一类自逆变换的误差分析

王国荣 郑家栋
（上海师范学院） （上海计算技术研究所）

摘 要

本文进一步讨论初等自逆变换 $S=I-uv^T$，$S^{-1}=S$。给出经相似变换化阵为 Hessenberg 型的初等自逆阵的一般形式，并对其中一类自逆变换阵进行了误差分析，讨论了单边和双边变换的误差界限。

一、引 言

数值线代数中常用下列形式的变换矩阵[1]：

$$H(\alpha,u,v)=I-\alpha uv^T$$

其中 α 为纯量，u、v 为 n 维向量，只要适当选取 α、u，v，可以得到各种常用的初等矩阵，如初等下三角阵，Householder 变换阵等等[2]。最近，在[3]、[4]、[5]中先后讨论了变换阵$H(\alpha,u,v)$的一个子类——初等自逆阵：

$$S=I-uv^T \quad 且 \quad S^{-1}=S$$

指出若用 S 作变换矩阵，求解线性方程组时其运算量介乎 Gauss 法与 Householder 法之间，[6]还讨论了一种用作双边变换的初等自逆阵，但均未对自逆变换进行误差分析，因而有关算法的稳定性是不清楚的。

本文进一步讨论双边变换，给出了将矩阵经相似变换化为 Hessenberg 型的初等自逆阵的一般形式，并且对一类自逆变换阵进行了误差分析，讨论了单边和双边变换的误差界限。

二、化阵为 Hessenberg 型的初等自逆阵

为了下文需要，我们先回顾一下变换阵 $H(1,u,v)$ 的某些性质：

性质 1 设 u,v 为 n 维向量，则

1° $H(1,u,v)$ 的不动点全体是平面

$$P=\{x\in R^n: v^Tx=0\}$$

2° 若 $x\bar{\in}P$，$y=H(1,u,v)x$，则必有

$$u=\frac{(x-y)}{v^Tx} \tag{2.1}$$

本文于1982年10月4日收到

性质 2　设 u、v 为 n 维向量，则下列说法是等价的：

1°　$H(1,u,v)$ 是自逆阵，即 $[H(1,u,v)]^{-1}=H(1,u,v)$

2°　$v^Tu=2$

3°　$H(1,u,v)$ 是关于平面 P 沿 u 方向的斜映射[7]

以上性质的证明隐含在[1]、[5]、[7]中，由此我们得出两个有用的推论：

推论 1　设有向量 x,y 及初等自逆阵 $S=I-uv^T$，则 $Sx=y$ 的充要条件是：

$$u=(x-y)/\beta,\quad v^Tx=\beta,\quad |\beta|>0 \tag{2.2}$$

推论 2　设有向量 x 及初等自逆阵 $S=I-uv^T$，使 $Sx=-ke_1$，则必有

$$u=(x+ke_1)/\beta,\quad v_1=\frac{\beta}{k},\quad v^Tx=\beta,\quad |\beta|>0 \tag{2.3}$$

上述推论容易从性质 1 及 2 导出，证明从略。

性质 3　设 u,v 为 n 维向量，定义超平面

$$Q=\{x\in R^n:x_1=0\}$$

则下列说法是等价的：

1°　$u\in Q$

2°　对任一向量 x，若 $y=H(1,u,v)x$，则必有 $y_1=x_1$

3°　若 $x\in Q$，$v^Tx\neq 0$，则 $y=H(1,u,v)x\in Q$

证　1°⇒2° 设 $v\in Q$，故 $u_1=0$。又因

$$y=H(1,u,v)x=x-(v^Tx)u$$

故 $y_1=x_1$。

2°⇒3°　若 $x\in Q$，$v^Tx\neq 0$，则由 2°，$y_1=x_1=0$，故 $y\in Q$

3°⇒1°　设 $x\in Q$，$v^Tx\neq 0$，由假设 $y\in Q$，故由 (2.1) 式可知 $u\in Q$。

现在设 A 是 $n\times n$ 矩阵，我们要用初等自逆阵经相似变换使 A 逐步化为上 Hessenberg 阵，并希望给出这种初等自逆阵的一般形式。

设 $S_1=I-u^{(1)}v^{(1)T}$ 为初等自逆阵，作相似变换 $A_1=S_1AS_1$，我们希望选取 S_1 使 A_1 的第一列为上 Hessenberg 型，令 $\tilde{A}=S_1A$，则我们可要求 $\tilde{A}$ 第一列为上 Hessenberg 型，而 $A_1=\tilde{A}S_1$，仍保持 $\tilde{A}$ 的第一列的上 Hessenberg 型，为节省运算量还要求 $\tilde{A}$ 与 A 的第一行元素相同，这样 S_1 必须满足下列两个条件：

