正负拉丁方与DINITZ猜想

朱 忠 华

提　要　Dinitz 猜想，$n \times n$ 方格中，每一方格中各有 n 个不同的元素，从每格中可选出一个元素，使各行各列均为相异代表系. Janssen J C M 利用图的定向个数不等已证明了 $r \times n(r < n)$ 时，Dinitz 猜想成立. 这里用代数方法把 Dinitz 猜想的解决与拉丁方联系了起来，并证明了，对于某 n，若所有 n 阶拉丁方中正负个数不一样，则 $n \times n$ Dinitz 猜想成立. 于是当 $n = 4$ 时，Dinitz 猜想解决.

关键词　Dinitz 猜想；拉丁方；List 着色；图多项式
中图法分类号　O157.9

0 引 言

自1978年 Dinitz 提出如下猜想，$n \times n$ 方格中，每一方格中各有 n 个不同的元素，从每格中可选出一个元素，使各行各列的元素均不同. 至今这问题还未被解决，由此却导出了图论界中关于 List 着色的研究[3~5].

文[1][2]中用图多项式来研究 Dinitz 猜想，先给出一些术语：设无向图 $G = (V, E)$，顶点集 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，称多项式 $f_G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\{(x_i, x_j) \mid i < j, (v_i v_j) \in E\}$ 为图多项式.

设 G 为无向图，记顶点集 $V = \{v_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}$，任意两顶点标号如有一下标对应相等，则连成一条边，无其它的边，那么称 G 为 $n \times n$ 矩形图.

一个图 K，每一顶点 v_i 均给与一个色集 s_i，若对每一 v_i 总可找到色 $c_i \in s_i$，能使 K 为正常着色，则称 K 可 List 着色的.

显然，$n \times n$ Dinitz 猜想等价于 $n \times n$ 矩形图的顶点 List 着色. 即设 G 为 $n \times n$ 矩形图，每一顶点 v_{ij} 赋予色集 s_{ij}，$|s_{ij}| = n$，若 G 有顶点 List 着色，则 Dinitz 猜想成立. 如无特殊说明，图 G 指的是 $n \times n$ 矩形图，其顶点集为 $V = \{v_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$，$v_{ij}$ 的色集为 $s_{ij} = \{c_{ij1}, c_{ij2}, \cdots, c_{ijn}\}$，$n \times n$ 矩形图 G 的图多项式为

$$f_G(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}) = \prod\{(x_{ij} - x_{st}) \mid 1 \leqslant i \leqslant s \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant t \leqslant n\},$$

收稿日期：1995-03-15
作者朱忠华，女，上海师范大学数学系研究生，上海，200234

因为域 s_{ij} 上多项式 $Q(x_{ij})=\prod_{k=1}^{n}(x_{ij}-c_{ijk})$ 为零函数，即

$$x_{ij}^{n}=q_{ij}(x_{ij})\text{，其中 }\deg q_{ij}(x_{ij})<n. \qquad (*)$$

所以 $f_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 转化为 $\bar{f}_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$，其中 $\bar{f}_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 中每个变量 x_{ij} 的次数 $<n$.

命题1　Dinitz 猜想成立当且仅当 $\bar{f}_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 为非零多项式.

本文的结论是:(正负拉丁方与 J 的概念见第3部分)

定理1　设 $n\times n$ 矩形图 G，出度矩阵为 J 且不含 C_3 的 G 的定向中，当 $n=4k+3$ 时，G 的奇定向对应一个正拉丁方，偶定向对应一个负拉丁方；当 $n\neq 4k+3$ 时，G 的奇定向对应一个负拉丁方，偶定向对应一个正拉丁方.

推论1　如拉丁方个数为奇数，则 Dinitz 猜想成立.

推论2　当 $n=4$ 时，Dinitz 猜想成立.

为此，先须讨论 f_G，$\bar{f}_G$ 的性质以及与拉丁方的关系.

