第34卷第1期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 34, No. 1
2005年3月 Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences) 2005, Mar.

自由模的素子模及素维数

宋传宁

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘 要： 对自由模的素子模是进行了刻画，给出了自由模的素子模的结构为 $(PF, u_1, u_2, \cdots, u_s)$，且给出了自由模的素维数的计算公式 $D(N) = \dim A + \operatorname{rank} F - 1$.

关键词： 自由模；素子模；维数

中图分类号： O153.3 **文献标识码：** A **文章编号：** 1000-5137(2005)01-0025-04

素理想是交换环论的重要概念，也是经典交换环论研究的中心内容. 对于交换的 Neother 环 A，A 模 M 的许多性质要利用环 A 的素理想来刻画，如 M 的 Krull 维数等. 但近年来，国际上有学者提出了模的素子模的概念，这样数学工作者们就可以利用模本身的内在性质来直接研究模，例如，模的素维数 D(M) 就是直接利用素子模链的长度来定义的. 并且当 A 作为 A 模时，$D(A) = \dim A$，即 A 的素维数等于 A 的 Krull 维数. Agustin Marcelo 在文[1]的定理 3.4 中证明了当 A 是 d-维整环，N 是无绕的有限生成 A-模时，则 $D(N) \geqslant d + \operatorname{rank} N - 1$. 邱懿在文[2]中证明了的 $D(N) \leqslant sd$，这里 s 是 N 的最小生存元个数. 本文主要对自由模的素子模进行了刻画，得到了自由模的素维数的计算公式为 $D(N) = d + \operatorname{rank} N - 1$.

1 基本概念

首先回忆一下素子模的概念. 设 A 是有单位元的交换环，N 是 A 模，称 M 是 N 的素子模如果 M 是 N 的真子模且 $a \in A$，映射

$$h_a: \begin{cases} N/M \to N/M \\ [n] \to h_a([n]) = a[n] \end{cases}$$

是单同态或零同态.

设 M 是 N 的素子模，$P_M = \{a \mid aN \subseteq M\}$，由[1，命题 1.1]知，$P_M$ 是 A 的素理想，称 P_M 为 M 的相关素理想，称 M 为属于 P_M 的素子模. 特别地有 $P_M N \subseteq M$. 称 $D(F) = \max\{n \mid M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n, M_i$ 是 N 的素子模，$i = 0, 1, \cdots, n\}$. 对于素子模链，有如下的：

命题 1.1[1] 如果 $M_1 \subset M_2$ 是 N 的素子模，则 $P_{M1} \subseteq P_{M2}$.

命题 1.2[2] 设 $\dim A = d$，N 是有限生成 A-模，$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_k$ 是 N 的素子模链，且 M_i 都是属于 P 的素子模，即 $P_{M0} = P_{M1} = P_{M2} = \cdots = P_{Mk} = P$，则 $k \leqslant s - 1$，s 是 N 的最小生成元个数.

特别指出，文中的环都是有单位元的 Noether 交换环.

2 自由模 F 的素子模的刻画

这一部分内容主要是对有限自由 A-模 F 的素子模进行刻画，得到素子模的结构定理.

收稿日期： 2004-02-20

作者简介： 宋传宁(1962 -)，女，上海师范大学数理信息学院副教授.

设 A 是环且 $\dim A = d$,F 是有限生成自由 A-模,则 $F = \oplus_1^n Ae_i$,其中 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 F 的一组基.首先有:

命题 2.1 设 P 是 A 的素理想,则 PF 是属于素理想 P 的 F 的最小素子模.

证明 因为 P 是 A 的素理想,所以 $PF \neq F$. $\forall a \in A$,

$$h_a:\begin{cases} F/PF \to F/PF \\ [f] \to a[f] \end{cases},$$

当 $a \in P$ 时,h_a 是零映射;当 $a \notin P$ 时,若 $a[f] = 0$ 则 $af \in PF$. 又因为 $a \notin P$,因此 $f \in PF$ 得 $[f] = 0$,所以 h_a 是单射. 这样得到 PF 是 F 的素子模.

又因为对于 F 的任意一个属于素理想 P 的素子模 M,有 $PF = P_M F$,而 $P_M = \{a \mid aF \subseteq M, a \in A\}$,所以 $PF \subseteq M$,故 PF 是属于素理想 P 的最小素子模.

作为命题 2.1 的推论,很容易得到:

命题 2.2 $M_i = (PF, e_1, e_2, \cdots, e_i)$,$(0 \leqslant i < n)$ 是属于 P 的素子模(这里 $e_1,e_2,\cdots,e_i$ 可以是 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 中的任意 i 个,适当调整秩序总可以取前 i 个元).