(a) $S_1A^{(1)}=a_{11}e_1-k_1e_2$

(b) $(\tilde{A}_{(i)}S_1)^T\in Q\quad i=3,4,\cdots n$

这里 $A^{(1)}$ 表示 A 的第 1 列，$\tilde{A}_{(i)}$ 表示 $\tilde{A}$ 的第 i 行。

由推论 1，满足 (a) 的初等自逆阵 S_1 必满足

$$u^{(1)}=(0,a_{21}+k_1,\ a_{31},\cdots,a_{n1})^T \tag{2.4}$$

$$v^{(1)T}A^{(1)}=1 \tag{2.5}$$

又由性质 3，满足 (b) 的 $S_1^T=I-v^{(1)}u^{(1)T}$ 必有 $v^{(1)}\in Q$，即 $v_1^{(1)}=0$，同时，由 $v^{(1)T}u^{(1)}=2$ 及 (2.4)，(2.5) 式可得 $v_2^{(1)}=\dfrac{1}{k_1}$，因而

$$v^{(1)}=\left(0,\ \frac{1}{k_1},\ v_3^{(1)},\cdots,v_n^{(1)}\right)^T \tag{2.6}$$

且 $v_i^{(1)}(i=3,4,\cdots,n)$ 应满足：

$$\sum_{i=3}^{n} v_i a_{i1}^{(1)}=1-\frac{a_{21}^{(1)}}{k_1} \tag{2.7}$$

用满足 (2.4),(2.6),(2.7) 的 $u^{(1)}$，$v^{(1)}$ 构造的自逆阵 S_1 必具有下列性质：

1° $A_{(1)}=\tilde{A}_{(1)}=A_{1(1)}$

2° $\tilde{A}^{(1)}=A_1^{(1)}=a_{11}e_1-k_1e_2$

这里 $A_{(1)},A_{1(1)}$ 表示 A，A_1 的第 1 行，$A_1^{(1)}$ 为 A_1 的第 1 列，由此可知，S_1AS_1 的第 1 列为上 Hessenberg 型，因而满足 (2.4),(2.6),(2.7) 的 S_1 为所求的初等自逆阵的一般形式。

由上述讨论可知，用初等自逆阵作相似变换化 A 为上 Hessenderg 阵的过程为：设 $A_1=A\in R^{n\times n}$，且在约化过程第 l 步已得到约化阵 A_l，其前 l—1 列已为上 Hessenberg 型，我们欲求 S_l 使 $S_lA_lS_l=A_{l+1}$ 的前 l 列为上 Hessenberg 型且其前 l 行与 A_l 的前 l 行相同，为此取

$$u^{(l)}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{l\text{个}},\ a_{l+1;l}^{(l)}+k_l,\ a_{l+2,l}^{(l)},\cdots,a_{n;l}^{(l)})^T$$

$$v^{(l)}=\left(\underbrace{0,\cdots,0}_{l\text{个}},\ \frac{1}{k_l},\ v_{l+2}^{(l)},\cdots,v_n^{(l)}\right)^T$$

这里 $v_i^{(l)}\ (i=l+2,\cdots,n)$ 满足

$$\sum_{i=l+2}^{n} v_i^{(l)}a_{il}^{(l)}=1-\frac{a_{l+1;l}^{(l)}}{k_l}$$

则初等自逆阵 $S_l=I-u^{(l)}v^{(l)T}$ 即为所求，$k_l,v_i^{(l)}(i=l+2,\cdots,n)$ 可适当选取。

如此，经 $n-2$ 步相似变换，A 化为上 Hessenberg 阵 A_{n-1}：

$$A_{n-1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)}, & a_{13}^{(1)}, & \cdots, & a_{1;n-1}^{(1)}, & a_{1n}^{(1)} \\ -k_1, & a_{22}^{(2)}, & a_{23}^{(2)}, & \cdots, & a_{2,n-1}^{(2)}, & a_{2n}^{(2)} \\ & -k_2, & a_{33}^{(3)}, & \cdots, & a_{3;n-1}^{(3)}, & a_{3n}^{(3)} \\ & & -k_3, & \cdots, & a_{4;n-1}^{(4)}, & a_{4n}^{(4)} \\ & & & & & \\ & & & & a_{n;n-1}^{(n-1)}, & a_{n;n}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

