第15卷 第10期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 10
1991 年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 1991

10维紧致 baby 宇宙模型与量子引力中的几率函数

颜 骏[1)] 胡诗可
(四川大学物理系,成都 610064)

摘 要

本文计算了10维紧致 baby 宇宙模型中的量子几率函数. 我们发现仅对于 Yang-Mills baby 宇宙,流形紧致到四维时空的几率才可能最大. 同时讨论了与此有关的大 Wormholes 疑难问题.

一、引 言

1988年,Coleman 首先从量子引力的观点出发论证了由连接分离的平滑宇宙的细小"蛀洞"(Wormholes)的量子效应会使宇宙常数趋于零[1]. 几乎同一时刻,Banks[2] 根据类似的方法得到了宇宙常数必定是有限的,但却非常小的结论. Coleman-Banks 模型为理解宇宙常数或其它基本自然常数提供了一个自然的量子引力框架,从而引起了人们广泛的兴趣和关注[3-9]. 在此之前,Giddings 和 Strominger 等人发现了一类带有轴子(axion)耦合的引力瞬子解[10-12]. 我们根据类似的推理获得了三维和四维流形上更一般的 Wormholes 瞬子解[13,14].这些 Wormholes 一瞬子可以理解为时空的拓扑涨落,它们是两个平滑和巨大的时空区域之间的微观连接,而 Wormholes 的三维类空部分通常称为 baby 宇宙. Coleman 采用他七十年代研究规范场瞬子所发展的稀薄气体方法重新研究了 Wormholes 引力瞬子,并发现几率分布函数呈双指数型 $\exp\left[\exp\left(\frac{3\pi}{G\Lambda}\right)\right]$. 可以看出,这类几率分布在宇宙常数 $\Lambda=0$ 处有一无限高的峰.

另一方面,Volovich 将 Coleman 模型的思想应用于解释一个更为基本的问题[15],那就是时空的维数 D 为什么的确等于4? 以前回答这一问题的常用方法依赖于高维超引力或超弦模型.但这些理论并没有给出恰当的证据来选择哪一类的紧致真空解是更合适的. 本文的目的就是将 Volovich 的工作推广到10维时空. 对 Yang-Mills baby 宇宙模型来说,我们发现流形紧致到四维的几率总可能最大,而对纯 Kaluza-Klein baby 宇宙模型,却得不到这样的结论.

本文1990年11月10日收到.

1) 现在地址: 西南应用磁学研究所,绵阳市,621000.

二、量子引力中的几率函数与路径积分表示

通常，量子引力中的欧几里德路径积分具有如下的形式[15]：

$$\sum_{\text{topology}}\int \exp[-I(g,\lambda)](Dg). \tag{2-1}$$

这里，$g_{\mu\nu}$ 是时空的度规，λ 是耦合常数。$I(g,\lambda)$ 是泛函作用量，(Dg) 为积分测度。这里，(Dg) 上的积分包括了对时空流形 M^D 上所有紧致拓扑的求和。如一定数目的大的平滑宇宙由微小的时空 Wormholes 连接着，那么某个宇宙上定义的算子 A 的真空期待值可以表示为：

$$\langle A\rangle=\int d\alpha\langle A\rangle_{\lambda_i+\alpha_i}p(\alpha). \tag{2-2}$$

式中，$\alpha=(\alpha_i)$ 是 Wormholes 参量，它类似于规范场瞬子中的 θ 真空参量。α-本征空间上定义的几率函数具有形式：

$$p(\alpha)=\exp(-D_{ij}\alpha_i\alpha_j)Z(\alpha). \tag{2-3}$$

这里，D_{ij} 是与 Wormholes 连接效应有关的矩阵。

$$Z(\alpha)=\exp\left[\sum_{CCM}e^{-\mathrm{Seff}(\alpha)}\right]. \tag{2-4}$$

$\sum_{CCM}$ 表示对闭连通流形的求和，$\mathrm{Seff}(\alpha)$ 是等效作用量。如积分(求和)取在平滑的大宇宙上，而略去了对 Wormholes 部分的积分(求和)，则 $\sum_{CCM}e^{-\mathrm{Seff}(\alpha)}$ 可由背景引力场的等效作用量代替，因此：

$$Z(\alpha)=\exp\left[\sum_{\text{topologies}}e^{-\Gamma_{n}(g)}\right]. \tag{2-5}$$

