第35卷第1期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 35, No. 1
2006年2月 Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences) 2006, Feb.

一致局部上同调零化子和多项式扩张

刘刚剑，宋传宁
(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘　要：A 是有限维 Noether 环. 证明了：如果环 A 有一致局部同调零化子，则 A 上的 r 元多项式环 $A[X_1, X_2, \cdots, X_r]$ 也有一致局部同调零化子.

关键词：一致局部同调零化子；局部同调群；Koszul 同调群；多项式扩张
中图分类号：O153.3；O154　**文献标识码**：A　**文章编号**：1000-5137(2006)01-0052-04

1 前　言

设 A 是 Noether 交换环，I 为 A 的理想. 用 $H_I^i(A)$ 表示 A 的支撑集包含在 $V(I)$ 中的第 i 个局部同调群，这里 $V(I) = \{P \in SpecA \mid P \supseteq I\}$. 设 $x \in A$ 且 x 不包含在 A 的任意极小素理想中，如果对每个 A 的极大理想 m，均有 $xH_m^i(A) = 0(i < htm)$，称 x 为 A 的一致局部上同调零化子.

众所周知，当 $H_m^i(A) \neq 0$ 时，$H_m^i(A)$ 几乎不是有限生成的. 即使是 $H_m^i(A)$ 的零化子也很难找到. 在文[1]中，M. Hochster 和 C. Hunke 证明了如果 A 是 Gorenstein 环的商环，则 A 有一致局部同调零化子. 在文[2]中，周给出了环 A 具有一致局部上同调零化子的刻画，证明了具有一致局部上同调零化子的环一定是泛分层次环. 任何具有局部相等维数的环 A 如果是 Cohen - Macaulay 环的商环，则 A 具有一致局部上同调零化子.

泛分层次环是通过多项式扩张来刻画的. 称一个环 A 是分层次环，如果 A 的任何两个素理想 $P \subset Q$ 之间素理想的极大饱和链 $P = P_0P_1\cdots P_n = Q$ 均有相同的长度. 称 A 是泛分层次环，如果 A 的任何多项式扩张均为分层次环. 由于上面提到的周的结果，我们在本文中研究一致局部上同调零化子在多项式扩张下的性质，得到了如下的结论：

定理 1.1　设 A 为有限维 Noether 环，若 A 有一致局部上同调零化子，则 A 上的 r 元多项式环 $A[X_1, X_2, \cdots, X_r]$ 也有一致局部上同调零化子.

在下文中，用 A 表示一个有限维 Noether 环，用 $SpecA$ 表示 A 的所有素理想的集合. 为方便起见，用 A^0 表示 A 中所有不属于 A 的任意极小素理想的元素所成的集合. 给定 A 的的理想 I，I 的高度用符号 htI 表示. 设 I_1, I_2 为 A 的理想，用 $(I_1 :_A I_2)$ 表示 $\{a \in A a I_2 I_1\}$. 设 $a_1, \cdots, a_n$，是 A 中的 n 个元素，我们用 $H_i(a_1, \cdots, a_n, A)$ 表示环 A 的 Koszul 复形 $K.(a_1, \cdots, a_n)$ 的第 i 个同调群.

2 准备工作

在本节中，先讨论一些与一致局部上同调零化子有关的结果，证明几个引理.

收稿日期：2005-12-29
基金项目：上海市自然科学基金(05ZR14094)；上海市教委科技发展基金(L200508).
作者简介：刘刚剑(1977 -)，女，上海师范大学数理信息学院硕士研究生；宋传宁(1962 -)，上海师范大学数理信息学院副教授.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

设 A 为 Noether 环，m 为 A 的极大理想，由局部同调群的定义得 $H_m^i(A) \cong H_{mA_m}^i(A_m)$（$\forall i \geqslant 0$）。

在文[2]中证明了如下结果：

引理 2.1　设 A 是 d-维 Noether 环，则下列条件等价：

(1) A 有一致局部上同调零化子。

(2) 存在 $x \in A^0$，对任意 $P \in SpecA$，有 $xH_{PA_P}^i(A_P) = 0, i < htP$。

在此基础上，可继续得到下面的结论：

引理 2.2　设 A 是 d－维 Noether 环，则下列条件等价：

(1) A 有一致局部上同调零化子。

(2) 存在 $x \in A^0$，对任意 $P \in SpecA$，设 $htP = h$，存在 $a_1, a_2, \cdots, a_h \in P$，满足 $ht(a_1, a_2, \cdots, a_h) = h$，对任意正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_h$，有

$$x((a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, , a_{i-1}^{n_{i-1}}) :_A a_i^{n_i})(a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}), 1 \leqslant i \leqslant h.$$

