高校科技发展基金资助项目。

作者简介：向新民(1941-)，男，上海师范大学数理信息学院教授，博士生导师，张伟斌(1973-)，男，上海师范大学数理信息学院硕士研究生，工作单位宁夏大学。

且满足

$$\int_0^{+\infty} L_i(t)L_j(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \delta_{ij}, \quad \forall\ i,j = 0,1,2,\cdots,$$

并有

$$\int L_j(t)\mathrm{d}t = -L_{j+1}(t) + L_j(t), \quad \forall\ i,j = 0,1,2,\cdots,$$

记 $L_\omega^p(R^+) = \{v \mid \|v\|_{L_\omega^p} < +\infty\}$，其中

$$\|v\|_{L_\omega^p} = \begin{cases} (\int_{R^+} |v(y)|^p \omega(y)\mathrm{d}y)^{1/p}, & 1 < p < +\infty, \\ \operatorname*{ess\ sup}_{y\in R^+} |v(y)|, & p = +\infty. \end{cases}$$

特别，$L_\omega^p(R^+)$ 中内积和范数定义为

$$(u,v)_\omega = \int_0^{+\infty} u(t)v(t)\omega(t)\mathrm{d}t, \quad \|u\|_\omega = \{(u,u)_\omega\}^{1/2}.$$

对于非负整数 m，定义 $H_\omega^m(R^+) = \{v \mid \frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}x^k} \in L_\omega^2(R^+), 0 \leqslant k \leqslant m\}$. 其中半范数和范数为：

$$|v|_{m,\omega} = \|\frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}x^k}\|_\omega, \quad \|v\|_{m,\omega} = (\sum_{k=0}^{m} |v|_{k,\omega}^2)^{1/2}.$$

又记 $H_{0,\omega}^1(R^+) = \{v \mid v \in H_\omega^1(R^+), v(0) = 0\}$. 对于正整数 N，用 P_N 表示次数不超过 N 的 t 的多项式全体，而记 $P_N^0 = P_N \cap H_{0,\omega}^1(R^+)$.

对于任意正整数 β，引入空间 $H_{\omega,\beta}^r(R^+) = \{v \in H_\omega^r(R^+) \mid t^{\beta/2}v(t) \in H_\omega^r(R^+)\}$，其中范数定义为 $\|v\|_{r,\omega,\beta} = \|(1+t)^{\beta/2}v\|_{r,\omega}$.

为了本文讨论还引入如下内积和范数：

$$((f,g))_\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\omega(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x, \ \forall\ f,g \in L_\omega^2(R^+; L_p^2(0,2\pi)),$$

$$\|\|f\|\|_\omega^2 = ((f,f))_\omega.$$

又令 $H_p^\sigma(0,2\pi)$ 为 σ 阶周期的 Sobolev 空间. 最后定义两种空间方向和时间方向的投影算子.

$$P_M: L_p^2(0,2\pi) \longrightarrow S_M.$$

它由 $(u - P_M u, v) = 0, \ \forall\ v \in S_M$ 所确定；

$$P_N^{1,0}: H_{0,\omega}^1(R^+) \longrightarrow P_N^0.$$

它由 $((u - P_N^{1,0}u)_t, v_t)_\omega = 0, \ \forall\ v \in P_N^0$ 所确定. 利用上述两种投影算子，再定义如下投影算子

$$P_{MN}: H_\omega^1(R^+, L^2(0,2\pi)) \longrightarrow S_M \times P_N^0$$

它满足 $(((u - P_{MN}u)_t, v_t))_\omega = 0, \forall\ v \in S_M \times P_N^0$. 易知 $P_{MN}u = P_M P_N^{1,0}u = P_N^{1,0}P_M u$. 对于上述投影算子，以下引理成立：

引理 1[1] 对于任意 $0 \leqslant \mu \leqslant \sigma$，存在常数 c 使得

$$\|u - P_M u\|_\mu \leqslant cN^{\mu-\sigma}|u|_\sigma, \ \forall\ u \in H_p^\sigma(0,2\pi).$$

引理 2[2] 对于 $r \geqslant 1$，β 是小于 r 的最大整数. 则存在常数 c 使得

$$\|u - P_N^{1,0}u\|_{1,\omega} \leqslant cN^{\frac{(1-r)}{2}}\|u\|_{r,\omega,\beta} \quad \forall\ \ u \in H_{0,\omega}^1(R^+) \cap H_{\omega,\beta}^r(R^+).$$

引理 3 对于 $r \geqslant 1$，β 是小于 r 的最大整数. 则存在常数 c 使得

$$\|u - P_N^{1,0}u\|_\omega \leqslant CN^{\frac{-r}{2}}\|u\|_{r,\omega,\beta}, \forall\ u \in H_{0,\omega}^1(R^+) \cap H_{\omega,\beta}^r(R^+).$$

其中 c 为正常数.