例 1 取 $k_l=\pm\sqrt{\sum_{i=l+1}^{n}(a_{il}^{(l)})^2}$，$v_i^{(l)}=c_la_{il}^{(l)}\ (i=l+2,\cdots,n)$ 由 (2.7) 式可确定

$$c_l=\frac{\left(1-\frac{a_{l+1,l}^{(l)}}{k_l}\right)}{\sum_{i=l+2}^{n}(a_{il}^{(l)})^2}$$

则 S_l 即为 Householder 变换。

例 2 取 $k_l=-\sqrt{\sum_{i=l+1}^{n}(a_{il}^{(l)})^2}$，而

$$v^{(l)}=\left(0,\cdots,0,\ \frac{1}{k_l},\ 0,\cdots,0,\ \frac{a_{l+1;l}^{(l)}-k_l}{k_la_{ll}^{(l)}},\ 0,\cdots,0\right)^T$$

则得到[7]中使用的自逆变换。

若取 $v^{(l)}$ 如例2，则正如[4]，[5]所指出的，可以适当选取 k_l 使 s_l 的元素绝对值小于1，事实上，可以直接验证若 $|k_l|$ 满足：

$$|a_{j\,l}^{(l)}|\leqslant|k_l|\leqslant\frac{|a_{j\,l}^{(l)}|+\sqrt{(a_{j\,l}^{(l)})^2+4(a_{l+1;\,l}^{(l)})^2}}{2}$$

则 s_l 的元素绝对值不超过1，这里

$$|a_{j\,l}^{(l)}|=\max_{l+1\leqslant i\leqslant n}|a_{i\,l}^{(l)}|。$$

特别，我们可以取

$$k_l=\pm|a_{j\,l}^{(l)}|$$

$$k_l=\pm\sqrt{(a_{j\,l}^{(l)})^2+(a_{l+1;\,l}^{(l)})^2}$$

$$k_l=\frac{|a_{j\,l}^{(l)}|+\sqrt{(a_{j\,l}^{(l)})^2+4(a_{l+1;\,l}^{(l)})^2}}{2}$$

最后两种曾分别在[5]和[4]中使用。

三、误 差 分 析

一类典型的自逆变换是已知 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$，取

$$u=x+\sigma e_1$$

$$v=\frac{1}{\sigma}e_1+\frac{\sigma-\xi_1}{\sigma\xi_i}e_i$$

使 $S=I-uv^T$ 满足 $Sx=-\sigma e_1$，前面我们已经指出，如取

$$\sigma=\mathrm{sign}(\xi_1)\frac{1}{2}\{|\xi_i|+\sqrt{\xi_1^2+4\xi_i^2}\}$$

则 S 的元素绝对值均不超过1。

计算上述自逆阵的过程可表示为：

算法 1 已知 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$，计算自逆阵 $S=I-uv^T$ 使得 $Sx=-\sigma e_1$：

1) $\eta=\max\limits_{2\leqslant l\leqslant n}|\xi_l|$

2) $t=\xi_1/\eta$

3) $\sigma'=\mathrm{sign}(\xi_1)\dfrac{1}{2}\left\{1+\sqrt{1+(2t)^2}\right\}$

4) $\sigma=\eta\sigma'$

5) $u_1=\xi_1\Leftarrow\xi_1+\sigma$

6) $v_1=1/\sigma$

7) $v_i=\dfrac{1}{\xi_i}-\dfrac{1}{\xi_i}\cdot\dfrac{t}{\sigma'}$

下面对这一算法进行误差分析，不妨假定 $|t|\leqslant1$，否则直接用 Gauss 法[3]。

定理 1 设精确的自逆变换阵为 $S=I-uv^T$，按算法1经浮点运算得到的矩阵为

$$\bar{S}=I-\bar{u}\bar{v}^T,$$

则

$$\|S-\bar{S}\|_\infty\leqslant63\mu2^{-t}\tag{3.1}$$

这里 t 为尾数位数，μ 为与1同阶的数。

证 为分析简单起见，取$\xi_1>0$，这对讨论误差界限无影响。类似[2]，我们规定

$$\langle k\rangle=\frac{(1+\pi_1)(1+\pi_2)\cdots(1+\pi_m)}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)\cdots(1+\rho_n)},\quad m+n=k \tag{3.2}$$