这里 g 代表每个时空拓扑的度规，$\sum_{\text{topologies}}e^{-\Gamma_{n}(g)}$ 中每项都可以在它的稳定点上计算出，对于大平滑流形，Γ 的大体积展开正对应于背景时空上的欧氏作用量 S 及其修正项，所以几率函数可以表示为：

$$p(\alpha)=\exp(-D_{ij}\alpha_i\alpha_j)\exp[\exp(-S+\text{修正项})]. \tag{2-6}$$

在高维时空中，由于 Einstein 方程存在多个解，此时几率函数中的双指数具有形式 $\exp\left(\sum_{n}\exp(-S_n)\right)$，$n$ 是方程解的数目。在下面的讨论中，我们仍采用 Volovich 文章中所定义的各种符号，并假定紧致空间的尺度远大于 Wormholes 所处的量级。

三、Kaluza-Klein baby 宇宙模型

在这节所讨论的模型中，我们假定时空的维数 $D=10$。作这样的选择有如下的理

由：首先，$D=10$ 是超对称弦或杂交弦的临界维数，研究 10 维的 baby 宇宙模型可以为发现超弦与 Wormholes 理论之间的联系提供一条线索[16,17]；其次由于 10 维流形有多种方式紧致到 4 维时空，因此可计算出各种紧致路径上的几率函数.

我们先在纯 Kaluza-Klein 引力模型中选择两类真空解 $M^{10}=S^4\otimes S^6$，$M^{10}=S^5\otimes S^5$，然后计算出各自对应的几率函数.

(a) $M^{10}=S^4\otimes S^6$；

我们考查一个10维流形紧致成一个 4 维球宇宙和一个 6 维紧致空间的直积，此时时空度规具有形式：

$$\begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & O \\ O & g_{mn}(y) \end{pmatrix}. \tag{3-1}$$

这里，x^m，y^m 分别是 4 维球和 6 维球上的坐标，$\mu,\nu=0,1,2,3;m,n=4,5,6,7,8,9$. 度规对应的 Ricci 张量是

$$R_{\mu\nu}=\frac{4-1}{r^2}g_{\mu\nu}=\frac{3}{r^2}g_{\mu\nu}. \tag{3-2}$$

$$R_{mn}=\frac{6-1}{b^2}g_{mn}=\frac{5}{b^2}g_{mn}. \tag{3-3}$$

式中，r^2,b^2 分别是 S^4 和 S^6 的半径，根据 10 维 Kaluza-Klein 引力模型的作用量：

$$S_{10}=\frac{1}{G}\int d^{10}x\sqrt{g}(2\Lambda-R), \tag{3-4}$$

可以导出 Ricci 张量：

$$R_{MN}=\frac{2\Lambda}{10-2}g_{MN}\qquad (M,N=0,\cdots 9). \tag{3-5}$$

Λ 是宇宙常数. 由(3-2),(3-3),以及(3-5)可算出半径：

$$r^2=\frac{12}{\Lambda},\qquad b^2=\frac{20}{\Lambda}. \tag{3-6}$$

而我们知道 D 维球宇宙的作用量还具有形式：

$$S_D=-\frac{4\Lambda}{(D-2)G}r^D\Omega_D. \tag{3-7}$$

这里，G 是牛顿常数，Ω_D 是单位 D-球的体积，定义为：

$$\Omega_D=\frac{2\pi^{\frac{(D+1)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}. \tag{3-8}$$