证明 已知引理 2 的结论，采用对偶论证. 首先

$$\| u - P_N^{1,0} u \|_\omega = \sup_{\substack{h \in L_\omega^2(R^+) \\ h \neq 0}} \frac{\left| \int_0^{+\infty} (u - P_N^{1,0} u) h e^{-t} \mathrm{d}t \right|}{\| h \|_\omega}.$$

对任意给定的 $h \in L_\omega^2(R^+)$. 设 $\varphi \in H_{0,\omega}^1(R^+) \cap H_\omega^2(R^+)$ 是如下问题的解.

$$-(v, \varphi_{tt})_\omega + (v, \varphi_t)_\omega = (h, v)_\omega, \quad \forall\, v \in H_{0,\omega}^1(R^+).$$

利用 $P_N^{1,0}$ 的定义. 取 $v = u - P_N^{1,0} u$

$$\begin{aligned}
(h, u - P_N^{1,0} u)_\omega &= -(u - P_N^{1,0} u, \varphi_{tt})_\omega + (u - P_N^{1,0} u, \varphi_t)_\omega \\
&= -\int_0^{+\infty} \varphi_{tt} (u - P_N^{1,0} u) e^{-t} \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \varphi_t (u - P_N^{1,0} u) e^{-t} \mathrm{d}t \\
&= -\varphi_t (u - P_N^{1,0} u) e^{-t} \big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi_t (u - P_N^{1,0} u)_t e^{-t} \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \varphi_t (u - P_N^{1,0} u) e^{-t} \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \varphi_t (u - P_N^{1,0} u) e^{-t} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi_t (u - P_N^{1,0} u)_t e^{-t} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} (\varphi_t - \varphi_{Nt}) (u - P_N^{1,0} u)_t e^{-t} \mathrm{d}t \\
&\leqslant \| u - P_N^{1,0} u \|_{1,\omega} \inf_{\phi_t \in P_N^0} \| \varphi_t - \phi_t \|_\omega \\
&\leqslant C N^{(1-r)/2} \| u \|_{r,\omega,\beta} N^{-1/2} \| \varphi \|_{2,\omega} \\
&= C N^{-r/2} \| u \|_{r,\omega,\beta} \| \varphi \|_{2,\omega}.
\end{aligned}$$

于是

$$\| u - P_N^{1,0} u \|_\omega = \sup_{\substack{h \in L_\omega^2(R^+) \\ h \neq 0}} \frac{| (h, u - P_N^{1,0} u)_\omega |}{\| h \|_\omega} \leqslant C N^{-\frac{r}{2}} \| u \|_{r,\omega,\beta} \sup_{\substack{h \in L_\omega^2(R^+) \\ h \neq 0}} \frac{\| \varphi \|_{2,\omega}}{\| h \|_\omega}.$$

又有 φ 满足 $-\varphi_{tt} + \varphi_t = h$, $\varphi(0) = 0$. 用 φ_t 与前式作内积得:

$$-(\varphi_{tt}, \varphi_t)_\omega + \| \varphi_t \|_\omega^2 = (h, \varphi_t)_\omega. \tag{2.1}$$

由于

$$-\int_0^{+\infty} \varphi_{tt} \varphi_t e^{-t} \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \varphi_t^2 e^{-t} \big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \varphi_t^2 e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \varphi_t^2(0) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \varphi_t^2 e^{-t} \mathrm{d}t.$$

代入 (2.1) 有 $\frac{1}{2} \varphi_t^2(0) + \frac{1}{2} \| \varphi_t \|_\omega^2 \leqslant C \| h \|_\omega^2 + \frac{1}{4} \| \varphi_t \|_\omega^2$.

于是 $\| \varphi_t \|_\omega^2 \leqslant C \| h \|_\omega^2$. 现设 $\varphi_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j L_j(t)$. 两边从 0 到 t 积分得

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j \int_0^t L_j(\tau) \mathrm{d}\tau = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j (-L_{j+1}(t) + L_j(t)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j L_{j+1}(t) + \varphi_t$$

这样

$$\begin{aligned}
(\varphi, \varphi)_\omega &= \Big(-\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j L_{j+1}(t) + \varphi_t, \; -\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j L_{j+1}(t) + \varphi_t \Big)_\omega \\
&= 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j^2 - 2 \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j L_{j+1}(t), \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j L_j(t) \Big)_\omega \\
&= 2 \sum_{j=0}^{+\infty} u_j^2 - 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{u}_j \hat{u}_{j+1}.
\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式 $\sum_{j=0}^{+\infty} u_j \hat{u}_{j+1} \leqslant (\sum_{j=0}^{+\infty} u_j^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=0}^{+\infty} u_{j+1}^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \| \varphi_t \|_\omega^2 \leqslant C \| h \|_\omega^2$. 所以得 $\varphi \in L_\omega^2(R^+)$ 且有 $\| \varphi \|_\omega^2 \leqslant C \| h \|_\omega^2$.