其中$|\pi_i|$，$|\rho_j|\leqslant\mu\cdot2^{-t}$ $(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$，因而有

$$\langle k\rangle=1+\rho$$

这里

$$|\rho|\leqslant k\cdot\mu\cdot2^{-t}$$

容易证明(3.2)定义的$\langle k\rangle$有下列性质

(1) $\langle k\rangle\langle l\rangle=\langle k+l\rangle$

(2) $\dfrac{\langle k\rangle}{\langle l\rangle}=\langle k+l\rangle$

(3) $\sqrt{\langle 2k\rangle}=\langle k\rangle$

于是我们可逐步进行误差分析如下：

1) 计算$\bar{t}$

$\bar{t}=fl(\xi_1/\eta)=t\langle1\rangle$

2) 计算$\bar{\sigma}'$

$a=fl(2\bar{t})=2\bar{t}\langle1\rangle=2t\langle2\rangle$

$b=fl(a^2)=a^2\langle1\rangle$

$c=fl(1+b)=(1+b)\langle1\rangle$

$d=fl(c^{\frac{1}{2}})=c^{\frac{1}{2}}\langle1\rangle$

$e=fl(1+d)=(1+d)\langle1\rangle$

$$\bar{\sigma}'=fl\left(\frac{1}{2}e\right)=\frac{1}{2}e\langle1\rangle=\frac{1}{2}(1+d)\langle2\rangle=\frac{1}{2}[1+\sqrt{c}\langle1\rangle]\langle2\rangle$$

$$=\frac{1}{2}[1+\sqrt{(1+b)\langle1\rangle}\langle1\rangle]\langle2\rangle=\frac{1}{2}[1+\sqrt{(1+a^2\langle1\rangle)\langle1\rangle}\langle1\rangle]\langle2\rangle$$

$$=\frac{1}{2}[1+\sqrt{1+(2t)^2}\langle4\rangle]\langle2\rangle=\frac{1}{2}[1+\sqrt{1+(2t)^2}]\langle6\rangle=\sigma'\langle6\rangle$$

3) 计算$\bar{\sigma}$

$\bar{\sigma}=fl(\eta\bar{\sigma}')=\eta\bar{\sigma}'\langle1\rangle=\eta\sigma'\langle6\rangle\langle1\rangle=\sigma\langle7\rangle$

4) 计算$\bar{u}$，只须计算一个分量

$\bar{u}_1=fl(\xi_1+\bar{\sigma})=(\xi_1+\bar{\sigma})\langle1\rangle=(\xi_1+\sigma\langle7\rangle)\langle1\rangle=(\xi_1+\sigma)\langle8\rangle$

$\quad=(\xi_1+\sigma)(1+\phi)\qquad|\phi|\leqslant8\mu\cdot2^{-t}$

$\bar{u}=u+\delta u$

这里$(\delta u)^T=((\xi_1+\sigma)\phi,0,\cdots,0)$，因而

$$\|\delta u\|_\infty=|u_1||\phi|\leqslant8\mu2^{-t}\|u\|_\infty$$

$$\|\bar{u}\|_\infty=\|u+\delta u\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty+\|\delta u\|_\infty\leqslant(1+8\mu2^{-t})\|u\|_\infty$$

5) 计算$\bar{v}$，要计算二个分量

$$\bar{v}_1=fl\left(\frac{1}{\bar{\sigma}}\right)=\frac{1}{\bar{\sigma}}\langle1\rangle=\frac{1}{\sigma}\frac{\langle1\rangle}{\langle7\rangle}=\frac{1}{\sigma}\langle8\rangle=\frac{1}{\sigma}(1+\psi)\qquad|\psi|\leqslant8\mu\cdot2^{-t}$$

$$a_1 = fl\left(\frac{\bar{t}}{\bar{\sigma}'}\right) = \frac{\bar{t}}{\bar{\sigma}'}\langle 1\rangle = \frac{t\langle 1\rangle}{\sigma'\langle 6\rangle}\langle 1\rangle = \frac{t}{\sigma'}\langle 8\rangle$$