1　f_G 与 $\bar{f}_G$ 的性质

如果记多项式

$$\begin{aligned}f_{ri}=f_{ri}(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})=\\(x_{i1}-x_{i2})(x_{i1}-x_{i3})(x_{i1}-x_{i4})\cdots(x_{i1}-x_{in})\\(x_{i2}-x_{i3})(x_{i2}-x_{i4})\cdots(x_{i2}-x_{in})\\\cdots\\(x_{i,n-1}-x_{in}).\end{aligned}$$

同理记

$$\begin{aligned}f_{ci}=f_{ci}(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{ni})=\\(x_{1i}-x_{2i})(x_{1i}-x_{3i})(x_{1i}-x_{4i})\cdots(x_{1i}-x_{ni})\\(x_{2i}-x_{3i})(x_{2i}-x_{4i})\cdots(x_{2i}-x_{ni})\\\cdots\\(x_{n-1,i}-x_{ni}).\end{aligned}$$

由 $f_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 的定义，则

$$f_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})=f_{r1}\cdot f_{r2}\cdot\cdots\cdot f_{rn}\cdot f_{c1}\cdot f_{c2}\cdot\cdots\cdot f_{cn}$$

可称 f_{ri} 是矩形图 G 的第 i 行的完全子图多项式，f_{cj} 是矩形图 G 的第 j 列的完全子图多项式. 且显然，f_G 是 $n^2(n-1)$ 次齐次多项式.

根据命题1，如能证到 $\bar{f}_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 中存在非零项，则 Dinitz 猜想成立. 为此，先考查一下 f_G 与 $\bar{f}_G$ 的一些性质与结论.

引理2　$f_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 与 $\bar{f}_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 中，单项式 $A=x_{11}^{n-1}\cdots x_{nn}^{n-1}$ 的系数相同.

证明(反证)　假设 $f_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 中存在另一单项式 $B=x_{11}^{d}\cdots x_{nn}^{d}$，其中 $d_{ij}>n-1$，它通过($*$)式变换后也是 $x_{11}^{n-1}\cdots x_{nn}^{n-1}$. 又因为 $f_G(x_{11},x_{12},\cdots,x_{nn})$ 的展开式中每

一单项式均为 $n^2(n-1)$ 的奇次多项式,而项 $x_{11}^{n-1}\cdots x_{nn}^{n-1}$ 的次数也恰为 $n^2(n-1)$,所以,B 中如果 $d_{ij}>n-1$,则必有指数 $d_{st}<n-1$,那么 $x_{st}^{d_{st}}$ 通过(*)式变换后仍为 $x_{st}^{d_{st}}$ 这与假设矛盾.

Alon 与 Tarsi 两人对于图的多项式作了较多研究,得出 f_G 的各单项式的系数与 G 的定向有密切关系[1]. 简单无向图 K,顶点集为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,给 K 一个定向 D,得定向图 $D(K)$,如果 $(v_i,v_j)\in D(K)$ 且 $i>j$,则称这条定向边 (v_i,v_j) 为逆定向边. 如果逆定向边的总数为奇数,则称定向 D 为奇定向;如逆定向边总数为偶数,则称 D 为偶定向.

K 的一个定向中,如存在顶点 u,v,w,且这3点的定向出现 $u\to v\to w\to u$ 的一个回路,则称这个回路为三角形回路,记为 C_3.

如果顶点 v_i 的出度为 d_i,$(i=1,2,\cdots,n)$,记 DE $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为具为出度序列为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的图的偶定向个数. 记 DO $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为具有出度序列为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的奇定向个数.

引理3[1]

$$f_K(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{d_1,\cdots,d_n}(|\mathrm{DE}(d_1,d_2,\cdots,d_n)|-|\mathrm{DO}(d_1,d_2,\cdots,d_n)|)\prod_{i=1}^{n}x_i^{d_i}.$$

考查矩形图 G 的某一行完全子图的图多项式 $f_r(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,且如果该行中各顶点的出度序列 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为 $0,1,\cdots,n-1$ 的一个排列. 如果 $d_i<d_j$ 且 $i<j$,则称 d_i 与 d_j 为一个顺序,逆序即为通常定义,那么 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的系数可由下面引理得出.

引理4 设 K 为 n 个顶点 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的完全无向图,D 为 K 的一个定向,其出度序列 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为 $0,1,\cdots,n-1$ 的一个排列,则定向 D 中 K 的逆向边的总条数等于 $\pi'(d_1d_2\cdots d_n)$,这里 π' 为排列 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的顺序数,且 $f_K(x_1,\cdots,x_n)$ 的展开式中项 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的系数为 $(-1)^{\pi'(d_1d_2\cdots d_n)}$.

