# 一类具有退缩线方程的解的拓展唯一性问题

蒋 鲁 敏

**摘 要**

在本文中证明了下面一类问题解的唯一性:

$$\begin{cases} Pu=[t-C(x)]^m\partial_t^2u+a\partial_x^2u+b\partial_tu+eu=f & t\geqslant C(x) \\ u|_{t=C(x)}=g \\ \partial_tu|_{t=C(x)}=h \end{cases}$$

其中 $a<0$; $b>0$; $m\geqslant2$或 $m=1$, $b>\max(3,|C''(0)\cdot a|)$.

具有重特征算子的 Cauchy 问题的唯一性,在许多文献中都进行了讨论(如[1],[2],[3])。这也就是在一定的光滑条件下通过初始曲面解拓展的唯一性问题。当算子有退缩线,而数据在退缩线上给出时,解的唯一性问题,即解越过退缩线拓展的唯一性问题是很有趣的。而通常所研究的 Cauchy 问题,或者所研究的算子关于时间变量 $t$ 没有退缩点([1],[2]),或者是 Fuchs 型([3])。下面所研究的问题,作变量替换变为相应的 Cauchy 问题时,算子有退缩点,又不是[3]中讨论的 Fuchs 型。

考察算子

$$P=[t-C(x)]^m\partial_{tt}+a\partial_{xx}+b\partial_t+e$$

其中 $\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{tt}=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ 等等。虽然将本文的结果可以毫无困难地推广到 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 的情况,但此处为简单计,设 $x\in\boldsymbol{R}^1$。$C(x)\in C^2$,且 $C(x)\geqslant0$, $C(0)=0$, $C''(0)>0$(在 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 时,要求曲面 $t=C(x)$ 通过点 $(0,0)\in\boldsymbol{R}_t^1\times\boldsymbol{R}_x^n$,位于 $t\geqslant0$ 半空间内,且在点$(0,0)$为严格凹)。$m$ 为正整数,$a,b,e\in\boldsymbol{R}$。再引入下面的记号:

$U$——$(0,0)\in\boldsymbol{R}^2$ 的一邻域

$U_+=\{(t,x)\in U,\ t\geqslant C(x)\}$, $\qquad U_-=\{(t,x)\in U,\ t\leqslant C(x)\}$

$r=U_-\cap U_+$——为算子 $P$ 的退缩线。

我们研究问题

$$\begin{cases} PZ=f\in C^2(U) \\ Z|_r=g\in C^2(r) \\ \partial_tZ|_r=h_1,\ \partial_xZ|_r=h_2 & h_1,h_2\in C^1(r) \end{cases}$$

在 $C^2(U)$ 内解的唯一性问题,或者研究问题

$$(1)\quad \begin{cases} PZ=0 & (t,x)\in U \\ Z=0 & (t,x)\in U_- \end{cases}$$

在 $C^2(U)$ 内的非另解问题。我们得到下面的结果：

**定理 1** 设 $a<0$，$b>0$，$e\geqslant 0$。则当下列条件之一成立时，(1) 的属于 $C^2(U)$ 的解 $Z(t,x)\equiv 0$：

(i) $m\geqslant 2$

(ii) $m=1$， $b>\max(3,|C''(0).a|)$。

**证明**：令 $W(t)=e^{k(t-T)^2}$，$k>0$，记 $U^T=\{(t,x)\in U,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，$T$ 为某正数。我们将证明下面的不等式(见[1])：

(2) $\displaystyle\int_0^T\|\varphi\|^2W(t)dt\leqslant Ck^{-1}\int_0^T\|P\varphi\|^2W(t)dt$ 对任意 $\varphi\in C_0^2(U^T)$