证明　利用引理 2.1 证明 (1)⇒(2)：

由引理 2.1，存在 $x \in A^0$，对任意 $P \in$ Spec$A$，有：

$$xH_{PA_P}^i(A_P) = 0, i < htP.$$

根据定理 11.4(b)[1]，对任意 $a_1, a_2, \cdots, a_h \in P$，满足 $ht(a_1, a_2, \cdots, a_h) = h$，和任意正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_h$，有

$$x^{2^d-1}H_j(a_1^{n_1}, \cdots, a_i^{n_i}, A) = 0, j > 0, 0 \leqslant i \leqslant h.$$

考虑 A 的 Koszul 复形 $K.(a_1, \cdots, a_h)$ 的同调群的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_1(a_1^{n_1}, \cdots, a_i^{n_i}, A) \xrightarrow{\varepsilon} H_0(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}, A) \xrightarrow{a_i^{n_i}} H_0(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}, A)$$

由于 $x^{2^d-1}H_1(a_1^{n_1}, \cdots, a_i^{n_i}, A) = 0$，且 $\ker a_i^{n_i} = Im\varepsilon$，因此 $x^{2^d-1}\ker a_i^{n_i} = 0$。而由 $H_0(a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}, A) = A/(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$，知 $\ker a_i^{n_i} = ((a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) :_A a_i^{n_i})$。所以有

$$x^{2^d-1}((a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) :_A a_i^{n_i}) \subseteq (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}), 1 \leqslant i \leqslant h.$$

不妨用 x 替换 x^{2^d-1}，即得结论。

下面用归纳法证明 (2)⇒(1)：

对 A 的任意极大理想 m，设 $htm = s$，归纳证明：对 $i < s$，有 $x^{2(s+1)}H_m^i(A) = 0$。因为 $H_m^i(A) = H_{mA_m}^i(A_m)$，就在 (A_m, mA_m) 上进行讨论，不妨用 A_m 替换 A。由已知，存在 $a_1, a_2, \cdots, a_s \in m$，满足 $ht(a_1, a_2, \cdots, a_s) = s$，对任意正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_s$，有 $x((a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) :_A a_i^{n_i}) \subseteq (a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$，$1 \leqslant i \leqslant s$。当 $s = 1$，由 A 是 Noether 环知，存在正整数 n，使得 $H_m^0(A) = \bigcup_{r \geqslant 0}^{\infty}(0 :_A m^r) = (0 :_A m^n)(0 :_A a_1^n)$。由 $x(0 :_A a_1^n) = 0$，得 $xH_m^0(A) = 0$，结论成立。

假定结论对 $s-1$ 维情况成立。则由假设对所有 $i < s-1$ 和任意正整数 n，有 $x^{2s}H_m^i(A/(a_1^n)) = 0$ 成立。

考虑短正合列

$$0 \to (0 :_A a_1^n) \to A \xrightarrow{a_1^n} a_1^nA \to 0 \tag{2.1}$$

与

$$0 \to a_1^nA \xrightarrow{1_{a_1^nA}} A \to A/a_1^nA \to 0. \tag{2.2}$$

分别得局部同调的长正合列

$$\cdots \to H_m^i((0 :_A a_1^n)) \xrightarrow{\varphi} H_m^i(A) \xrightarrow{\phi} H_m^i(a_1^nA) \to \cdots \tag{2.3}$$

与

$$\cdots \xrightarrow{\omega} H_m^i(a_1^nA) \xrightarrow{\psi} H_m^i(A) \to H_m^i(A/a_1^nA) \to \cdots \tag{2.4}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由(2.1)和(2.2)有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "a_1^n"] \arrow[dr] & & a_1^nA \arrow[dl, "a_1{}^nA"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

因此 $1_{a_1^nA} \circ a_1^n(a) = a_1^n a$, 对任意 $a \in A$.

又由(2.3)和(2.4)有交换图

$$\begin{tikzcd} H_m^i(A) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & H_m^i(a_1^nA) \arrow[dl, "\psi A"] \\ & H_m^i(A) & \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

所以 $\psi \circ \phi(y) = a_1^n y$,对任意 $y \in H_m^i(A)$.

对任意 $y \in H_m^i(A)$,则存在正整数 n_0 ,有 $a_1^{n_0}y = 0$. 不妨用 n_0 替换 (2.1) ~ (2.6) 中的 n ,即有 $\psi \circ \phi(y) = 0$. 所以 $\phi(y) \in \ker\psi$.

