第23卷 第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 23, No. 2
1994年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun. , 1994

一类由圈长分布确定的图

徐岳灿 施永兵
(数学系)

提 要 阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，其中 c_i 是 G 中长为 i 的圈的数目. 本文证明了下述结果：设 $A\subseteq E(K_n)$，$|A|\leq 3$，$n\geq |A|+3$，，则 K_n-A 是由它的圈长分布确定的.

关键词 图；圈长分布；由圈长分布确定的图
中图法分类号 O157.5

0 引 言

阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，其中 c_i 是 G 中长为 i 的圈的数目. 圈长分布的概念是由施永兵在[1]中提出. 若 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是图 G 的圈长分布，且不存在图 G' $(G'\not\cong G)$，使 G^* 的圈长分布为 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，则称 G 是由它的圈长分布确定的.

文[1]指出，C_n，C_n+e $(n\geq 2)$，$K_n (n\geq 3)$，$K_n-e (n\geq 4)$，$K_{2,n}$ $(n\geq 2)$，$C_{n-i+1}*K_i$ $(3\leq i\leq n)$ 和 C_i*C_{n-i+1} $(1\leq i\leq n)$ 是由它们的圈长分布确定的. 这里 G_1*G_2 表示图 G_1 和 G_2 恰好重合一个顶点得到的图. 本文约定 $A\subseteq E(K_n)$. 本文主要结果是下述两个定理.

定理1 设 $n\geq 5$，$|A|=2$，则 K_n-A 是由它的圈长分布确定的.

定理2 设 $n\geq 6$，$|A|=3$，则 K_n-A 是由它的圈长分布确定的.

1 预备定理

在本节中，我们首先对[1]中的两个结果作出证明.

定理P 设 $n\geq 3$，G 是完全图 K_n 当且仅当它的圈长分布 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 满足

$$c_i=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \dfrac{1}{2}\dbinom{n}{i}\cdot(i-1)!, & i=3,4,\cdots,n.\end{cases}$$

证 设 $G=K_n (n\geq 3)$，则 $c_1=c_2=0$，且对每个 $i=3,4,\cdots,n$，G 有 $\dbinom{n}{i}$ 个阶为 i 的完全子图 K_i，每个阶为 i 的完全子图 K_i 有 $\dfrac{1}{2}\cdot(i-1)!$ 个长为 i 的圈. 因此 $c_i=\dfrac{1}{2}\dbinom{n}{i}\cdot(i-1)!$.

本文于1992年6月3日收到.

反之，设 G 的圈长分布 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 满足定理的条件，从 $c_1=c_2=0$，可知 G 是简单图．若 G 不是完全图，则显然 $c_3<\binom{n}{3}$，与已知 $c_3=\frac{1}{2}\binom{n}{3}\cdot(3-1)!=\binom{n}{3}$ 矛盾．因此 $G=K_n$

定理Q　设 $n\geqslant 4, G=K_n-e$，当且仅当它的圈长分布 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 满足

$$c_i=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!-\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!, & i=3,4,\cdots,n.\end{cases}$$

证　设 $G=K_n-e$，则 $c_1=c_2=0$．由定理P可知，在 K_n 中长为 $i(i\geqslant 3)$ 的圈的数目为 $\frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!$．含有边 e 的 i 圈的数目可如下计算：从剩下的 $n-2$个顶点中任取 $i-2$个，有 $\binom{n-2}{i-2}$ 种取法．把 e 的两个端点看成一个顶点与取出的 $i-2$个顶点进行圆排列，共有$(i-2)!$种排法(注意因 e 有两个不同的端点，因此这种圆排列的实际数目为 $\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!$．因此

$$c_i=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)-\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!, & i=3,4,\cdots,n.\end{cases}$$

反之，根据定理 P，G 不是 K_n，若 G 是从 K_n 中至少删去两条边得到的图，则 c_3 最多为 $\binom{n}{3}-2\binom{n-2}{1}+1$．当 $n\geqslant 4$ 时，显然

$$c_3\leq\binom{n}{3}-2\binom{n-2}{1}+1<\binom{n}{3}-\binom{n-2}{1}=c_3,$$

矛盾．因此 $G=K_n-e$．

2　定理1的证明

我们分两种情形计算 K_n-A 的圈长分布．

情形1　A 中二边在 K_n 中相邻．此时 K_n-A 的圈长分布为

$$c_i^{(1)}=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!-\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!+\binom{n-3}{i-3}\cdot(i-3)!, & \\ & i=3,4,\cdots n.\end{cases}$$