综合上述公式，我们即可算出真空解 $S^4\otimes S^6$ 所对应的欧氏作用量：

$$\begin{aligned} S_{4+6}&=-\frac{4\Lambda}{(10-2)G}\Omega_4r^4\Omega_6b^6\\ &=-\frac{4\Lambda}{8G}\cdot\left(\frac{8}{3}\pi^2\right)\left(\frac{12}{\Lambda}\right)^2\left(\frac{16}{15}\pi^3\right)\left(\frac{20}{\Lambda}\right)^3\\ &=-\frac{2^{16}\cdot 5^2\cdot\pi^5}{G\cdot\Lambda^4}. \end{aligned} \tag{3-9}$$

将(3-9)代入几率函数表达式(2-6),得:

$$p^{(\alpha)}_{S_{4+6}} = \exp(-D_{ij}\alpha_i\alpha_j)\exp\left[\exp\left(\frac{2^{16}\cdot 5^2\cdot \pi^5}{G\cdot \Lambda^4}\right)\right]. \tag{3-10}$$

当 $\Lambda \to 0^+$ 时, $p^{(\alpha)}_{S_{4+6}} \to +\infty$, 这正对应于 Coleman 关于零宇宙常数的几率解释.

(b) $M^{10} = S^5 \otimes S^5$:

为了比较 Kaluza-Klein baby 宇宙模型中各种真空解所对应的量子几率, 我们还可以将 10 维流形紧致成两个 5 维球的直积,时空度规的分块形式是:

$$\begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & O \\ O & g_{mn}(y) \end{pmatrix}. \tag{3-11}$$

此时, x^m, y^m 代表 S^5, S^5 上的坐标; $\mu,\nu = 0,1,2,3,4; m,n = 5,6,7,8,9$. 度规对应的 Ricci 张量为:

$$R_{\mu\nu} = \frac{5-1}{r^2}g_{\mu\nu} = \frac{4}{r^2}g_{\mu\nu}. \tag{3-12}$$

$$R_{mn} = \frac{5-1}{b^2}g_{mn} = \frac{4}{b^2}g_{mn}. \tag{3-13}$$

r^2, b^2 分别是两个五维球的半径. 根据场方程(3-5)以及(3-12)(3-13), 同样可算出半径:

$$r^2 = \frac{16}{\Lambda}, \quad b^2 = \frac{16}{\Lambda}. \tag{3-14}$$

类似地,真空解 $S^5 \otimes S^5$ 对应的欧氏作用量被给为:

$$\begin{aligned} S_{5+5} &= -\frac{4\Lambda}{(10-2)G}r^5\Omega_5 b^5\Omega_5 \\ &= -\frac{\Lambda}{2G}\left(\frac{16}{\Lambda}\right)^5(\pi^3)^2 \\ &= -\frac{2^{19}\cdot\pi^6}{G\cdot\Lambda^4}. \end{aligned} \tag{3-15}$$

这类解对应的量子几率函数则为:

$$p^{(\alpha)}_{S_{5+5}} = \exp(-D_{ij}\alpha_i\alpha_j)\exp\left[\exp\left(\frac{2^{19}\cdot\pi^6}{G\cdot\Lambda^4}\right)\right]. \tag{3-16}$$

比较公式(3-16)以及(3-10),我们明显地看出当 $\Lambda \to 0^+$, $p^{(\alpha)}_{S_{5+5}} > p^{(\alpha)}_{S_{4+6}}$(由于 $8\pi > 25$), 所以在纯 Kaluza-Klein 引力模型中, 我们无法得出流形紧致到 4 维是最可几的结论,这在某个方面反映了这一模型并不是现实的. 在同一框架下甚至存在所谓的大 Wormholes 灾难问题 (这一点我们在结论中再作讨论). 因此, 我们必须考虑某个修正的方案,一种可行的尝试就是引入 Yang-Mills 场或其它物质场,这正是我们下节所准备讨论的主要内容.