证明 这是因为 $F_n/M_i \approx F_{n-i}/PF_{n-i}$,这里 $F_{n-i} = Ae_{i+1} \oplus \cdots \oplus Ae_n$ 是秩为 k 的自由 A-模. 而 PF_{n-i} 是 F_{n-i} 的属于 P 的素子模, 所以 M_i 是 F_n 的属于 P 的素子模.

下面可以对有限自由模的素子模进行刻画,这就是素子模的结构定理:

定理 2.3 A 是环,P 是 A 的素理想,F 是秩为 n 的自由 A-模,$F = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$,$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 F 的一组 A-基. 那么 F 的属于素理想 P 的素子模的形式为 $M_i = (PF, u_1, u_2, \cdots, u_i)$,$(0 \leqslant i < n)$(这里 $u_1,u_2,\cdots,u_i$ 是 A/P 上线性无关的元).

为证明定理 2.3,首先证明如下的:

引理 2.4 设 M 是自由 A-模 F 的属于素理想 P 的素子模,若 $au \in M, a \in A, u \in F$ 且 $a \notin P$,则 $u \in M$.

证明 由于 M 是素子模且 $a \notin P$,所以 $h_a: F/M \to F/M$ 是单射,而 $[u] \to a[u] = 0$,故得 $[u] = 0$. 即 $u \in M$.

引理 2.5 设 P 是环 A 的素理想, $u_1 = k_{11}e_1 + \cdots + k_{1n}e_n$, $u_2 = k_{21}e_1 + \cdots + k_{2n}e_n$, $\cdots$, $u_{s-1} = k_{s-11}e_1 + \cdots + k_{s-1n}e_n$, $u_s' = k_{s1}e_1 + \cdots + k_{sn}e_n$, $k_{ij} \notin P$, $(i = 1,\cdots,s, j = 1, n)$, $u_1,\cdots,u_{s-1}$ 在 A/P 上线性无关,而 $u_1,\cdots,u_{s-1},u_s'$ 为 A/P 上线性相关,那么如果 $(PF, u_1, \cdots, u_{s-1})$ 是属于素理想 P 的素子模,则 $(PF, u_1, \cdots, u_{s-1}) = (PF, u_1, \cdots, u_{s-1}, u_s')$.

证明 由于 $u_1,\cdots,u_{s-1},u_s'$ 在 A/P 上线性相关,存在 $[a_1],[a_2],\cdots,[a_s]$,$[a_s] \neq 0$,使得 $[a_1]u_1 + \cdots + [a_{s-1}]u_{s-1} + [a_s]u_s' = 0$

设 $M_{s-1}' = (PF, u_1, \cdots, u_{s-1})$, M_{s-1}' 是属于素理想 P 的素子模,所以

$$h_{as}:\begin{cases} F/M'_{s-1} \to F/M'_{s-1} \\ [u'_s] \to a_s[u'_s] \end{cases},$$

或为零映射,或为单射,由 $a_s \notin P$,得 $h_{as} \neq 0$,故 h_{as} 是单射,得到 $h_{as}[u_s'] = a_s[u_s'] = [0]$,$u_s' \in M'_{s-1}$,结论成立.

引理 2.6 若 $M_s' = (PF, u_1, u_2, \cdots, u_s)$ 与 $M_s'' = (PF, a_1u_1, a_2u_2, \cdots, a_su_s)$,$a_1,\cdots,a_s \notin P$,都是属于素理想 P 的素子模,则 $M_s' = M_s''$.

证明 首先 $M_s'' \subseteq M_s'$,其次作:

$$h_{ai}:\begin{cases} F/M'' \to F/M'' \\ [u_i] \to a_i[u_i] \end{cases},$$

由于 $a_i \notin P$,则 h_{ai} 是单同态,于是 $[u_i] = 0$,得 $u_i \in M'$,$(i = 1,\cdots,s)$,即 $M_s' \subseteq M_s''$. 故 $M_s'' = M_s'$.

有了引理 2.5,总可以选取 A/P 上线性无关的元作为 M/PF 的生成元,这里 M 是属于素理想 P 的素

子模.

接下来对素子模的结构定理进行证明.

定理2.7　设 P 是 A 的素理想,则 A 作为 A-模, P 是属于素理想 P 的 A 的唯一素子模(定理2.3的特例).

证明　设 I 是 A 的素子模且 $P_I = P$,则 $P = AP_I \subseteq I$,若 $P \not\subset I$, $\exists a \notin P, a \in I$,于是 $aA \not\subset I$ 与 $a \in I$ 矛盾.

定理2.3的证明　由命题2.2知, M_i 是 F 的属于素理想 P 的素子模. 设 M 是 F 的素子模且 $P_M = P$,如果 $M \neq PF$,则由命题2.1知,$PF \subset M$,不妨设 $M = (PF, u_1, u_2, \cdots, u_i)$,由引理2.5知,$u_1, u_2, \cdots, u_i$ 在 M/P 上线性无关.