因为 K_n 中含有一边 e 的 i 圈的数目为 $\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!$，又 A 中恰有两条边，所以至少含有 A 中一条边的 i 圈的数目为 $2\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!$．$K_n$ 中恰含有 A 中二条边的 i 圈的数目可以这样计算：从剩下的 $n-3$个顶点中任取 $i-3$个，有 $\binom{n-3}{i-3}$ 种取法，然后把 A 中两条相邻边看成一个顶点，与取出的 $i-3$个顶点进行圆排列，共有 $(i-3+1-1)!$(注意此式系数为1是因为两条邻边形成的路有两个不同的端点．因此这种圆排列的实际数目是通常圆排列数的2倍)，所以 K_n 中恰含 A 中二条边的 i 圈数目为 $\binom{n-3}{i+3}\cdot(i-3)!$．应用容斥原理，可得如上圈

长分布.

情形2 A 中二边在 K_n 中不相邻.此时 K_n-A 的圈长分布为

$$c_i^{(2)}=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!-2\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!+2\binom{n-4}{i-4}\cdot(i-3)!. & \\ & i=3,4,\cdots,n.\end{cases}$$

与情形1相似,只需考虑恰含 A 中二条边的长为 i 的圈的数目为 $2\binom{n-4}{i-4}\cdot(i-3)!$,应用容斥原理立得 K_n-A 的形如上述的圈长分布.

显然当 $n\geqslant 5$ 时,$c_5^{(1)}\neq c_5^{(2)}$,所以 $K_n-A(|A|=2)$ 在上述两种情形中的圈长分布不相同.

以下证明具有上述圈长分布的图 G 只能是 K_n-A,其中 $|A|=2$.根据定理 P 和 Q,易知 G 不是 K_n 和 K_n-e.若 $G\neq K_n-A$,$|A|=2$,则 $G\in\{K_n-A\mid |A|\geqslant 3\}$.用 M 表示 G 的最大可能的4圈数目.显然具有最大4圈数 M 的图 G 必满足 $G=K_n-A$,其中 $|A|=3$.当 $G=K_n-A$,$|A|=3$ 时,A 在 K_n 中的导出子圈 $K_n[A]$ 恰有图 I 中5个图.它们分别记为 $G_1,G_2,\cdots,G_5$.此时容易算出在此5种情形下图 G 所含的4圈数(见表1).

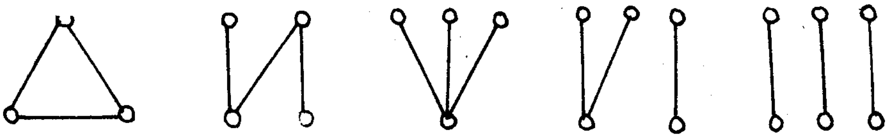

图1 Fig. 1

表1 Tab. 1

情形	$K_n[A]$	G 的4圈数目
1	G_1	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-3\binom{n-2}{2}\cdot 2!+3\binom{n-3}{1}$
2	G_2	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-3\binom{n-2}{2}\cdot 2!+2\binom{n-3}{1}+2-1$
3	G_3	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-3\binom{n-2}{2}\cdot 2!+3\binom{n-3}{1}$
4	G_4	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-3\binom{n-2}{2}\cdot 2!+4+\binom{n-3}{1}$
5	G_5	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-3\binom{n-2}{2}\cdot 2!+6$

容易看出,当 $n\geqslant 5$,G 的最大4圈数目 $M=\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-3\binom{n-2}{2}\cdot 2!+3\binom{n-3}{1}$.将此 M

与 $C_4^{(1)}$ 和 $C_4^{(2)}$ 分别比较. 显然有 $C_4^{(1)}>M$，$C_4^{(2)}>M$，矛盾. 因此当 $|A|=2, n\geqslant 5$，K_n-A 是由它的圈长分布确定的.

3　定理2的证明

与定理1类似，应用容斥原理，容易得到 K_n-A 的5种情形(见图1)下的圈长分布.

情形1　$K_n[A]=G_1$

$$C_i^{(1)}=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \binom{n}{3}-3\binom{n-2}{1}+3-1, & i=3;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!-3\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!+3\binom{n-3}{i-3}\cdot(i-3)! & \\ \quad i=4,5,\cdots,n\end{cases}$$

情形2　$K_n[A]=G_2$

$$C_i^{(2)}=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!-3\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!+2\binom{n-3}{i-3}\cdot(i-3)!+ & \\ 2\binom{n-4}{i-4}\cdot(i-3)!-\binom{n-4}{i-4}\cdot(i-4)!, & i=3,4,\cdots,n\end{cases}$$