证明 首先可证明:$d_i<d_j\Leftrightarrow$定向边为 (v_j,v_i). 当 $d_j=n-1$ 时,v_j 的 $n-1$ 条弧全为 v_j 的出弧,结论显然成立;归纳假设当 $d_j=n-1,n-2,\cdots,n-k$ 时,结论真;考查当 $d_j=n-k-1$ 时,将图 K 删去出度为 $n-1,n-2,\cdots,n-k$ 的顶点,得到图 G_K. G_K 仍为完全图,但出度序列为 $0,1,\cdots,n-k-1$ 的一个排列,所以 d_j 为最大出度 $n-k-1$,即 v_j 的出弧可到达 G_K 的其余各点,于是证明了 $d_i<d_j\Leftrightarrow$定向弧为 (v_j,v_i).

所以弧 (v_j,v_i) 为 G 的逆定向边$\Leftrightarrow j>i$ 且 $d_i<d_j$,即为数码 d_i,d_j 在排列 $d_1d_2\cdots d_n$ 中产生的一个顺序数,所以,K 的逆向边的总数$=\pi'(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,又因为完全图 K,出度序列为 $0,1,\cdots,n-1$ 的一个排列的定向是唯一的,由引理3,$x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$ 的系数为 $(-1)^{\pi'(d_1d_2\cdots d_n)}$.

2 拉丁方与定向的关系

Alon 和 Tarsi 把 $x_{11}^{d_{11}}\cdots x_{nn}^{d_{nn}}$ 的系数与图 G 的奇偶定向联系起来,又由引理2,如项 $x_{11}^{n-1}\cdots x_{nn}^{n-1}$ 的系数在 f_G 中非零,则该项在 $\bar{f}_G$ 中也非零,于是 Dinitz 猜想成立.

这里讨论一下 $x_{11}^{n-1}\cdots x_{nn}^{n-1}$ 的系数与拉丁方的关系. 先引入一些术语,本文指的 n 阶拉丁方为关于数码 $\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 的拉丁方. 设 R 为拉丁方,记 $\pi(R)$ 为 R 的一切行排列与列排列的逆序数之和,若 $\pi(R)$ 为偶数,则称 R 为正拉丁方,若 $\pi(R)$ 为奇数,则称 R 为负拉丁方.

给 G 定向，令 $d(i)=(d_{i1},d_{i2},\cdots,d_{in})$ 表 G 的第 i 行完全子图的出度序列，把 $d(i)$ 排成 $\begin{pmatrix} d(1)\\ d(2)\\ \cdots\\ d(n)\end{pmatrix}$ 的形式，则矩阵 $\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n}$ 称为图 G 的一个定向的行出度矩阵，记为 $\boldsymbol{R}$. 同样可定义 G 的定向的列出度矩阵，不妨记为 $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n}\qquad \text{记 } \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} n-1 & n-1 & \cdots & n-1\\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1\end{pmatrix}_{n\times n}$$

设 A,B 均为关于 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 的一个拉丁方，如果 $A+B=\boldsymbol{J}$，那么称 B 为 A 的补. 显然 B 也为 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 的拉丁方，故也可称 A 为 B 的补拉丁方.

引理5[2]　设 K 为 n 阶完全图，K 的定向 D 含 C_3 当且仅当 D 有二顶点出度相同.

引理6　不含 C_3 具有出度矩阵为 $\boldsymbol{J}$ 的 G 的定向个数等于 n 阶拉丁方的个数.

证明　设 D 为 G 的一个定向且出度矩阵为 $\boldsymbol{J}$，又 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}$，这里 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 分别为 G 的定向的行与列的出度矩阵. 由引理5，行出度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的同一行中不可能有两元相等，所以，$\boldsymbol{R}$ 的每一行只能为 $0,1,\cdots,n-1$ 的一个排列，而且每二行出度序列中对应元也不相等，否则 G 的该定向的列出度矩阵的某一列会含有两元相等，于是该列在定向 D 中形成一个 C_3，与已知不符，所以，行出度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 组成一个 n 阶拉丁方. 同理，列出度矩阵 $\boldsymbol{C}$ 也是一个 n 阶拉丁方. 又因为 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{J}$，所以，$\boldsymbol{R}$ 确定后，$\boldsymbol{C}$ 也唯一确定. 所以 G 的满足已知条件的一个定向 D 唯一确定了一个拉丁方 $\boldsymbol{R}$.

反之，一个拉丁方 $\boldsymbol{R}$，根据引理4的定向规则，唯一确定了一个满足已知条件的定向. 所以，命题真.

