第32卷第4期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 32, No. 4
2003年12月 Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences) 2003, Dec.

由圈长分布确定的偶图的几个定理

施永兵，刘荣官

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘　要：阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，其中 c_i 是图 G 中长为 i 的圈数. 得到如下结果：(1) 设 $A \subseteq E(K_{n,n})$，则当 $K_{n,n}[A] \cong K_{1,j}$ 或 $K_{n,n}[A] \cong jK_2$ 时，$K_{n,n} - A$ 是由它的圈长分布确定；(2) 设 $A \subseteq E(K_{n,n}$，$|A| = 4, n \geqslant 11$，则 $K_{n,n} - A$ 是由它的圈长分布确定的.

关键词：圈；圈长分布；偶图；圈长分布确定的图

中图分类号：O157.5　**文献标识码**：A　**文章编号**：1000-5137(2003)04-0014-04

阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，其中 c_i 是图 G 中长为 i 的圈的数目. 若 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是图 G 的圈长分布，且不存在 $G'(G' \not\cong G)$ 使 G' 和 G 具有相同的圈长分布，则称 G 是由它的圈长分布确定的. 图论中许多著名的问题与图的圈长分布有关[3~6]. 计算给定图 G 的圈长分布是一个未解决的困难的问题，即使计算 c_n 也是一个很困难的的问题[2]. 如果一个图 G 的圈长分布 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 已经知道，一般来说，具有这样的圈长分布的图不唯一，因而一个自然的问题就是什么样的图 G 是由它的圈长分布确定的[1].

本文只讨论简单偶图且约定 $A \subseteq E(K_{n,n}$. 本文主要结果已在提要中指出.

1　记号和引理

设 G 是简单偶图且 $V(G) = X \cup Y$ 使 G 的每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中. 本文约定 $|X| = |Y| = n$. 令 $\bar{G} = K_{n,n} - E(G)$，$E(\bar{G} = A$，$|A| = j$. 设 $S \subseteq A$，用 $\mu_i(S)$ 表示 $K_{n,n}$ 中包含 S 中所有边的长为 i 的圈的数目.

由于 G 是简单偶图，显然对 $i = 2m - 1$，$m = 1, 2, \cdots, n$ 有 $c_i = c_2 = 0$；对 $i = 2m$，$m = 2, 3, \cdots, n$，由容斥原理得 $c_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^k \sum\limits_{S \subseteq A, |S| = k} \mu_i(S)$.

令 $a_{ik} = \sum\limits_{S \subseteq A, |S| = k} \mu_i(S)$，则 $c_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^k a_{ik}$

设 $S \subseteq A$，$|S| = k$，$H = K_{n,n}[S]$，则 $H \subseteq \bar{G}$. 若 $\triangle(H) \leqslant 2$ 且 H 不是圈，则 H 的每个连通分支均是路. 为了方便，我们将长为奇数的路称为奇路，长为偶数 $(\neq 0)$ 的路称为偶路，并设 H 中恰有 p 条奇

收稿日期：2002-09-10

基金项目：上海市高校科技发展基金(02DK08)

作者简介：施永兵(1947-)，男，上海师范大学数理信息学院教授. 刘荣官(1958-)，男，博士，上海师范大学数理信息学院副教授.

路和 q 条偶路，且恰有 q_1 条偶路的端点在 X 中，这样的 H 被称为 $\bar{G}$ 的一个 (k,p,q,q_1) 子图. 用 $N(k,p,q,q_1)$ 表示 $\bar{G}$ 中 (k,p,q,q_1) 子图的数目.