由正合列 (2.4) 知 $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Im}\omega$,结合假设 $x^{2s}H_m^{i-1}(A/a_1^nA) = 0(i < s)$,因此 $x^{2s}\phi(y) = 0$,从而 $\phi(x^{2s}y) = 0$,即 $x^{2s}y \in \phi$. 又由正合列 (2.3) 知 $\ker\phi = \mathrm{Im}\varphi$,因此 $x^{2s}y \in \mathrm{Im}\varphi$. 而已知 $x\mathrm{Im}\varphi = 0$,所以 $x^{2s+1}y = 0$,即有 $x^{2s+1}H_m^i(A) = 0(i < s)$,更有 $x^{2(s+1)}H_m^i(A) = 0(i < s)$. 归纳证明完毕.

因为对所有 A 的极大理想 m , $\dim A \geqslant \mathrm{ht}m$,显然 $x^{2(d+1)}H_m^i(A) = 0(i < d)$. 不妨用 x 替换 $x^{2(d+1)}$ 就得结论.

下面再补充 2 个证明定理需要的引理:

引理 2.3 设 A 是环, $B = A[X]$. I_1, I_2 是 A 的理想. 则

(1) $(I_1 \cap I_2)B = I_1B \cap I_2B$;

(2) 当 I_2 有限生成,有 $(I_1 :_A I_2)B = I_1B :_B I_2B$.

证明 (1) 定义环同态 $\Phi: A \to A/I_1 \oplus A/I_2$

$$\Phi(a) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2),$$

其中 $a \in A$, $\bar{a}_1$ 和 $\bar{a}_2$ 分别表示 a 在 A/I_1 和 A/I_2 中的像. 则 $0 \to I_1 \cap I_2 \to A \to A/I_1 \oplus A/I_2 \to 0$ 为短正合列,因此 $0 \to (I_1 \cap I_2) \otimes_A B \to A \otimes_A B \to (A \otimes_A B)/(I_1 \otimes_A B) \oplus (A \otimes_A B)/(I_2 \otimes_A B) \to 0$ 也是短正合列.

所以 $(I_1 \cap I_2) \otimes_A B = (I_1 \otimes_A B) \cap (I_2 \otimes_A B)$. 对 A 的理想 I , $I \otimes_A B$ 为 $A \otimes_A B$ 的子集,且 $I \otimes_A B = IB$. 因此有 $(I_1 \cap I_2) \otimes_A B = I_1B \cap I_2B$.

(2) 设 $I_2 = Aa_1 + Aa_2 + \cdots + Aa_t$, 则 $(I_1 :_A I_2) = \bigcap_{i=1}^{t} (I_1 :_A Aa_i)$. 因此不妨设 $I_2 = (a_0)$ 为主理想,可得短正合列 $0 \to (I_1 :_A Aa_0) \to A \xrightarrow{a_0} A/I_1 \to 0$ 与 B 做张量积,得短正合列

$$0 \to (I_1 :_A Aa_0) \otimes_A B \to A \otimes_A B \xrightarrow{a_0} (A \otimes_A B)/(I_1 \otimes_A B) \to 0.$$

所以 $(I_1 :_A Aa_0)B = I_1B :_A Aa_0B$. 即 $(I_1 :_A I_2)B = I_1B :_B I_2B$.

引理 2.4 设环 A 为有限维 Noether 环, $x \in A^0$. 令 $B = A[X]$,则 $x \in B^0$.

证明 首先证明 B 的极小素理想均为 pB 的形式,其中 p 为 A 的极小素理想:

设 P 为 B 的极小素理想,令 $p = P \cap A$,则 p 为 A 的素理想. 又令 p_1 为包含在 p 中的极小素理想,则 $P \supseteq p_1B$. 由 A/p 为整环,知其多项式扩张 $A/p[X]$ 也为整环,即 $B/p_1B = A/p[X]$ 为整环,因此 p_1B 是 B 的素理想. 所以由 P 的选取得 $P = p_1B$.

下面证明,对 A 的任意极小素理想 p ,有 $x \notin pB$: 由 $(A/P) \otimes_A B$ 与 B/pB 同构,建立 $(A/P) \otimes_A B$ 到 B/pB 的同态 x : 对任意 $a \in A$, $x(\bar{a}) = \overline{ax}$. 其中 $\bar{a}$ 为 a 在 A/p 中的像, $\overline{ax}$ 为 ax 在 B/pB 中的像. 因为 B 为平坦 A -模,所以 x 为单同态. 由 $x \notin p$,当 $\bar{a} \neq 0$,得 $\overline{ax} \neq 0$,即 $x \notin pB$. 命题得证.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3 定理的证明

下面就对定理1.1进行证明.