情形3　$K_n[A]=G_3$

$$C_i^{(3)}=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!-3\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!+3\binom{n-3}{i-3}\cdot(i-3)!, & \\ \quad i=3,4,\cdots,n\end{cases}$$

情形4　$K_n[A]=G_4$

$$C_i^{(4)}=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!-3\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!+\binom{n-3}{i-3}\cdot(i-3)!+ & \\ 4\binom{n-4}{i-4}\cdot(i-3)!-2\binom{n-5}{i-5}\cdot(i-4)! & i=3,4,\cdots,n\end{cases}$$

情形5　$K_n[A]=G_5$

$$C_i^{(5)}=\begin{cases}0, & i=1,2;\\ \frac{1}{2}\binom{n}{i}\cdot(i-1)!-3\binom{n-2}{i-2}\cdot(i-2)!+6\binom{n-4}{i-4}\cdot(i-3)!+ & \\ 4\binom{n-6}{i-6}\cdot(i-4)!, & i=3,4,\cdots,n\end{cases}$$

现在考虑上述五种情形中3圈数目：

$$C_3^{(1)}=\binom{n}{3}-3\binom{n-2}{1}+3-1;\qquad C_3^{(2)}=\binom{n}{3}-3\binom{n-2}{1}+2;$$

$$C_3^{(3)}=\binom{n}{3}-3\binom{n-2}{1}+3;\qquad C_3^{(4)}=\binom{n}{3}-3\binom{n-2}{1}+1;$$

$$C_3^{(5)}=\binom{n}{3}-3\binom{n-2}{1}.$$

显然 $C_3^{(1)},C_3^{(3)},C_3^{(4)},C_3^{(5)}$ 互不相同.而 $C_3^{(1)}$ 和 $C_3^{(2)}$ 相同.再考虑 $C_4^{(1)}$ 和 $C_4^{(2)}$

$$C_4^{(1)}=\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-3\binom{n-2}{2}\cdot 2!+3\binom{n-3}{1},$$

$$C_4^{(2)}=\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-3\binom{n-2}{2}\cdot 2!+2\binom{n-3}{1}+1$$

显然当 $n>4$ 时,$C_4^{(1)}\neq C_4^{(2)}$.由此可知,$K_n-A(|A|=3)$ 在上述五种情形中圈长分布互不相同.

以下证明具有上述圈长分布的图 G 只能是 K_n-A,其中 $|A|=3$.根据定理 P、Q 和定理1,易知 G 不是 $K_n,K_n-e,K_n-A(|A|=2)$.因此若 $G\neq K_n-A(|A|=3)$,则 $G\in\{K_n-A\,|\,|A|\geqslant 4\}$ 用 M 表示 G 的最大可能的4圈数目.显然具有最大4圈数目 M 的图 G 必满足 $G=K_n-A$,$|A|=4$.当 $G=K_n-A$,$|A|=4$ 时,容易得到 A 在 K_n 中的导出子图 $K_n[A]$ 含有图2中11个图,它们分别记为 $H_1,H_2,\cdots,H_{11}$.此时容易计算出在此11种情形中图 G 所含有的4圈数(见表2).

表2 Tab. 2

情形	$K_n[A]$	$G=K_n-A$ 的4圈数目
1	H_1	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+4\binom{n-3}{1}+4-4+1$
2	H_2	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+5\binom{n-3}{1}+2-2$
3	H_3	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+3\binom{n-3}{1}+6$
4	H_4	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+3\binom{n-3}{1}+6-2$
5	H_5	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+4\binom{n-3}{1}+4-2$
6	H_6	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+6\binom{n-3}{1}$
7	H_7	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+2\binom{n-3}{1}+8-1$
8	H_8	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+3\binom{n-3}{1}+6$
9	H_9	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+2\binom{n-3}{1}+8$
10	H_{10}	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+\binom{n-3}{1}+10$
11	H_{11}	$\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-4\binom{n-2}{2}\cdot 2!+12$

容易看出,对 $n\geqslant 6$,当且仅当 $G=K_n-E(H_6)$ 时,G 有最大4圈数目 $M=\frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3!-$