其中 $C$ 为与 $k$ 无关的常数，$\|\ \|$ 表示对 $x$ 取的 $L^2$ 的范数。事实上，由(2)很容易推得(1)只有平凡解。取 $\zeta(t)$ 为定义于 $t\geqslant 0$ 的非负 $C^\infty$ 函数，当 $t\leqslant\frac{2}{3}T$ 时 $\zeta(t)=1$，当 $t\geqslant T$ 时 $\zeta(t)=0$。若 $Z$ 为 $U$ 上(1)之 $C^2$ 解，取 $\varphi=\zeta Z$。当 $T$ 小时，对 $\varphi$ 应用不等式(2)，得

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\|\varphi\|^2W\,dt\leqslant\int_0^T\|\varphi\|^2Wdt\leqslant Ck^{-1}\int_0^T\|P\varphi\|^2Wdt=Ck^{-1}\int_0^T\|P(\zeta Z)\|^2Wdt$$

$$=Ck^{-1}\int_{\frac{2}{3}T}^T\|P(\zeta Z)\|^2Wdt\leqslant C'k^{-1}\int_{\frac{2}{3}T}^T W(t)dt$$

其中 $C'$ 与 $k$ 无关。固定 $T$，有

$$e^{k\frac{T^2}{4}}\int_0^{\frac{T}{2}}\|Z\|^2dt\leqslant\int_0^{\frac{T}{2}}\|Z\|^2e^{k(T-t)^2}dt\leqslant C''k^{-1}e^{k\frac{T^2}{9}}$$

$C''$ 与 $k$ 无关。从而有

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\|Z\|^2dt\leqslant C''k^{-1}e^{\frac{-5T^2}{36}k}$$

令 $k\to+\infty$，知 $Z(t,x)\equiv 0$。

现在来证(2)：令 $\varphi=e^{-\frac{k(t-T)^2}{2}}u=W^{-\frac{1}{2}}u$

有
$$\varphi_t=W^{-\frac{1}{2}}[u_t-k(t-T)u]$$
$$\varphi_{tt}=W^{-\frac{1}{2}}[u_{tt}-2k(t-T)u_t+(k^2(t-T)^2-k)u]$$
$$\varphi_{xx}=W^{-\frac{1}{2}}u_{xx}$$

记 $t-C(x)=\tilde{t}$

$$I=\int_0^T\|P\varphi\|^2Wdt$$

$$=\int_0^T\|au_{xx}+\tilde{t}^mu_{tt})+[-2k\tilde{t}^m(t-T)+b]u_t+[k^2\tilde{t}^m(t-T)^2-bk(t-T)-k\tilde{t}^m+e]u\|^2dt$$

将其展开，利用分部积分法，并注意到 $u\in C_0^2(U^T)$。舍去一些等于零的项，得以下各项，右端为其前面的系数：

$\|au_{xx}+\tilde{t}^mu_{tt}\|^2$: 1

$$u_t^2:\quad k^2\cdot 2\tilde{t}^{2m}(t-T)^2+k[4m\tilde{t}^{2m-1}(t-T)+4\tilde{t}^{2m}-2b\tilde{t}^m(t-T)]+[b^2-bm\tilde{t}^{m-1}-2e\tilde{t}^m]$$

$$u_x^2:\quad k^2[-2a\tilde{t}^m(t-T)^2]+k[2ab(t-T)-2am\tilde{t}^{m-1}(t-T)]-2ae$$

$$\begin{aligned}
u^2:\quad & k^4\tilde{t}^{2m}(t-T)^4+k^3[2\tilde{t}^m(t-T)^3(-b+2m\tilde{t}^{m-1})+4\tilde{t}^{2m}(t-T)^2]\\
&+k^2[\tilde{t}^{2m}+b^2(t-T)^2-3bm\tilde{t}^{m-1}(t-T)^2-4b\tilde{t}^m(t-T)+4m\tilde{t}^{2m-1}(t-T)\\
&\qquad+2m(2m-1)\tilde{t}^{2m-2}(t-T)^2+am(m-1)(C')^2\tilde{t}^{m-2}(t-T)^2+2e\tilde{t}^m(t-T)^2\\
&\qquad-aC''m\tilde{t}^{m-1}(t-T)^2]\\
&+k[b^2-bm\tilde{t}^{m-1}-bm(m-1)\tilde{t}^{m-2}(t-T)-2m(2m-1)\tilde{t}^{2m-2}-2be(t-T)\\
&\qquad-2e\tilde{t}^m+2em\tilde{t}^{m-1}(t-T)+2e\tilde{t}^m+amC''\tilde{t}^{m-1}-am(m-1)(c')^2\tilde{t}^{m-2}]\\
&+[e^2+m(m-1)\tilde{t}^{m-2}e]
\end{aligned}$$