例2.8　对整数环 Z, p 是素数,(p) 是 Z 的素理想,设 $F = Zx + Zy + Zz$,M 是由 $3x+2y, 3y$ 生成的属于(p)的素子模,$M = ((p)F, 3x+2y, 3y)$,$3 \notin (P)$,$2 \notin (P)$,于是3,2与素数p互素,故 $M = ((P)F, 3x+2y, y) = ((P)F, 3x, y) = ((P)F, x, y)$.

3　自由模的素维数

这一节给出了自由模的素维数的计算公式为 $D(F) = \dim A + rankF - 1$.

首先有:

命题3.1　A 是环且 $\dim A = d$. F 是自由 A-模且 $\mathrm{rank}F = 2$,即 $F = Ae_1 \oplus Ae_2$,则 $D(F) = d+1$.

证明　设 $P_0 \subset P_1 \subset P_3 \subset \cdots \subset P_d$ 为 A 的素理想链,由定理2.3知,属于 $P_0, P_1, \cdots, P_d$ 的素子模分别为:

$$\begin{array}{ccc} P_0F & \subset & (P_0F, e_1) \\ \cap & & \cap \\ P_1F & \subset & (P_1F, e_1) \\ \cap & & \cap \\ \vdots & & \vdots \\ \cap & & \cap \\ P_dF & \subset & (P_dF, e_1) \end{array} \qquad \text{(不妨选取第一个基元)}$$

因此 F 的素子模的长度为 $d+1$(从 P_0F 到(P_dF, e_1)),又由命题1.2知,横向长度小于等于1,故 F 的素子模的长度 $\leq d+1$,得 $D(F) = d+1$.

定理3.2　设 A 为环,F 为 A 上的有限自由模,则 $D(F) = \dim A + \mathrm{rank}F - 1$.

证明　不妨设 $\dim A = d$, $\mathrm{rank}\ F = n$, 对 A 的任一素理想链 $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_d$,由定理2.3知,有属于素理想 P_i $(i = 0, 1, \cdots, d)$ 的素子模链为如下的:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_0F & \subset & (P_0F, e_1) & \subset & (P_0F, e_1, e_2) & \subset \cdots \subset & (P_0F, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}) \\ \cap & & \cap & & \cap & \cdots & \cap \\ P_1F & \subset & (P_1F, e_1) & \subset & (P_1F, e_1, e_2) & \subset \cdots \subset & (P_1F, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}) \\ \cap & & \cap & & \cap & \cdots & \cap \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cap & & \cap & & \cap & \cdots & \cap \\ P_dF & \subset & (P_dF, e_1) & \subset & (P_dF, e_1, e_2) & \subset \cdots \subset & (P_dF, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}) \end{array}$$

同样,由命题1.2知,每个横向长度小于等于 $\mathrm{rank}(F) - 1$,故 F 的素子模的链长 $\leq \dim A + \mathrm{rank}(F) - 1$. 又因为确实存在长为 $\dim A + \mathrm{rank}(F) - 1$ 的链,所以 $D(F) = d + n - 1 = \dim A + \mathrm{rank}\ F - 1$.

下面自然会考虑到这样一个问题,如果 A 为环,A-模 N 的素维数为 $D(N) = \dim A + \mathrm{rank}\ N - 1$,那么 N 是自由 A-模吗?对 A 为有零因子时,答案是否定的,这就是下面的:

例题3.3 环为 Z_6,$N=\{0,3\}$ 是 Z_6-模,当然不是自由 Z_6-模. 但是确实有 $D(N)=\dim Z_6+\operatorname{rank} N-1$. 这是因为 $\dim Z_6=0$,$\operatorname{rank} N=1$,而(0) 是 N 的唯一素子模,故 $D(N)=0$,这样得 $0=D(N)=0+1-1=\dim Z_6+\operatorname{rank} N-1$.

参考文献:

[1] AGUSTIN MARCELO, MUNOZ MASQUE J. Prime submodules, the descent Invariant, and modules of finite length[J]. J Algebra, 1997, 189: 273-293.

[2] QOU YI. Prime Submodule[J]. Mathematica,2002,23:642-648.

[3] MATSUMURA H. Commutative algebra[M]. Benjamin,1980.

[4] STANLEY R. Enumerative combinatorics[M]. Wadsworth Inc, Berlmont, California,1986.

Prime submodules of free modules

SONG Chuan-ning

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: The structure of prime submodules of free modules is depicted and a calculable formula about prime dimensions of free modules is given.

Key words: free module; prime submodules; dimension