$$b_1 = fl\left(1 - \frac{\bar{t}}{\bar{\sigma}'}\right) = \left(1 - \frac{t}{\sigma'}\langle 8\rangle\right)\langle 1\rangle,$$

$$\bar{v}_i = fl(b_1/\xi_i) = \frac{1}{\xi_i}\left(1 - \frac{t}{\sigma'}\langle 8\rangle\right)\langle 1\rangle\langle 1\rangle = \frac{1}{\xi_i}\left(1 - \frac{t}{\sigma'}(1+\rho)\right)(1+\eta)$$

$$|\rho| \leqslant 8\mu\cdot 2^{-t}, \quad |\eta| \leqslant 2\mu\cdot 2^{-t}$$

设 $\eta' = -t/(\sigma'-t)$，则 $1 - \frac{t}{\sigma'}(1+\rho) = \left(1 - \frac{t}{\sigma'}\right)(1+\eta'\rho)$ 且 $|\eta'| \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，因而

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\xi_i}\left(1 - \frac{t}{\sigma'}\right)(1+r)(1+\eta) \qquad |r| = |\eta'\rho| \leqslant 13\mu\cdot 2^{-t}$$

$$= \left(\frac{1}{\xi_i} - \frac{t}{\xi_i\sigma'}\right)(1+\alpha) \qquad |\alpha| \leqslant 15\mu\cdot 2^{-t}$$

$$\bar{v} = v + \delta v$$

这里
$$(\delta v)^T = \left(\frac{1}{\sigma}\psi, 0, \cdots, 0, \left(\frac{1}{\xi_i} - \frac{t}{\sigma'\xi_i}\right)\alpha, 0, \cdots, 0\right),$$

因而
$$\|\delta v\|_\infty \leqslant 15\mu\cdot 2^{-t}\|v\|_\infty$$

$$\|\bar{v}\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty + \|\delta v\|_\infty \leqslant (1 + 15\mu 2^{-t})\|v\|_\infty$$

由

$$S - \bar{S} = uv^T - \bar{u}\bar{v}^T = uv^T - (u+\delta u)(v+\delta v)^T$$
$$= -u(\delta v)^T - (\delta u)v^T - (\delta u)(\delta v)^T \tag{3.3}$$

利用 S 的元素绝对值小于 1，直接观察 $u(\delta v)^T$，$(\delta u)v^T$ 及 $(\delta u)(\delta v)^T$ 的元素可得

$$\|u(\delta v)^T\|_\infty \leqslant \psi + 2\alpha \leqslant 38\mu 2^{-t}$$
$$\|(\delta u)v^T\|_\infty \leqslant 3\phi \leqslant 24\cdot\mu\cdot 2^{-t}$$
$$\|(\delta u)(\delta\delta)^T\|_\infty \leqslant 2\phi\psi + \phi\alpha \leqslant 248\mu 2^{-2t}$$

故由 (3.3) 式

$$\|S - \bar{S}\| \leqslant 63\mu 2^{-t}$$

对于单边变换，我们有下述结果：

定理 2 设 A 为 n 阶方阵，S 和 $\bar{S}$ 如定理 1 所述，则

$$\|fl(\bar{S}A) - SA\|_\infty \leqslant 77\mu 2^{-t}\|A\|_\infty \tag{3.4}$$
$$\|fl(A\bar{S}) - AS\|_\infty \leqslant 77\mu 2^{-t}\|A\|_\infty \tag{3.5}$$

证 $$\|fl(\bar{S}A) - SA\|_\infty \leqslant \|fl(\bar{S}A) - \bar{S}A\|_\infty + \|\bar{S}A - SA\|_\infty$$

由定理 1

$$\|\bar{S}A - SA\|_\infty \leqslant \|\bar{S} - S\|_\infty\|A\|_\infty \leqslant 63\mu 2^{-t}\|A\|_\infty$$

下面估计
$$\|fl(\bar{S}A) - \bar{S}A\|_\infty$$

令

$$B = \bar{S}A = A - \bar{u}\bar{v}^TA = A - \bar{u}P^T$$
$$\bar{B} = fl(\bar{S}A) = fl(A - \bar{u}\bar{v}^TA) = fl(A - \bar{u}\bar{P}^T)$$