令

$$f(k,p)=\left(\sum_{t=1}^{p-1}\binom{p-2}{t-1}\binom{2m-(k+p)+1}{t}\right)\cdot(p-1)!$$

和

$$g(k,p,q,q_1)=\binom{n-\frac{1}{2}(k+p)-q_1}{m-\frac{1}{2}(k+p)-q_1}\binom{n-\frac{1}{2}(k+p)-q+q_1}{m-\frac{1}{2}(k+p)-q+q_1}.$$

文[7]给出了计算 $\mu_{2m}(S)$ 的公式如下：

$$\mu_{2m}(S)=\begin{cases}0, & \text{当 } H \text{ 的最大度 } \Delta\geqslant 3 \text{ 或含有长为 } l<2m \text{ 的圈；}\\ 1, & \text{当 } H \text{ 是长为 } 2m \text{ 的圈；}\\ 2^q\cdot g(k,p,q,q_1)\cdot f(k,p)\cdot[(m-(k+p)/2)!]^2, & \text{其他.}\end{cases}$$

其中，当 $p=0$ 时，定义 $f(k,p)=\dfrac{1}{2m-(k+p)}$；当 $p=1$ 时，定义 $f(k,p)=1$.

文[7]进一步给出了下述计算偶图 G 的圈长分布的一般公式.

引理 1　设简单偶图 G 的圈长分布为 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，则当 $m=2,3,\cdots,n$ 时有

$$c_{2m}=c_{2m}(\bar{G})+\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{[k/2]}\sum_{q_1=0}^{q}N(k,p,q,q_1)\cdot 2^q\cdot g(k,p,q,q_1)\cdot f(k,p)\cdot[(m-(k+p)/2)!]^2.$$

当 $m=1,2,\cdots,n$ 时，有 $c_{2m-1}=c_2=0$. 其中 $c_{2m}(\bar{G})$ 表示 $\bar{G}=K_{n,n}-E(G)$ 中的长为 $2m$ 的圈数，且定义 $N(0,0,0,0)=1$.

作为引理 1 的应用，我们下面计算 $K_{n,n}-A(|A|=4)$ 的 4 圈数. 易知 $K_{n,n}[A]$ 恰有图 1 所示的 10 种图形，将这些图形分别记为 $H_1,H_2,\cdots,H_{10}$. 用 $c_4(G_i)$ 表示 $G_i=K_{n,n}-E(H_i)$ 的 4 圈数且记 $\lambda=\binom{n}{2}^2-4(n-1)^2$，则容易算出 $c_4(G_i)$，$i=1,2,\cdots,10$（表 1）.

表 1　$c_4(G_i)$ 的 4 圈数

$c_4(G_1)=\lambda+6(n-1)$	$c_4(G_2)=\lambda+4(n-1)$
$c_4(G_3)=\lambda+4(n-1)-1$	$c_4(G_4)=\lambda+3(n-1)+3$
$c_4(G_5)=\lambda+3(n-1)+1$	$c_4(G_6)=\lambda+2(n-1)+4$
$c_4(G_7)=\lambda+2(n-1)+4$	$c_4(G_8)=\lambda+2(n-1)+2$
$c_4(G_9)=\lambda+(n-1)+5$	$c_4(G_{10})=\lambda+6$

设 $X_j=\{G|G=K_{n,n}-A,\ |A|=j\}$. 用 $c_4(G)$ 表示图 G 的 4 圈数. 令 $m_j=\min\limits_{G\in X_j}c_4(G)$ 和 $M_j=\max\limits_{G\in X_j}c_4(G)$. 下述引理 2，引理 3 和引理 4 由文[8]给出.

引理 2　设 $n>j\geqslant 2$，则

$$m_j=\binom{n}{2}^2-j\binom{n-1}{1}^2+\binom{j}{2},\quad M_j=\binom{n}{2}^2-j\binom{n-1}{1}^2+\binom{j}{2}(n-1).$$

引理 3　设 $n\geqslant j\geqslant 3$，任意 $G=K_{n,n}[A]\in X_j$，$K_{n,n}[A]\not\cong K_{1,j}$，$K_{n,n}[A]\not\cong jK_2$，则 $m_j<c_4(G)<M_j$.

引理 4　设 $j\geqslant 2$，$n\geqslant j(j+1)/2+1$，则 $m_j>M_{j+1}$.

引理 5　设 $G_1\in X_j$，$G_2\in X_t$，$t>j\geqslant 2$，$n\geqslant j(j+1)/2+1$，则 G_1 和 G_2 具有不同的圈长分布.

