# 由圈长分布确定的偶图

王 敏, 王明磊

(上海师范大学 数理信息学院, 上海 200234)

**摘 要**: 阶为 $n$ 的图 $G$ 的圈长分布是序列 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$,其中 $c_i$ 是图 $G$ 中长为 $i$ 的圈数. 作者得到如下结果:设 $n \le r \le \min\{n+6, 2n-3\}$,则 $K_{n,r}$ 是由它的圈长分布确定的.

**关键词**: 圈;圈长分布;偶图;圈长分布确定的偶图

**中图分类号**: O157.5  **文献标识码**: A  **文章编号**: 1000-5137(2004)01-0042-03

## 0 引 言

阶为 $n$ 的图 $G$ 的圈长分布是序列 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$,其中 $c_i$ 是图 $G$ 中长为 $i$ 的圈数. 计算给定图 $G$ 的圈长分布是一个未解决的困难问题,即使计算 $c_n$ 也是一个很困难的问题[1]. 如果一个图 $G$ 的圈长分布 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 已经知道. 一般来说,具有这样的圈长分布的图 $G$ 不唯一,因而一个自然的问题就是什么样的图是由它的圈长分布确定的[2].

当 $r > n \ge 3$ 时, $K_{n,r}$ 的圈长分布的唯一性问题就是一个很困难的问题. 本文对此问题进行了研究,取得突破性进展,证明了 $K_{n,r}(n \le r \le \min\{n+6, 2n-3\})$ 是由它的圈长分布确定的.

## 1 若干引理和命题

我们首先有下述

**引理1** 若 $G$ 是 $n \ge 3$ 的简单图且对任意不相邻的顶点对 $u, v$, 均有 $d_G(u) + d_G(v) \ge \nu + 1$,则 $G$ 含有 $\nu - 1$ 圈.

**引理2** 设 $G$ 是简单图, $u$ 和 $v$ 是 $G$ 中不相邻的顶点,且适合 $d_G(u) + d_G(v) \ge \nu + 1$, 则 $G$ 含有 $n-1$ 圈当且仅当 $G + uv$ 含有 $\nu - 1$ 圈.

**引理3** 设 $G = K_{n,n+1} - A$, $A \subseteq E(K_{n,n+1})$, $|A| = j$,则当 $n \ge j+2$ 时, $G$ 的圈长分布 $(c_1, c_2, \cdots, c_{2n+1})$ 中 $c_{2n} \ne 0$.

**引理4** 当 $n \ge j+2$ 时, $K_{n,n} - A\,(|A| = j)$ 的圈长分布 $(c_1, c_2, \cdots, c_{2n})$ 中 $c_{2n} \ne 0$.

**引理5** 当 $n \ge j+2$ 时, $K_{n,n+k} - A\,(|A| = j, k \ge 1)$ 的圈长分布 $(c_1, c_2, \cdots, c_{n+k})$ 中 $c_{2n} \ne 0$.

综合引理3～5得到下述

---

**收稿日期**: 2003-03-30

**基金项目**: 上海市高校科技发展基金(02DK08)和上海市教委课程建设项目.

**作者简介**: 王敏(1978— ),女,上海师范大学数理信息学院研究生; 王明磊(1979— ),女,上海师范大学数理信息学院研究生.

**命题 1**　设 $G = K_{n,r} - A, A \subseteq E(K_{n,r}), |A| = j, r \geq n$. 则当 $n \geq j+2$ 时, $G$ 的圈长分布 $(c_1, c_2, \cdots, c_{n+r})$ 中 $c_{2n} \neq 0$.

为证明下节定理,我们还需要下述

**引理 6**[3]　设 $G = K_{n,r} - A, A \subseteq E(K_{n,r}), |A| = j, r \geq n$, 则 $G$ 的最大 4 圈数

$$c_4(G) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + (r-1)\binom{j}{2}.$$

## 2　主要结果

**定理 1**　设 $n \leq r \leq \min\{n+6, 2n-3\}$, 则 $G$ 是完全偶图 $K_{n,r}$ 当且仅当它的圈长分布 $(c_1, c_2, \cdots, c_{n+r})$ 满足

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{n}{p}\binom{r}{p} p[(p-1)!]^2, & i = 2p,\ p = 2,3,\cdots,n; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

**证明**　对于 $r = n$ 的情形, 陆宗元在[4]中已证. 现在考虑 $n < r \leq \min\{n+6, 2n-3\}$ 时的情形.

先证必要性. 因为 $K_{n,r}$ 为简单偶图, 所以 $c_1 = c_2 = 0, c_{2p+1} = 0, p = 1, 2, \cdots, n$. 又显然对 $i > 2n$, $c_i = 0$. 对每个 $i = 2p\ (p = 2, 3, \cdots, n)$, $G$ 有 $\binom{n}{p}\binom{r}{p}$ 个阶为 $i$ 的完全偶子图 $K_{p,p}$. 而每个这样的完全偶子图 $K_{p,p}$ 有 $\frac{1}{2}p[(p-1)!]^2$ 个 $i$ 圈. 因此 $c_i = \frac{1}{2}p\binom{n}{p}\binom{r}{p}[(p-1)!]^2$.