这里 $P^T = \bar{v}^TA$，$\bar{P}^T = fl(\bar{v}^TA)$，若 A 的元素为 α_{il}，则 P 的第 l 个分量为

$$P_l = \bar{v}_1\alpha_{1l} + \bar{v}_i\alpha_{il}$$

而 $\bar{P}$ 的第 l 个分量为

$$\begin{aligned}\bar{P}_l &= fl(\bar{v}_1\alpha_{1l}+\bar{v}_i\alpha_{il})\\ &= \bar{v}_1\alpha_{1l}(1+k_1)+\bar{v}_i\alpha_{il}(1+k_2), \qquad |k_1|,|k_2|\leqslant 2\mu\cdot 2^{-t}\end{aligned}$$

因而

$$|\bar{P}_l-P_l|\leqslant|\bar{v}_1\alpha_{1l}k_1+\bar{v}_i\alpha_{il}k_2|\leqslant(|\bar{v}_1||\alpha_{1l}|+|\bar{v}_i||\alpha_{il}|)|k|$$

$$|k|\leqslant 2\mu\cdot 2^{-t}$$

令 $\bar{P}=P+\delta P$，则

$$\|\delta P\|_1=\|\bar{P}-P\|_1\leqslant\sum_l(|\bar{v}_1||\alpha_{1l}|+|\bar{v}_i||\alpha_{il}|)|k|\leqslant|k|\cdot\||A^T||\bar{v}|\|_1\leqslant 2\mu\cdot 2^{-t}\|A\|_\infty\|\bar{v}\|_1$$

现在估计 $\bar{B}=fl(\bar{S}A)$ 的 (l,m) 元素

$$\begin{aligned}\bar{b}_{lm}&=fl[(A-\bar{u}\bar{P}^T)_{l,m}]\\ &=[\alpha_{l,m}-\bar{u}_l\bar{P}_m(1+\delta_1)](1+\delta_2)\\ &=[\alpha_{lm}-\bar{u}_l(P_m+\delta P_m)(1+\delta_1)](1+\delta_2)\\ &=b_{lm}(1+\delta_2)+[-\bar{u}_lP_m\delta_1-\bar{u}_l\delta P_m(1+\delta_1)](1+\delta_2)\end{aligned}$$

这里 $|\delta_i|\leqslant\mu 2^{-t}$ $i=1,2$。于是

$$|\bar{b}_{lm}-b_{lm}|\leqslant\mu 2^{-t}|b_{lm}|+[\mu 2^{-t}|\bar{u}_l||P_m|+|\bar{u}_l||\delta P_m|(1+\mu 2^{-t})](1+\mu 2^{-t})$$

而

$$\|\bar{B}-B\|_\infty\leqslant\mu 2^{-t}\|B\|_\infty+[\mu 2^{-t}\|\bar{u}\|_\infty\|P\|_1+\|\bar{u}\|_\infty\|\delta P\|_1(1+\mu 2^{-t})](1+\mu 2^{-t}) \quad (3.6)$$

但

$$\begin{aligned}\|B\|_\infty=\|\bar{S}A\|_\infty&\leqslant\|SA\|_\infty+\|(\bar{S}-S)A\|_\infty\\ &\leqslant\|S\|_\infty\|A\|_\infty+\|\bar{S}-S\|_\infty\|A\|_\infty\\ &\leqslant(3+63\mu 2^{-t})\|A\|_\infty\leqslant 3.01\|A\|_\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|_\infty\|P\|_1=\|\bar{u}\|_\infty\|P^T\|_\infty\\ \leqslant\|\bar{u}\|_\infty\|\bar{v}\|_\infty\|A\|_\infty\leqslant 2\|A\|_\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|_\infty\|\delta P\|_1\leqslant\|\bar{u}\|_\infty\cdot 2\mu\cdot 2^{-t}\|A\|_\infty\|\bar{v}\|_1\\ \leqslant 8\mu\cdot 2^{-t}\|A\|_\infty\end{aligned}$$

因而代入 (6.3) 式得

$$\begin{aligned}\|\bar{B}-B\|_\infty&\leqslant 3.01\mu\cdot 2^{-t}\|A\|_\infty+[\mu\cdot 2^{-t}\cdot 2\|A\|_\infty\\ &\quad+8\cdot\mu\cdot 2^{-t}\|A\|_\infty(1+\mu\cdot 2^{-t})](1+\mu\cdot 2^{-t})\\ &\leqslant 13.01\mu\cdot 2^{-t}\|A\|_\infty\end{aligned}$$