$$u_x\cdot u_t:\quad -4amkC'\tilde{t}^{m-1}(t-T)$$

其中 $C'=C'(x)$, $C''=C''(x)$, 对 $u_xu_t$ 一项,我们利用不等式 $AB\leqslant\frac{1}{2}(A^2+B^2)$ 在条件 $ab<0$ 时,注意到由$C$的假设,只要 $x$ 充分小, $C'(x)$ 可任意小,有

$$\begin{aligned}
|-4amkC'\tilde{t}^{m-1}(t-T)u_tu_x| &= |[4ma|t-T|^{\frac{1}{2}}\cdot k^{\frac{1}{2}}\cdot u_x][\tilde{t}^{m-1}\cdot c'|t-T|^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}u_t]|\\
&\leqslant\frac{\delta}{2}[2ab(t-T)ku_x^2+2b\tilde{t}^m(T-t)ku_t^2]
\end{aligned}$$

($\delta$ 可以取任意小正数,只要 $x$ 及$T$充分小)。

注意到 $\tilde{t}\geqslant 0$, $C''(x)>0$, 以及定理条件 (i) 或 (ii),我们容易验证 I 展式中各项(除 $u_xu_t$ 已被对应平方项所界外)的系数都非负,因而本身也非负。从而特别可得不等式:

$$I\geqslant\beta k\int_0^T b^2\|u\|^2dt$$

其中$\beta$为与$k$无关的常数。上式即

$$\int_0^T\|P\varphi\|^2Wdt\geqslant\beta k\int_0^T\|\varphi\|^2Wdt\qquad\text{对 } \varphi\in C_0^2(U^T)\text{ 成立。}$$

定理 1 证毕。

用同样的方法，可证

**定理 2** 设 $a<0$, $b>0$, $e\geqslant 0$ 则当 $m\neq 1$ 或 $m=1$ $b>3$ 时，若 $Z(t,x)\in C^2(U)$ 满足

$$\begin{cases}t^mZ_{tt}+aZ_{xx}+bZ_t+eZ=0 & (t,x)\in U\\ Z=0 & (t,x)\in U_-\end{cases}$$

则必有 $Z(t,x)\equiv 0$ $(t,x)\in U$。

## 参 考 文 献


[1] Nirenberg, L., Lecture on Linear Partial Differential Equations A. M. S. Regional Conference Series No. 17.(1973)

[2] Zeman, M.; Uniqueness of Solutions of the Cauchy Problem for Linear Partial Differential Eqnations with Characteristic of variable Multiplicity J. Diff. Equ. vol. 27. 1. 1978.

[3] Baouendi, S. M., Goulaouic, Ch.: Cauchy Problems with characteristic Initial Hypersurface, Comm. Pure Applied. Math. 1973.

# On the Uniqueness of the continuation of the solution for a class of P. D. E's with Vanishing Coefficients

**Jiang Lumin**

## Abstract

In this article a uniqueness theorem for the solution of the following problems is proved:

$$\begin{cases} [t-C(x)]^m \partial_t^2 u + a\partial_x^2 u + b\partial_t u + eu = f & t \geqslant C(x) \\ u|_{t=C(x)} = g \\ \partial_t u|_{t=C(x)} = h \end{cases}$$

where $a<0$, $b>0$, $m \geqslant 2$ or $m=1$ $\quad b>\max(3, |C''(0)\cdot a|)$.