另外由 $\varphi_n = \varphi_1 - h$ 易知 $\varphi_n \in L^2_\omega(R^+)$ 及

$$\| \varphi_n \|^2_\omega = \| \varphi_1 - h \|^2_\omega \leqslant C \| h \|^2_\omega.$$

于是

$$\| \varphi \|_{2,\omega} \leqslant C \| h \|_\omega.$$

所以结论得证.

引理 4 对于 $r \geqslant 1$, β 是小于 r 的最大整数, 则当 $u \in H^r_{\omega,\beta}(R^+; H_p^\sigma(0,2\pi)) \cap H^1_{0,\omega}(R^+; L_p^2(0,2\pi))$ 时, 有

$$| \| u - P_{MN}u \| |^2_\omega \leqslant CN^{-r} | \| u \| |^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L^2_p(0,2\pi))} + CN^{-r}M^{-\sigma} | \| \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} \| |^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L^2_p(0,2\pi))}$$

$$+ CM^{-\sigma} | \| \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} \| |^2_{L^2(R^+,L^2_p(0,2\pi))}.$$

其中 C 为正常数.

证明 由于

$$| \| u - P_{MN}u \| |^2_\omega \leqslant 2 (| \| u - P_N^{1,0}u \| |^2_\omega + | \| P_N^{1,0}u - P_M P_N^{1,0}u \| |^2_\omega).$$

$$| \| u - P_N^{1,0}u \| |^2_\omega \leqslant CN^{-r} \int_0^{2\pi} \| u \|^2_{r,\omega,\beta} dx = CN^{-r} | \| u \| |^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L^2_p(0,2\pi))}.$$

$$\begin{aligned} | \| P_N^{1,0}u - P_M P_N^{1,0}u \| |^2_\omega &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} | P_N^{1,0}u - P_M P_N^{1,0}u |^2 e^{-t} dt dx \\ &= \int_0^{+\infty} \| P_N^{1,0}u - P_M P_N^{1,0}u \|^2 e^{-t} dt \\ &\leqslant CM^{-\sigma} \int_0^{+\infty} | P_N^{1,0}u |_\sigma^2 e^{-t} dt. \end{aligned}$$

再考虑

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} | P_N^{1,0}u |_\sigma^2 e^{-t} dt &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} | P_N^{1,0} \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} |^2 e^{-t} dx dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} | P_N^{1,0} \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} |^2 e^{-t} dx dt \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \| P_N^{1,0} \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} \|^2_\omega dx + \int_0^{2\pi} \| \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} \|^2_\omega dx \\ &\leqslant CN^{-r} | \| \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} \| |^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L^2_p(0,2\pi))} + | \| \frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma} \| |^2_{L^2_\omega(R^+,L^2_p(0,2\pi))}. \end{aligned}$$

所以引理 4 得证.

3 近似解的存在唯一性和先验估计

问题(1.1)~(1.3)的变分形式为: 求 $u \in L^2_\omega(R^+, H_p^1(0,2\pi)) \cap C^1(R^+, L^2_p(0,2\pi))$ 使得

$$((u_t, v))_\omega + ((u_x, v_x))_\omega + ((f(u), v))_\omega = ((g, v))_\omega, \forall\ v \in L^2_\omega(R^+, H^1_p(0,2\pi)). \tag{3.1}$$

问题的全离散谱格式为: 求 $u_{MN} \in S_M \times P_N^0$, 使得

$$((\frac{d}{dt}u_{MN}, \varphi))_\omega + ((\frac{d}{dx}u_{MN}, \frac{d}{dx}\varphi))_\omega + ((f(u_{MN}), \varphi))_\omega = ((g, \varphi))_\omega, \ \forall\ \varphi \in S_M \times P_N^0. \tag{3.2}$$

对方程中的非线性项 $f(u)$, 假设满足如下条件:

$$((f(u) - f(v), u - v))_\omega \geqslant \gamma | \| u - v \| |^2_\omega. \tag{3.3}$$

$$((f(u) - f(v), \psi))_\omega \geqslant - c^* | \| u - v \| |_\omega | \| \psi \| |_\omega, \ \forall\ \ \psi \in L^2_\omega(R^+; L^2_p(0,2\pi)) \tag{3.4}$$

其中 $\gamma > -\frac{1}{2}$, $c^* > 0$ 常数.