这样

$$\|fl(\bar{S}A)-SA\|_\infty\leqslant 77\mu\cdot 2^{-t}\|A\|_\infty$$

同理可证

$$\|fl(A\bar{S})-AS\|_\infty\leqslant 77\mu\cdot 2^{-t}\|A\|_\infty$$

定理 3 设 $\bar{A}_1=A$，$\bar{A}_{k+1}=fl(\bar{S}_k\bar{A}_k)$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$，$\bar{S}_k$ 是用 $\bar{A}_k$ 的有关元素计算出来的自逆阵，又令

$$\lambda=77\mu 2^{-t}$$

$$\tau=\max_k\|\bar{S}_k\|_\infty$$

则

$$(\bar{S}_1\bar{S}_2\cdots\bar{S}_{n-1})\bar{A}_n=A+G$$

其中

$$\|G\|_\infty\leqslant\left\{(n-1)\lambda\tau^{2n-3}\left(1+\frac{\lambda}{\tau}\right)^{n-2}\right\}\|A\|_\infty \tag{3.7}$$

证

$$\bar{A}_{k+1}=fl(\bar{S}_k\bar{A}_k)\equiv\bar{S}_k\bar{A}_k+E_k$$

由定理2知

$$\|E_k\|\leqslant 77\mu\cdot 2^{-t}\|\bar{A}_k\|_\infty$$

因而

$$\begin{aligned}\|\bar{A}_{k+1}\|_\infty&\leqslant\|E_k\|_\infty+\|\bar{S}_k\|_\infty\|\bar{A}_k\|_\infty\\&\leqslant(\lambda+\tau)\|\bar{A}_k\|_\infty\leqslant\cdots\leqslant(\lambda+\tau)^k\|A\|_\infty\end{aligned}$$

令

$$\bar{A}_n-\bar{S}_{n-1}\bar{S}_{n-2}\cdots\bar{S}_1A=F$$

则

$$(\bar{S}_1\bar{S}_2\cdots\bar{S}_{n-1})\bar{A}_n=A+G$$

其中 $G=(\bar{S}_1\cdots\bar{S}_{n-1})F$ 且

$$\|G\|_\infty\leqslant\tau^{n-1}\|F\|_\infty \tag{3.8}$$

下面估计 $\|F\|_\infty$

$$\begin{aligned}\|F\|_\infty&=\|\bar{A}_n-\bar{S}_{n-1}\cdots\bar{S}_1A\|_\infty\\&\leqslant\|\bar{A}_n-\bar{S}_{n-1}\bar{A}_{n-1}\|_\infty+\|\bar{S}_{n-1}(\bar{A}_{n-1}-\bar{S}_{n-2}\bar{A}_{n-2})\|_\infty+\cdots+\\&\quad+\|\bar{S}_{n-1}\cdots\bar{S}_2(\bar{A}_2-\bar{S}_1A)\|_\infty\\&\leqslant\|E_{n-1}\|_\infty+\|\bar{S}_{n-1}\|_\infty\|E_{n-2}\|_\infty+\cdots+\|\bar{S}_{n-1}\|_\infty\cdots\|\bar{S}_2\|_\infty\|E_1\|_\infty\\&\leqslant\lambda\|\bar{A}_{n-1}\|_\infty+\tau\lambda\|\bar{A}_{n-2}\|_\infty+\cdots+\tau^{n-2}\lambda\|A\|_\infty\\&\leqslant\{\lambda(\lambda+\tau)^{n-2}+\tau\lambda(\lambda+\tau)^{n-3}+\cdots+\tau^{n-2}\lambda\}\|A\|_\infty\\&\leqslant\lambda(n-1)(\lambda+\tau)^{n-2}\|A\|_\infty\end{aligned}$$

代入(3.8)式得

$$\begin{aligned}\|G\|_\infty&\leqslant(n-1)\tau^{n-1}\lambda(\lambda+\tau)^{n-2}\|A\|_\infty\\&=\left\{(n-1)\tau^{2n-3}\lambda\left(1+\frac{\lambda}{\tau}\right)^{n-2}\right\}\|A\|_\infty\end{aligned}$$

利用定理2和定理3容易推得

推论 1 设 $\bar{A}_1=A$，$\bar{A}_{k+1}=fl(\bar{S}_k\bar{A}_k)$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$\|\bar{A}_n-\bar{S}_{n-1}\bar{S}_{n-2}\cdots\bar{S}_1A\|_\infty\leqslant\theta\|A\|_\infty \tag{3.9}$$