证明 对 r 进行归纳，只须证明 $r=1$ 的情形. 设 $\dim A=d$，令 $B=A[X]$. 任取 B 的极大理想 P，因为对 $i<htP$，$H_P^i(B)=H_{PB_P}^i(B_P)$. 所以要证明 B 有一致局部上同调零化子，只需证明 B_P 有一致局部上同调零化子. 由引理2.2知，只要证明条件：

存在 $x\in B_P^0$，使得对 (B_P,P) 的参数系 $b_1,b_2,\cdots,b_{d+1}$，和任意正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_{d+1}$，有

$$x((b_1^{n_1},b_2^{n_2},\cdots,b_{i-1}^{n_{i-1}}):_B b_i^{n_i})\subseteq(b_1^{n_1},b_2^{n_2},\cdots,b_{i-1}^{n_{i-1}}),\ 1\leqslant i\leqslant d+1. \tag{3.1}$$

成立.

我们证明 (3.1) 成立：令 $P\cap A=m$. 则 B_P 也是 $A_m[X]$ 的一个局部化. 所以不妨用 (A_m,mA_m) 替换 A 来讨论，这样 A 就是有极大理想 m 的局部环，且 A 有一致局部上同调零化子. 又由引理2.2知，存在 $x_0\in A^0$，对 A 的任意参数系 $a_1,a_2,\cdots,a_d$，和任意正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_d$，有

$$x_0(a_1^{n_1},a_2^{n_2},\cdots,a_{i-1}^{n_{i-1}}):_A a_i^{n_i})\subseteq(a_1^{n_1},a_2^{n_2},\cdots,a_{i-1}^{n_{i-1}}),\ 1\leqslant i\leqslant d.$$

令 $k=A/m$，得 $B/mB\cong k[X]$. 则 P/mB 是 $k[X]$ 的主理想，设由不可约首一多项式 $\Psi(X)$ 生成. 取首一多项式 $f(X)\in B$，使 $(f(X))$ 在 B/mB 中的像等于 $\Psi(X)$，则 $P=(m,f(X))$. 为叙述方便，不妨用 B 表示 B_P. 选取 A 的参数系 $b_1,b_2,\cdots,b_d$，使得 $b_1,b_2,\cdots,b_d,b_{d+1}=f(X)$ 为 B 的参数系. 则

(1) 由引理2.4知 $x_0\in B^0$. 因为 B 是 A 的平坦扩张，由引理2.3知，在环 B 上. 对任意正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_d$，有 $x_0((b_1^{n_1},b_2^{n_2},\cdots,b_{i-1}^{n_{i-1}}):_B b_i^{n_i})B\subseteq(b_1^{n_1},b_2^{n_2},\cdots,b_{i-1}^{n_{i-1}})B$，$1\leqslant i\leqslant d$.

(2) 对 $b_{d+1}=f(X)$，有 $((b_1,b_2,\cdots,b_d)B:_B b_{d+1})\subseteq(b_1,b_2,\cdots,b_d)B$.

事实上，设 $g(X)=c_0X^r+c_1X^{r-1}+\cdots+c_r$，这里 $r=\deg g(X)$，使得 $f(X)g(X)\in(b_1,b_2,\cdots,b_d)B$，则 $f(X)g(X)$ 是 $(b_1,b_2,\cdots,b_d)$ 上首项为 c_0X^{r+s} 的 $r+s$ 次多项式，其中 $s=degf(X)$. 因此 $c_0\in(b_1,b_2,\cdots,b_d)B$. 同理可知对所有 $0\leqslant i\leqslant r,c_i\in(b_1,b_2,\cdots,b_d)$. 所以 $g(X)\in(b_1,b_2,\cdots,b_d)B$. 即

$$((b_1,b_2,\cdots,b_d)B:_B f(X))\subseteq(b_1,b_2,\cdots,b_d)B.$$

综合 (1)，(2) 得条件 (3.1) 成立. 命题得证.

参考文献：

[1] HOCHSTER M, HUNKE C. Tight closure, Invariant theory, the Brancon - skoda theorem[J]. J Amer Math, 1990, 9(1): 31 - 117.

[2] ZHOU C J. Uniform annihilators of local cohomology, J Algebra, 2006.

[3] MATSUMURA H. Commutative ring theory[Z]. Cambridge University Press: 127 - 140.

Uniform annihilators of local cohomology and polynomial extension

LIU Gang-jian, SONG Chuan-ning

(Mathmatics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Let A be a d - dimentional Noetherian ring, and $A[X]$ the polynomial extension of A. It is shown that if there exist uniform annihilators of local cohomology on A, they also exist on $A[X]$.

Key words: uniform annihilators of local cohomology; local cohomology; homology of koszul complex; polynomial extension

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net