四、Yang-Mills baby 宇宙模型

接下来我们将分析一个引力耦合 $U(1)$ 规范场的 baby 宇宙模型. 当然, 我们还可

以选择更一般的非阿贝尔规范群,如 $SU(2)$、$SU(3)$ 等等. 现在我们取如下的10维拉氏量:

$$S_{10}=-\int d^{10}x\sqrt{-g^{(10)}}\left\{\frac{1}{2G}(R-2\Lambda)+\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}\right\}. \qquad (4\text{-}1)$$

式中,G是 10 维的牛顿常数,Λ是宇宙常数项. F_{MN} 是阿贝尔规范势 A_N 对应的场强,定义为: $F_{MN}=2\partial[{}_MA_N]$. 变分拉氏量(4-1),可得如下的场方程:

$$R_{MN}-\frac{1}{2}g_{MN}R=-\frac{G}{2}(T_{MN}+\Lambda g_{MN}). \qquad (4\text{-}2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g^{(10)}}}\partial_M(\sqrt{-g^{(10)}}F^{MN})=0. \qquad (4\text{-}3)$$

这里,能量动量张量 T_{MN} 定义为:

$$T_{MN}=F_{MP}F_N^P-\frac{1}{4}F_{PQ}F^{PQ}g_{MN}. \qquad (4\text{-}4)$$

为了计算 Wormholes 起伏带来的量子几率函数,我们亦可将 10 维流形紧致为: $M^{10}=S^4\otimes S^6$, 并且选择(3-1)同样的度规. 如要获得适当的真空解,还需对阿贝尔规范场的场强作如下 anstantz:

$$\begin{aligned}&F_{\mu\nu}=0. &&(\mu,\ \nu=0,1,2,3)\\&F_{ML}F_N^L=f^2g_{MN}. &&(M,N=4,5\cdots9)\\&F_{PQ}F^{PQ}=6f^2. &&(P,Q=0,1\cdots9)\end{aligned} \qquad (4\text{-}5)$$

将上述假定代入场方程(4-2)(4-3),即可算出 Ricci 张量和标量曲率:

$$R_{\mu\nu}=\left(\frac{3G}{16}f^2+\frac{\Lambda}{8}\right)g_{\mu\nu}. \qquad (4\text{-}6)$$

$$R_{MN}=\left(\frac{3G}{16}f^2+\frac{\Lambda}{8}-\frac{G}{2}f^2\right)g_{MN}. \qquad (4\text{-}7)$$

$$R=\left(-\frac{9}{8}Gf^2+\frac{5}{4}\Lambda\right). \qquad (4\text{-}8)$$

将(4-8)代入欧氏作用量(4-1),可发现作用量 S_{10} 可取下列形式:

$$\frac{3}{8}\left(-\frac{\Lambda}{G}+\frac{5}{2}f^2\right)\int d^{10}x\sqrt{-g^{(10)}}. \qquad (4\text{-}9)$$

根据球 S^4, S^6 的几何性质(3-2)(3-3),那么有:

$$R_{\mu\nu}=\frac{4-1}{r^2}g_{\mu\nu}=\frac{3}{r^2}g_{\mu\nu}. \qquad (4\text{-}10)$$

$$R_{MN}=\frac{6-1}{a^2}g_{MN}=\frac{5}{a^2}g_{MN}. \qquad (4\text{-}11)$$

综上所述,即可算出半径 r 和 a,

$$r^2=\frac{3}{\frac{\Lambda}{8}+\frac{3}{16}Gf^2}. \qquad (4\text{-}12)$$

$$a^2 = \frac{5}{\frac{\Lambda}{8} - \frac{5}{16}Gf^2}. \tag{4-13}$$

所以这类真空解对应的欧氏作用量应为:

$$S_{4+6} = \frac{3}{8}\left(-\frac{\Lambda}{G} + \frac{5}{2}f^2\right) r^4 \Omega_4 a^6 \Omega_6$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{5}{2}f^2 - \frac{\Lambda}{G}\right) \cdot \frac{3^2}{\left(\frac{3}{16}Gf^2 + \frac{\Lambda}{8}\right)^2} \cdot \frac{5^3}{\frac{G}{8}\left(\frac{\Lambda}{G} - \frac{5}{2}f^2\right)} \cdot \frac{\frac{8}{3}\pi^2 \times \frac{16}{15}\pi^3}{\left(\frac{\Lambda}{8} - \frac{5}{16}Gf^2\right)^2}$$

$$= -\frac{3 \cdot 5^2 \cdot 2^7 \cdot \pi^5}{G\left(\frac{\Lambda}{8} + \frac{3}{16}Gf^2\right)^2\left(\frac{\Lambda}{8} - \frac{5}{16}Gf^2\right)^2}. \tag{4-14}$$