在(3.2)式中取 $\varphi = u_{MN}$, 有

$$((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{MN},u_{MN}))_\omega+((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_{MN},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_{MN}))_\omega+((f(u_{MN}),u_{MN}))_\omega=((g,u_{MN}))_\omega.$$

$$\frac{1}{2}\|u_{MN}(t)\|^2e^{-t}|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}|\|u_{MN}\||_\omega^2+|\|u_{MNx}\||_\omega^2+((f(u_{MN}),u_{MN}))_\omega$$

$$\leqslant\varepsilon|\|u_{MN}\||_\omega^2+c_1(\varepsilon)|\|g\||_\omega^2.$$

由(3.3)得:

$$(\frac{1}{2}+\gamma)|\|u_{MN}\||_\omega^2+|\|u_{MNx}\||_\omega^2\leqslant 2\varepsilon|\|u_{MN}\||_\omega^2+c_1(\varepsilon)|\|g\||_\omega^2+c_1|f(0)|^2$$

只要取 $2\varepsilon<\frac{1}{2}+\gamma$ 得, $|\|u_{MN}\||_\omega^2+|\|u_{MNx}\||_\omega^2\leqslant c_2(\varepsilon)|\|g\||_\omega^2+c_2|f(0)|^2$.

于是有:

定理 1 设 $g\in L_\omega^2(R^+,L^2(0,2\pi))$,则对(3.2)的解 u_{MN} 有 $|\|u_{MN}\||_\omega^2+|\|u_{MNx}\||_\omega^2\leqslant\rho_0^2$.

利用定理1的结果,构造非线性连续映照 $w=F(u_{MN})$,其中 w 由

$$((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w,\varphi))_\omega+((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi))_\omega+((f(u_{MN}),\varphi))_\omega=((g,\varphi))_\omega,\ \forall\ \varphi\in S_M\times P_N^0.$$

所确定,重复上面的估计,可以得到

$$|\|w\||_\omega^2\leqslant C_1\rho_0^2+C_2|f(0)|^2+C_3|\|g\||_\omega^2=\rho_1^2$$

由此可知 $F(v)$ 将 $S_{\rho_1}\longrightarrow S_{\rho_1}$,这里 S_{ρ_1} 是 $S_M\times P_N^0$ 中以原点为中心,ρ_1 为半径的球.根据 Brouwer 不动点定理,$F(v)$ 存在不动点,这个不动点就是 u_{MN}.用类似的方法还可进一步证明这个不动点是唯一的,这样即得到了近似解 u_{MN} 的存在唯一性.

定理 2 设 $g\in L_\omega^2(R^+,L^2(0,2\pi))$,$f$ 满足(3.3)~(3.4),则近似方程(3.2)存在唯一解.

4 误差估计

先给出两个引理:

引理 5 记 $\xi=u-P_{MN}u$, $r\geqslant 1$, β 是小于 r 的最大整数,则有

$$|\|\xi_t\||_\omega^2\leqslant CN^{1-r}|\|u\||^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}+CM^{-\sigma}N^{1-r}|\|\frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma}\||^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}$$

$$+CM^{-\sigma}|\|\frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma}\||^2_{H^1_\omega(R^+,L_p^2(0,2\pi))}.$$

引理 6 对 $r\geqslant 1$, β 是小于 r 的最大整数,$\sigma\geqslant 0$,则有

$$|\|\xi_x\||_\omega^2\leqslant CN^{1-r}|\|u_x\||^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}+CM^{-\sigma}N^{-r}|\|\frac{\partial^{\sigma+1}u}{\partial x^{\sigma+1}}\||^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}$$

$$+CM^{-\sigma}|\|\frac{\partial^{\sigma+1}u}{\partial x^{\sigma+1}}\||^2_{L_\omega^2(R^+,L_p^2(0,2\pi))}.$$

这两个引理的证明完全类似引理4的过程,对于引理5,只要注意到 $\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(P_N^{1,0}u)_t=(P_N^{1,0}\frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma})_t$,即可得到.