其中

$$\theta=\lambda(n-1)\tau^{n-2}\left(1+\frac{\lambda}{\tau}\right)^{n-2} \tag{3.10}$$

λ,τ 如定理2。

推论 2 设 $\bar{A}_1=A$，$\bar{A}_{k+1}=fl(\bar{A}_k\bar{S}_k)$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$\|\bar{A}_n-A\bar{S}_1\bar{S}_2\cdots\bar{S}_{n-1}\|_\infty\leqslant\theta\|A\|_\infty \tag{3.11}$$

其中 θ,λ,τ 如推论1。

定理 4 设 $\bar{A}_1=A$，$\bar{A}_{k+1}=fl(\bar{S}_k\bar{A}_k)$，$(k=1,2,\cdots,n-1)$，又设

$$\bar{B}_1=\bar{A}_n,\quad \bar{B}_{k+1}=fl(\bar{B}_k\bar{S}_k),\quad(k=1,2\cdots,n-1),$$

则 $$\|\bar{B}_n-\bar{S}_{n-1}\cdots\bar{S}_1A\bar{S}_1\cdots\bar{S}_{n-1}\|_\infty\leqslant 2\theta\tau^{n-1}\|A\|_\infty \tag{3.12}$$
其中 θ 由 (3.10) 确定。

证 由推论 1 知
$$\|\bar{A}_n\|_\infty\leqslant(\theta+\tau^{n-1})\|A\|_\infty$$
而
$$\begin{aligned}\|\bar{B}_n-\bar{S}_{n-1}\cdots\bar{S}_1A\bar{S}_1\cdots\bar{S}_{n-1}\|_\infty&\leqslant\|\bar{B}_n-\bar{A}_n\bar{S}_1\cdots\bar{S}_{n-1}\|_\infty+\|(\bar{A}_n-\bar{S}_{n-1}\cdots\bar{S}_1A)\bar{S}_1\cdots\bar{S}_{n-1}\|_\infty\\&\leqslant\theta\|\bar{A}_n\|_\infty+\tau^{n-1}\theta\|A\|_\infty\\&\leqslant\theta(\theta+\tau^{n-1})\|A\|_\infty+\tau^{n-1}\theta\|A\|_\infty\\&\leqslant\theta(2\tau^{n-1}+\theta)\|A\|_\infty\approx2\theta\tau^{n-1}\|A\|_\infty\end{aligned}$$
正如[8] $P.167$ 所指出的，对于稳定的初等非酉变换，得到如 (3.7) 及 (3.12) 式形式的误差界限通常是相当困难的，因而对于初等自逆变换，我们亦只能满足于上述的一般结论。但从上述讨论知道，当 n 不大时，结论还是满意的，此外，若能构造 S_k 使 τ 越小，则误差界越小，为此，我们已构造了另一种自逆变换，使 $\tau\leqslant2$，有关结果将另文发表。

参考文献

[1] A. S. Householder, The theory of matrices in numerical analysis, New York, 1964.

[2] G. W. Stewart, Introduction to matrix computation, Academic Press, 1973.

[3] 谭领，解线性方程组的一种新方法，计算数学 1 (1979)。

[4] 谭领，另一种主元消去法，武汉大学学报 1981，第三期。

[5] 王琦，关于自逆变换，数值计算与计算机应用，3 (1981)。

[6] 谭领，化阵为 Hessenberg 型的一种新的相似变换，计算数学1979年年会交流资料。

[7] 谭领，斜映射矩阵和 Househosder 变换的推广，计算数学 1 (1981)。

[8] J. H. Wilkinson, The algebraic eigenvalue problem, Oxford University Press, 1965.

Error Analysis of a Class of Self-inverse Elementary Transformation

Wang Guorong
(Shanghai Teachers College)

Zheng Jiadong
(Shanghai Institute of Computer Technology)

Abstract

In this paper, the self-inverse elementary transformation of the form $s=I-uv^T$, $s^{-1}=s$ introduced in [3], [4], [5] is further discussed.

The general form of elementary self-inverse matrix, which reduces a matrix to Hessenberg form by similarity transforms, is given, and an error analysis of a class of self-inverse matrix therein is made. The error bounds of the one-sided and two-sided transformations are also discussed.