在这种紧致 Yang-Mills baby 宇宙模型中,量子几率函数则为:

$$p_{S_{4+6}}^{(\alpha)} = \exp(-D_{ij}\alpha_i\alpha_j)\exp\left\{\exp\left[\frac{3 \cdot 5^2 \cdot 2^7 \cdot \pi^5}{G\left(\frac{\Lambda}{8} + \frac{3}{16}Gf^2\right)^2\left(\frac{\Lambda}{8} - \frac{5}{16}Gf^2\right)^2}\right]\right\}. \tag{4-15}$$

为了比较几率函数的大小,我们还需选另一个例子,即对未紧致的 10 维球 S^{10} 上的几率函数进行计算. 为了简单起见,不妨先令 Yang-Mills 物质场 $F_{MN} = 0$, 那么这是一类简单的真空解. 由 10 维球的几何性质可给出:

$$R_{\mu\nu} = \frac{10-1}{r^2} g_{\mu\nu} = \frac{9}{r^2} g_{\mu\nu}. \tag{4-16}$$

$$(\mu, \nu = 0, 1, \cdots 9)$$

而由引力场方程导出的 Ricci 张量为:

$$R_{MN} = \frac{\Lambda}{8} g_{MN}. \tag{4-17}$$

$$(M, N = 0, 1, \cdots 9)$$

从公式(4-16)(4-17)可算出 10 维球的半径:

$$r^2 = \frac{72}{\Lambda}. \tag{4-18}$$

S^{10} 所对应的欧氏作用量是

$$S_{10} = -\frac{3}{8}\Lambda/G \int d^{10}x \sqrt{g}$$

$$= -\frac{3}{8}\Lambda/G\Omega_{10} r^{10}$$

$$= -\frac{3 \times 8 \times 72^5}{935} \cdot \frac{\pi^5}{G\Lambda^4}. \tag{4-19}$$

所以未紧致流形 S^{10} 对应的量子几率函数为:

$$p_{S_{10}}^{(\alpha)} = \exp(-D_{ij}\alpha_i\alpha_j)\exp\left[\exp\left(\frac{3\times 8\times 72^5}{935}\cdot\frac{\pi^5}{G\Lambda^4}\right)\right]. \tag{4-20}$$

当然,可以看出的是 $p_{S_{4+6}}^{(\alpha)}$ 与 $p_{S_{10}}^{(\alpha)}$ 之间存在明显的差异. 因为 $p_{S_{10}}^{(\alpha)}$ 中没有规范场参量 f,而这一参量正是高维量子模型中具有的一般特征,我们可以用这个新的自由度 f 使 $p_{S_{10}}^{(\alpha)}$ 总小于 $p_{S_{4+6}}^{(\alpha)}$. 例如可选取:

$$f^2 = \frac{2\Lambda}{5G} - \varepsilon\Lambda^2. \tag{4-21}$$

这里,ε 是任意常数,通过调节参数 ε,可使 $p_{S_{4+6}}^{(\alpha)}$ 总大于 $p_{S_{10}}^{(\alpha)}$; 因此在具有阿贝尔规范场与引力耦合的 baby 宇宙模型中,我们可以得到流形紧致到 4 维时空的几率是最大的结论. 事实上我们已将 Volovich 的结论推广到了更高维的时空上.