证明　因为 $t>j\geqslant 2$，故显然存在图 $G\in X_{j+1}$ 使 $G_2\subseteq G$，从而 $M_{j+1}\geqslant c_4(G)\geqslant c_4(G_2)$. 根据引理 4，$c_4$

$(G_1)\geqslant m_j > M_{j+1}\geqslant c_4(G_2)$，所以 G_1 和 G_2 具有不同的圈长分布. □

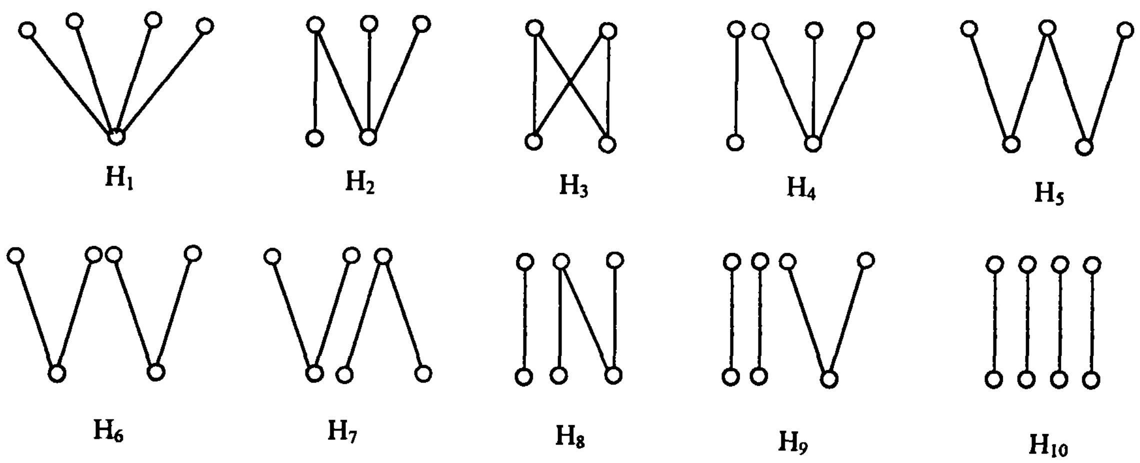

图 1 $K_{n,n}[A]$的 10 种图形

2 主要结果及其证明

定理 1 设 $G=K_{n,n}-A$ 且 $K_{n,n}[A]\cong K_{1,j}$，则当 $n\geqslant j(j+1)/2+1$ 时，$K_{n,n}-A$ 是由它的圈长分布确定的.

证明 由文[10]知，当 $j\leqslant 2$ 时，$G=K_{n,n}-A$ ($|A|=j$)是由它的圈长分布决定的. 因此不妨设 $j\geqslant 3$. 由引理 5 知，对任意 $G'\in X_t(t\neq j)$，G'和 G 具有不同的圈长分布. 现在考虑任意 $G'\in X_j$ 且 $G'=K_{n,n}-A'$，$K_{n,n}[A']\not\cong K_{1,j}$，根据引理 3，$c_4(G')<M_j=c_4(G)$，故 G'与 G 具有不同的圈长分布，因此定理成立. □

定理 2 设 $G=K_{n,n}-A$ 且 $K_{n,n}[A]\cong jK_2$，则当 $n\geqslant j(j+1)/2+1$ 时，$K_{n,n}-A$ 是由它的圈长分布确定的.

证明 由文[10]知，当 $j\leqslant 2$ 时，$G=K_{n,n}-A$ ($|A|=j$) 是由它的圈长分布决定的. 不妨设 $j\geqslant 3$. 由引理 5 知，对任意 $G'\in X_t(t\neq j)$，G'和 G 具有不同的圈长分布. 现在考虑任意 $G'=K_{n,n}-A'\in X_j$，且 $K_{n,n}[A']\not\cong jK_2$，根据引理 3，$c_4(G')>m_j=c_4(G)$，故 G'与 G 具有不同的圈长分布，定理得证. □

定理 3 设$|A|=4$，$n\geqslant 11$，则 $G=K_{n,n}-A$ 是由它的圈长分布确定的.