引理7[3]　G 是 $r\times n$ 矩形图，顶点集 $V=\{(i,j):1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant n\}$，则 G 的含 C_3 及出度阵列 $\delta(v)$ 的偶定向数等于 G 的含 C_3 及出度阵列 $\delta(v)$ 的奇定向数.

根据该引理可知道，要考查项 $x_{11}^{n-1}\cdots x_{nn}^{n-1}$ 的系数，只要考查不含 C_3 的定向即可.

引理8　B 为一个 n 阶拉丁方，则 B 的列的逆序数等于 B 的补拉丁方的列的顺序数.

证明　考查 B 的某一列，设为 $a_1a_2\cdots a_n$，则 $\pi(a_1a_2\cdots a_n)=\sum_{i=1}^{n}$（排在 a_i 前比 a_i 大的元素个数），而 B 的补拉丁方中对应的列为 $(n-1-a_1)(n-1-a_2)\cdots(n-1-a_n)$ 且 $\pi'(n-1-a_1,n-1-a_2,\cdots,n-1-a_n)=\sum_{i=1}^{n}$（排在 $n-1-a_i$ 前比 $n-1-a_i$ 小的元素个数），所以，$\pi(a_1a_2\cdots a_n)=\pi'(n-1-a_1,n-1-a_2,\cdots,n-1-a_n)$.

显然，任意交换 n 阶拉丁方的两行（或两列），所得的还是拉丁方，而且可有下面引理：

引理9　设 n 为偶数时，任意交换行（或列），拉丁方的正负性不变；n 为奇数时，任意交换行（或列），拉丁方的正负性相反.

证明　考查行的情况，n 阶拉丁方中，任意两行互换，即

$$\begin{vmatrix} \cdots \\ i_1 i_2 \cdots i_n \\ \cdots \\ j_1 j_2 \cdots j_n \\ \cdots \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \cdots \\ j_1 j_2 \cdots j_n \\ \cdots \\ i_1 i_2 \cdots i_n \\ \cdots \end{vmatrix}$$

行的逆序数不变;考查列的逆序数,因为每列中有两元互换,所以该列奇偶性改变,当 $n=2k$ 时,发生 $2k$ 次奇偶变化,则总的逆序数的奇偶性不变,即拉丁方的正负性不变,而 $n=2k+1$ 时,共发生 $2k+1$ 次列的奇偶变化,则总的逆序数的奇偶性改变,即拉丁方的正负性改变.所以命题真.

引理10 奇阶拉丁方,正负拉丁方个数相等.

证明 设阶数为 $2k+1$,共有 m 个 $2k+1$ 阶拉丁方,其中 a 个正拉丁方,b 个负拉丁方.若对 a 个正拉丁方交换第1,2列,得到 a 个负拉丁方,而且不同的正拉丁方得到不同的负拉丁方,所以,$b \geqslant a$.

同理,对 b 个负拉丁方交换第1,2行,可证得 $a \geqslant b$,所以 $a=b$. 即正负拉丁方个数相等.

3 定理的证明

定理1 设 $n \times n$ 矩形图 G,出度矩阵为 $\boldsymbol{J}$ 且不含 C_3 的 G 的定向中,当 $n=4k+3$ 时,G 的奇定向对应一个正拉丁方,偶定向对应一个负拉丁方;当 $n \neq 4k+3$ 时,G 的奇定向对应一个负拉丁方,偶定向对应一个正拉丁方.

证明 由引理6,对于图 G 的出度矩阵为 $\boldsymbol{J}$ 的任一个不含 C_3 的定向 D 对应了一对拉丁方分解,即 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}$. 根据引理4,$G$ 的第 i 行完全子图中取逆定向的边数$=\pi'(d_{i1}d_{i2}\cdots d_{in})$. G 的第 j 列完全子图取逆定向的边数为 $\pi'(t_{1j}t_{2j}\cdots t_{nj})$. 据引理8,因为 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 互为补拉丁方,所以,

$$\pi(d_{i1}d_{i2}\cdots d_{in}) = \pi'(t_{1j}t_{2j}\cdots t_{nj}).$$

由于

$$f_G(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}) = f_{r1} \cdot f_{r2} \cdot \cdots \cdot f_{rn} \cdot f_{c1} \cdot f_{c2} \cdot \cdots \cdot f_{cn},$$