五、讨　论

从本文的分析中我们已经注意到这样一个事实,即在纯 Kaluza-Klein 引力模型中我们得不到流形紧致到四维时空是最可几的结论. 而在同样的框架下,甚至存在更为严重的疑难,即所谓的大 Wormholes"灾难"问题[18-20]. Fischer, Susskind 以及 Polchinski 等人首先研究了这一现象. 在纯引力模型以及高阶修正的情况下,他们用重整化群方程证明了在不同的时空标度上,当宇宙常数 $\Lambda\to 0$ 时,几率函数总可呈无穷大. 这就意味着 Wormholes 将膨胀到宏观尺度. 而在 Coleman 的最初研究中曾暗含了一个假定,即时空 Wormholes 仅在 Planck 量级上存在,大标度 Wormholes 的数目将随着宇宙的尺度增加而指数地衰减.因此,在纯引力框架下,大 Wormholes"灾难"似乎不可避免. 解决这一困难的一种方法就是考虑 Yang-Mills baby 宇宙模型,通过 Yang-Mills 物质场的作用使几率函数 $p(\alpha)$ 得到一定限制,以减少几率函数的增大,抑制大 Wormholes 的生成. 当然,要继续深入地解决这一系列的矛盾,也许得寄希望于更相对论性的模型,如超引力或超弦模型等. 这方面的工作我们希望在以后再作详细研究.

致谢: 我们在完成本文的过程中,高洪波博士曾提供过许多有益的建议,在此深表感谢.

参 考 文 献

[1] S. Coleman, *Nucl. Phys.*, **B310**(1988), 643.
[2] T. Banks, *Nucl. Phys.*, **B309**(1988), 493.
[3] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, **61**(1989), 1.
[4] S. L. Adler, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 373.
[5] J. Polchinski, *Phys. Lett.*, **B219**(1989), 251.
[6] J. M. Alberty, *Phys. Lett.*, **B221**(1989), 250.
[7] S. B. Giddings and A. Strominger, *Nucl. Phys.*, **B321**(1989), 481.
[8] I. Kleranov, L. Susskind and T. Banks, *Nucl. Phys.*, **B317**(1989), 665.
[9] A. Lyons, *Nucl. Phys.*, **B333**(1990), 279.
[10] S. B. Giddings and A. Strominger, *Nucl. Phys.*, **B306**(1988), 890.
[11] G. V. Lavrelashrili, V. A. Rabakov and P. G. Tinyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A13**(1988), 1231.
[12] R. C. Myers., *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 1327; *Nucl. Phys.*, **B323**(1989), 225.
[13] A. K. Gupta, J. Hughes. J. Preskill and M. B. Wise., *Nucl. Phys.*, **B333**(1990), 195.

[14] Jun Yan, Jiang Nan Li, Cheng Zhong Wen and Shi Ke Hu. J. Phys (1990—1991). The Wormholes Instanton Solutions in Quantum Gravity and String Theory.
[15] I. V. Volovich, *Phys. Lett.*, **B219**(1989), 66.
[16] Yan Jun, *Chin. Phys. Lett.*, **10**(1987), 473.
Yan Jun, Li Jiang Nan and Hu Shi Ke, *Chin. Phys. Lett.*, **3**(1989), 141.
[17] S. B. Giddings and A. Strominger, *Phys. Lett.*, **B230**(1989), 46.
[18] W. Fischler and L. Susskind, *Phys. Lett.*, **B217**(1989), 48.
[19] J. Polchinski, *Nucl. Phys.*, **B325**(1989), 619.
[20]. S. Coleman and K. Lee, *Phys. Lett.*, **B221**(1989), 242.

Compact Baby Universe Model in ten Dimension and Probability Function of Quantum Gravity

YAN JUN　　HU SHIKE
(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064)

ABSTRACT

In this paper, the quantum probability functions are calculated for ten-dimensional compact baby universe model. We find that the probability for the Yang-Mills baby universe to undergo a spontaneous compactification down to a four-dimensional spacetime is greater than that to remain in the original homogeneous multidimensional state. Some questions about large-wormhole catastrophe are also discussed.