再证充分性(用反证法). 若 $G \neq K_{n,r}$, 则 $G = K_{n,r} - A, |A| \geq 1$ 或 $G = K_{n+k,r-k} - A, |A| \geq 0$, $1 \leq k \leq [\frac{r-n}{2}]$.

若 $G = K_{n,r} - A, |A| \geq 1$, 则易知 $c_4(G) < \binom{n}{2}\binom{r}{2}$, 这与已知矛盾.

若 $G = K_{n+k,r-k} - A, |A| = j \geq 0$, $1 \leq k \leq [\frac{r-n}{2}]$, 则由命题 1 知, 当 $n+k \geq j+2$, 即 $0 \leq j \leq n+k-2$ 时, $c_{2n+2k} \neq 0$, 这与已知矛盾. 所以 $G \in \{K_{n+k,r-k} - A \mid |A| = j \geq n+k-1\}$, 则显然有

$$c_4(G) \leq \max_{|A| = j = n+k+1} c_4(K_{n+k,r-k} - A).$$

由引理 6 知

$$c_4(G) \leq \binom{n+k}{2}\binom{r-k}{2} - (n+k-1)\binom{n+k-1}{1}\binom{r-k-1}{1} + \binom{n+k-1}{2}(r-k-1).$$

令 $f(k)$ 为上述不等式右边的式子, 则上式化为 $c_4(G) \leq f(k)$. 以下证明 $f(k) < \binom{n}{2}\binom{r}{2}$, 即证 $f(k) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} < 0$. 令 $H_k(r) = f(k) - \binom{n}{2}\binom{r}{2}$, 由于 $n < r \leq \min\{n+6, 2n-3\}$, 及 $1 \leq k \leq [\frac{r-n}{2}]$, 推出 $2 \leq 2k \leq r-n \leq 6$ 及 $r \leq 2n-3$, 进一步有 $1 \leq k \leq 3$, $n \geq r-n+3 \geq 5$.

于是当 $k = 1$ 时, $H_1(r) = f(1) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} = \frac{1}{4}[(-4r+6)n^2 + (2r^2 - 6r + 6)n]$. 此时 $2 \leq r - n \leq 6$, 即 $n+2 \leq r \leq n+6$. 将 $r = n+2, n+3, \cdots, n+6$ 分别代入 $H_1(r)$, 并结合 $n$ 的条件即 $n \geq r - n + 3$, 有

$$H_1(n+2) = \frac{1}{4}[-2n^3 + 2n] < 0, \quad H_1(n+3) = \frac{1}{4}[-2n^3 + 6n] < 0,$$

$$H_1(n+4) = \frac{1}{4}[-2n^3 + 14n] < 0, \quad H_1(n+5) = \frac{1}{4}[-2n^3 + 26n] < 0$$

和

$$H_1(n+6) = \frac{1}{4}[-2n + 42n] < 0.$$

当 $k = 2$ 时,

$$H_2(r) = f(2) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} = \frac{1}{4}[(-6r+12)n^2 + (4r^2 - 22r + 36)n + (2r^2 - 14r + 24)].$$

此时 $4 \le r - n \le 6$,即 $n + 4 \le r \le n + 6$. 将 $r = n+4, n+5, n+6$ 分别代入 $H_2(r)$,并结合 $n$ 的条件,有

$$H_2(n+4) = \frac{1}{4}[-2n(n^2 - 7)] < 0,$$

$$H_2(n+5) = \frac{1}{4}[-2n(n^2 - n - 16) + 4] < 0$$

和

$$H_2(n+6) = \frac{1}{4}[-2n(n^2 - 2n - 29) + 12] < 0.$$

当 $k = 3$ 时,

$$H_3(r) = f(3) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} = \frac{1}{4}[(-8r+20)n^2 + (6r^2 - 46r + 100)n + (6r^2 - 54r + 120)].$$

此时 $r - n = 6$,将 $r = n + 6$ 代入 $H_3(r)$,并结合 $n$ 的条件即 $n \ge 9$ 得到

$$H_3(n+6) = \frac{1}{4}[-2n(n^2 - 2n - 29) + 12] < 0.$$

因此 $f(k) < \binom{n}{2}\binom{r}{2}$,即 $c_4(G) < \binom{n}{2}\binom{r}{2}$,矛盾. 故 $G \in \{K_{n+k,r-k}A \mid |A| = j \ge n + k - 1\}$. 因此, $G = K_{n,r}$.

## 参考文献:


[1] BERMOND J C. Hamilton graphs, in Selected Topics in Graph Theory[M]. Edited by Beineke L W and Wilson R J, Academic Press, 1978.

[2] SHI Y B. Some problems of cycle length distribution[J]. 南京大学学报(图论专辑). 1991, 27:233 234.

[3] 吴承勋. 几类偶图的圈长分布[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 1993, 22(2):28 32.

[4] 陆宗元. 几类由圈长分布确定的偶图[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 1992, 21(4):24 28.


## Bipartite Graphs Determined by Their Cycle Length Distributions


WANG Min, WANG Ming lei

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)



**Abstract:** The cycle length distribution of a graph of order $n$ is $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, where $c_i$ is the number of cycles of length $i$. In this paper, we obtain the following result: Let $n \le r \le \min\{n+6, 2n-3\}$, then $K_{n,r}$ is determined by its cycle length distribution.



**Key words:** cycle; cycle length distribution; bipartite graph; a bipartite graph determined by its cycle length distribution