证明 由文[9]，[10]知，对任意 $G'=K_{n,n}-A'\in X_j(j\leqslant 3)$，$G'$是由它的圈长分布确定的. 因此 G'与 G 具有不同的圈长分布. 由引理 5 知，对任意 $G'\in X_j$，$j\geqslant 5$，则 G'与 G 具有不同的圈长分布.

现在只要证明对 $G=K_{n,n}-A\in X_4$，不同的 G 具有不同的圈长分布. 已经知道，$K_{n,n}[A]$恰有 10 种不同的图形(见图 1)，而且已经计算出图 G 在 10 种情况下的 4 圈数(表 1). 易知当 $n\geqslant 11$ 时，有 $c_4(G_1)>c_4(G_2)>c_4(G_3)>c_4(G_4)>c_4(G_5)>c_4(G_6)>c_4(G_7)>c_4(G_8)>c_4(G_9)>c_4(G_{10})$. 再一次应用引理 1 的计算公式，可以算出 G_6 和 G_7 的 6 圈数如下：

$$c_6(G_6)=6\binom{n}{3}^2-16\binom{n-1}{2}^2+12(n-2)^2+4(n-2)\binom{n-1}{2}-8(n-2),$$

$$c_6(G_7)=6\binom{n}{3}^2-16\binom{n-1}{2}^2+12(n-2)^2+4(n-2)\binom{n-1}{2}-8(n-2)+2.$$

显然 $c_6(G_6)<c_6(G_7)$. 这表明图 G 在 10 种情形下具有互不相同的圈长分布. 因此定理成立. □

参考文献：

[1] SHI Yong-bing. Some problems of cycle length distribution[J]. 南京大学学报(图论专辑),1991,27: 233-234.

[2] BERMOND J C. Hamilton graphs[M]. in Selected topic in Graph Theory. edited by Beineke, LW and Wilson, R J, Academic Press, 1978.

[3] SHI Yong-bing. Some theorems of uniquely pancyclic graphs[J]. Discrete Math, 1986, 59:167-180.

[4] SHI Yong-bing. YAP H P, TEO S K. On uniquely r-pancyclic graphs[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1989, 576: 487-499.

[5] SHI Yong-bing. On maximum cycle distribution graphs[J]. Discrete Math, 1988, 71: 57-71.

[6] SHI Yong-bing. On simple MCD—graphs containing a subgraph homemorphic to K_4[J]. Discrete Math, 1994, 126:325-338.

[7] 施永兵. 关于给定偶图的圈长分布的计算[J]. 上海师范大学学报(自然科学版),2002, 31(3):18-20.

[8] 陆宗元. $K_{n,n}-A_k$ 的最大最小 4 圈数[J]. 上海师范大学学报(自然科学版),1993,22(1):14-19.

[9] 陆宗元. 几类由圈长分布确定的偶图[J]. 上海师范大学学报(自然科学版),1992,21(4):24-28.

[10] 陆宗元. 圈长分布确定的偶图 $K_{n,n}-A_3$ [J]. 上海师范大学学报(自然科学版),1994,23(1):7-14.

Some Theorems of Bipartite Graphs Determined by their Cycle Length Distributions

SHI Yong-bing, LIU Rong-guan

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: The cycle length distribution of a graph of order n is $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, where c_i is the number of cycles of length i. We obtain the following results: (1) Let $A \subseteq E(K_{n,n})$, $n \geqslant j(j+1)/2+1$, and $K_{n,n}[A] \cong K_{1,j}$ or $K_{n,n}[A] \cong jK_2$, then $K_{n,n}-A$ is determined by its cycle length distribution; (2) Let $A \subseteq E(K_{n,n}$, $|A|=4$, and $n \geqslant 11$, then $K_{n,n}-A$ is determined by its cycle length distribution.

Key words: cycle ; cycle length distribution; bipartite graph; bipartite graph determined by its cycle length distribution