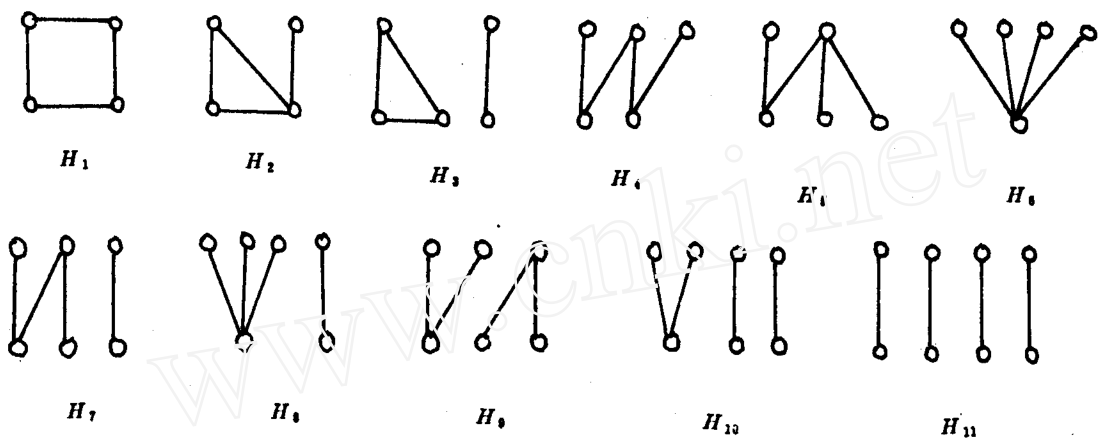

图 2　　Fig. 2

$4\binom{n-2}{2}\cdot 2! + 6\binom{n-3}{1}$ 现在对 $i = 1, 2, 3, 4, 5$. 分别计算 $C_4^{(i)} - M$

$$C_4^{(1)} - M = \frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3! - 3\binom{n-2}{2}\cdot 2! + 3\binom{n-3}{1} - M = (n-3)(n-5)$$

$$C_4^{(2)} - M = \frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3! - 3\binom{n-2}{2}\cdot 2! + 2\binom{n-3}{1} + 2 - 1 - M = (n-3)(n-6) + 1$$

$$C_4^{(3)} - M = \frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3! - 3\binom{n-2}{2}\cdot 2! + 3\binom{n-3}{1} - M = (n-3)(n-5)$$

$$C_4^{(4)} - M = \frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3! - 3\binom{n-2}{2}\cdot 2! + \binom{n-3}{1} + 4 - M = (n-3)(n-7) + 4$$

$$C_4^{(5)} - M = \frac{1}{2}\binom{n}{4}\cdot 3! - 3\binom{n-2}{2}\cdot 2! + 6 - M = (n-3)(n-8) + 6$$

易知当 $n \geqslant 6$ 时，对 $i = 1, 2, 3, 4$，$C_4^{(i)} - M > 0$，而 $C_4^{(5)} - M \geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $n = 6$. 现在比较 $K_6 - E(G_5)$ 和 $K_6 - E(H_6)$ 的6圈数目，易知

$K_6 - E(G_5)$ 的6圈数

$$C_6^{(5)} = \frac{1}{2}\binom{6}{6}\cdot 5! - 3\cdot\binom{6-2}{4}\cdot 4! + 6\binom{6-4}{2}\cdot 3! + 4\binom{6-6}{0}\cdot 2!$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 5! - 3\cdot 4! + 6\cdot 3! + 4\cdot 2!$$

$K_6 - E(H_6)$ 的6圈数 $M_6 = \frac{1}{2}\binom{6}{6}\cdot 5! - 4\binom{6-2}{4}\cdot 4! + 6\binom{6-3}{3}\cdot 3!$

$$= \frac{1}{2}\cdot 5! - 4\cdot 4! + 6\cdot 3!$$

从而 $C_6^{(5)} - M_6 = 4! + 4\cdot 2! = 32 > 0$. 因此，当 $n \geqslant 6$ 时，$K_n - A(||A|| \geqslant 4)$ 的圈长分布都不可能等于 $K_n - E(G_i)(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的圈长分布. 导致矛盾. 故 $G = K_n - A$，$|A| = 3$. 至此定理2证毕

4 猜 想

本文得到的事实启示我们提出下列猜想

猜想 对任意 $A \subseteq E(K_n)$ 且 $n \geqslant |A| + 3$，$K_n - A$ 是由它的圈长分布确定的.

参 考 文 献

[1] Shi Yongbing ,Some problems of cycle length distribution , *Journal of Nanjing University* (Special Issue on Graph Theory) 1991,27:233--234

A Class of Graphs Determined by Their Cycle Length Distributions

Xu Yuecan *Shi Yongbing*

(Department of Mathematics)

Abstract

The cycle length distribution of a graph of order n is $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, where c_i is the number of cycles of length i. The following result is proved: Let $A \subseteq E(K_n)$, $|A| \leq 3$ and $n \geqslant |A| + 3$. Then $K_n - A$ is determined by its cycle length distribution.

Keywords cycle; cycle length distribution; graph determined by its cycle length distribution