最后,我们有如下误差估计

定理 3 设 $r\geqslant 1$, β 是小于 r 的最大整数,$\sigma\geqslant 0$,$u\in H^r_{\omega,\beta}(R^+;H_p^{\sigma+1}(0,2\pi))$,则有

$$|\|u-u_{MN}\||_\omega^2\leqslant CN^{1-r}|\|u\||^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}+CN^{1-r}|\|u_x\||^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}$$

$$+CN^{-r}M^{-\sigma}|\|\frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma}\||^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}+CN^{-r}M^{-\sigma}|\|\frac{\partial^{\sigma+1}u}{\partial x^{\sigma+1}}\||^2_{H^r_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}$$

$$+CM^{-\sigma}|\|\frac{\partial^\sigma u}{\partial x^\sigma}\||^2_{H^1_{\omega,\beta}(R^+,L_p^2(0,2\pi))}+CM^{-\sigma}|\|\frac{\partial^{\sigma+1}u}{\partial x^{\sigma+1}}\||^2_{L^2_\omega(R^+,L_p^2(0,2\pi))}.$$

证明 用(3.1)式减去(3.2)式得

$(((u - u_{MN})_t, v))_\omega + (((u - u_{MN})_x, v_x))_\omega + ((f(u) - f(u_{MN}), v))_\omega = 0, \forall v \in S_M \times P_N^0,$ (4.2)

令 $\xi = u - P_{MN}u$, $\eta = P_{MN}u - u_{MN}$, 则(4.2)可写为:

$$((\xi_t, v))_\omega + ((\eta_t, v))_\omega + ((\xi_x, v_x))_\omega + ((\eta_x, v_x))_\omega + ((f(u) - f(u_{MN}), v))_\omega = 0,$$

$\forall\ v \in S_M \times P_N^0$, 取 $v = \eta$, 则有

$$\frac{1}{2} \| \eta \|^2 e^{-t} |_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \| \eta \|_\omega^2 + \| \eta_x \|_\omega^2 + ((f(u) - f(u_{MN}), \eta))_\omega$$
$$= - ((\xi_t, \eta))_\omega - ((\xi_x, \eta_x))_\omega. \qquad (4.3)$$

因为 $|((\xi_t, \eta))_\omega| \leqslant \frac{1}{4} | \| \eta \| |_\omega^2 + c_1 | \| \xi_t \| |_\omega^2.$

$$|((\xi_x, \eta_x))_\omega| \leqslant \frac{1}{2} | \| \eta_x \| |_\omega^2 + c_2 | \| \xi_x \| |_\omega^2,$$

$$((f(u) - f(u_{MN}), \eta))_\omega = ((f(u) - f(P_{MN}u), \eta))_\omega + ((f(P_{MN}u) - f(u_{MN}), \eta))_\omega$$
$$\geqslant \gamma | \| \eta \| |_\omega^2 - c | \| \xi \| |_\omega | \| \eta \| |_\omega.$$

将上述估计代入(4.3)式得

$$(\gamma + \frac{1}{2}) | \| \eta \| |_\omega^2 + \frac{1}{2} | \| \eta_x \| |_\omega^2 \leqslant C(| \| \xi_x \| |_\omega^2 + | \| \xi_t \| |_\omega^2 + | \| \xi \| |_\omega^2) + \varepsilon | \| \eta \| |_\omega^2$$

取 $\varepsilon < \frac{1}{2} + \gamma$ 则

$$| \| \eta \| |_\omega^2 \leqslant C(| \| \xi \| |_\omega^2 + | \| \xi_x \| |_\omega^2 + | \| \xi_t \| |_\omega^2).$$

利用引理 4~6. 即得所证结果.

参考文献:

[1] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京:科学出版社, 2000.

[2] GUO Ben-yu, SHEN Jie. Laguerre-Glerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval[J]. Numer Math. 2000, 86: 635-654.

[3] ZHANG Fa-yong. Spectral and pseudospectral approximations in time for parbolic equations[J]. J Compu Math. 1998, 16(2): 107-120.

[4] 白红, 孙玉山, 张法勇. 关于 t 是周期的非线性抛物方程问题的 Fourier-Chebyshev 拟谱方法[J]. 哈尔滨工业大学学报. 1990(4): 1-10.

[5] MADAY Y. Methodes spectrales de type laguerre[J]. Rech Aerosp. 1985, 6: 365-375.

Laguerre-Fourier Fully Discrete Spectral Approximation of a Semilinear Parabolic Equation

(XIANG Xin-min, ZHANG Wei-bin)

(Matbematical and Science College, Shanghai Teacbers University, Shangbai 200234, China)

Abstract: We construct a fully discrete approximation of a semilinear parabolic equation by using the Laguerre-Fourier spectral metbod. The error estimations are given.

Key words: Laguerre-Fourier spectral method; simelinear parabolic equation; fully discrete aproximation; error estimation.