所以,图 G 的逆定向的总数为

$$\sum_{i=1}^{n} \pi'(d_{i1}d_{i2}\cdots d_{in}) + \sum_{j=1}^{n} \pi(d_{1j}d_{2j}\cdots d_{nj}) =$$

$$n^2(n-1)/2 + \pi(\boldsymbol{J}) - 2\sum_{i=1}^{n} \pi(d_{i1}d_{i2}\cdots d_{in}).$$

由于当 $n=4k+3$ 时,$n^2(n-1)/2$ 为奇数,$n \neq 4k+3n$ 时,$n^2(n-1)/2$ 为偶数,所以当 $n=4k+3$ 时 G 的奇定向对应于一个正拉丁方,偶定向对应于一个负拉丁方;

当 $n \neq 4k+3n$ 时 G 的奇定向对应于一个负拉丁方,偶定向对应于一个正拉丁方.

定理2 对于某个 n,若所有的 n 阶拉丁方中正负个数不一样,则 $n \times n$ Dinitz 猜想成立.

证明 根据定理1,当正负拉丁方个数不等时,由引理3,$\bar{f}_G$ 中单项式 $x_{11}^{n-1} \cdots x_{nn}^{n-1}$ 的系数不等于0,所以 Dinitz 猜想成立.

4　正负拉丁方与 Dinitz 猜想

由定理1，直接可得如下推论：

推论1　如拉丁方个数为奇数(或偶数)，则 Dinitz 猜想成立.

推论2　$n=4$ 时，Dinitz 猜想成立.

证明　$n=4$，总共有如下4个标准拉丁方：

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & + & - & + & - \\
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
- & 1 & 2 & 3 & 0 \\
+ & 2 & 3 & 0 & 1 \\
- & 3 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc|}
 & + & + & - & + \\
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
+ & 1 & 3 & 0 & 2 \\
- & 2 & 0 & 3 & 1 \\
+ & 3 & 2 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc|}
 & + & + & - & - \\
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
+ & 1 & 0 & 3 & 2 \\
- & 2 & 3 & 1 & 0 \\
- & 3 & 2 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc|}
 & + & + & + & + \\
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
+ & 1 & 0 & 3 & 2 \\
+ & 2 & 3 & 0 & 1 \\
+ & 3 & 2 & 1 & 0
\end{array}
$$

上述中“＋”表示该排列中逆序数为偶数，“－”表示该排列中逆序数为奇数，一一验证，这4个标准拉丁方都是正的. 据组合论中结论，所有 n 阶拉丁方都是由标准拉丁方通过换行换列得到的. 又根据引理9，偶数阶拉丁方换行换列后正负性不变，所以，4阶拉丁方都是正的. 由推论1即得命题真.

Dinitz 问题，当 n 为奇数时，由引理10可知，正负拉丁方个数相等，无法用该方法去判定，故 Dinitz 问题还有待于进一步解决. 当 n 为大于4的偶数时，猜想正负拉丁方个数不等，但暂时没能解决，它涉及到拉丁方的构造问题，故 Dinitz 问题还是一个未解决的猜想.

感谢沈明刚教授对本文的指导与帮助.

参 考 文 献

1　Alon N, Tarsi M. Coloring and Orientations of Graphs. Combinatorica, 1992, 12(2): 125～134

2　Janssen J C M. The Dinitz Problem Solved for Rectangles. Math Soc (N.S.), 1993, 29: 243～249

3　Chetwynd A, Häggkvist R. A Note on List colorings. J Graph Theory, 1989, 13: 87～95

4　Bollobas B, Harris A J. List-coloring of graphs. Graph Combinat, 1985(1): 115～127

5.　Bollobas B, Hind H R. A New Upper Bound for the List Chromatic Number. Discrete Mathe, 1989, 74: 65～75

6　魏万迪. 组合论(下册). 北京:科学出版社, 1987

Positive and Negative Latin Squares and Dinitz Conjecture

Zhu Zhonghua
(Department of Mathematics)

Abstract The Dinitz Conjecture states that given an $n \times n$ array of n-sets, it is always possible to choose one element from each set, keeping the chosen elements distinct in every row and distinct in every column. By virtue of the number of orientations of the graph, Jeannette C. M. Jassen proved that the Dinitz Conjecture is true when the array is $r \times n (r < n)$. With the help of Latin Squares, this paper concludes that for any n, if the number of the positive Latin Squares is not equal to the number of the negative Latin Squares, then the $n \times n$ Dinitz Conjecture is true. So the Dinitz Conjecture is true when $n = 4$.

Key words Dinitz Conjecture; Latin square; list-coloring; graph polynomial