图的圈长分布和圈长分布唯一的图

李 炜 邹辉文
(数学系)

提 要 阶为 n 的图 G 的圈长分布是指序列 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，其中 c_i 是 G 中长为 i 的圈数．若不存在 G' $(G'\ncong G)$，使 G' 与 G 有相同的圈长分布，则称图 G 是圈长分布唯一图．本文确定了 $K_n-A(|A|=j,n\geqslant|A|+3)$ 的最小、最大的 4 圈和 5 圈数．证明了当 $n\geqslant 9$ 时，$K_n-A(|A|=4)$ 以及当 $n\geqslant 14$ 时，$K_n-A(|A|=5)$ 都是圈长分布唯一图．

关键词 图；圈长分布；圈长分布唯一图
中图法分类号 O157.5

0 引 言

阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，其中 c_i 是 G 中长为 i 的圈的数目．圈长分布的概念是由施永兵在文[1]中提出．若 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是图 G 的圈长分布，且不存在 G' $(G'\ncong G)$，使 G' 与 G 有相同的圈长分布，则称图 G 是圈长分布唯一图．本文总假定 $A\subseteq E(K_n)$. 本文证明了 $K_n-A(|A|=5,n\geqslant 11)$ 和 $K_n-A(|A|=4,n\geqslant 7)$ 都是圈长分布唯一图．

1 K_n-A 的圈长分布计算公式

文[2]给出了计算 $G=K_n-A(|A|=j)$ 的圈长分布的一般公式如下：

设 $S\subseteq A$，用 ω 表示 $K_n[S]$ 的连通分支数，对 $i=3,4,\cdots,n$，用 $\mu_i(S)$ 表示 K_n 中经过 S 中所有边的长为 i 的圈的数目，则

$$\mu_i(S)=\begin{cases}0, \text{当 } K_n[S] \text{ 的最大度 } \Delta\geqslant 3 \text{ 或含有长为 } l<i \text{ 的圈}\\ 1, \text{当 } K_n[S] \text{ 是长为 } i \text{ 的圈}\\ 2^{\omega-1}\cdot\binom{n-k-\omega}{i-k-\omega}\cdot(i-k-1)!\ \text{其它}\end{cases}$$

于是图 G 的圈长分布 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 满足 $c_1=c_2=0$ 和 $c_i=\sum\limits_{k=0}^{i}(-1)^k\sum_{S\subseteq A,|S|=k}\mu_i(S)$，对 $i=3,4,\cdots,n$．

将上述 K_n-A 的圈长分布计算公式改写为下述更易于计算的形式：

设图 G 的圈长分布为 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，则 $c_1=c_2=0$，

收稿日期：1994-12-02

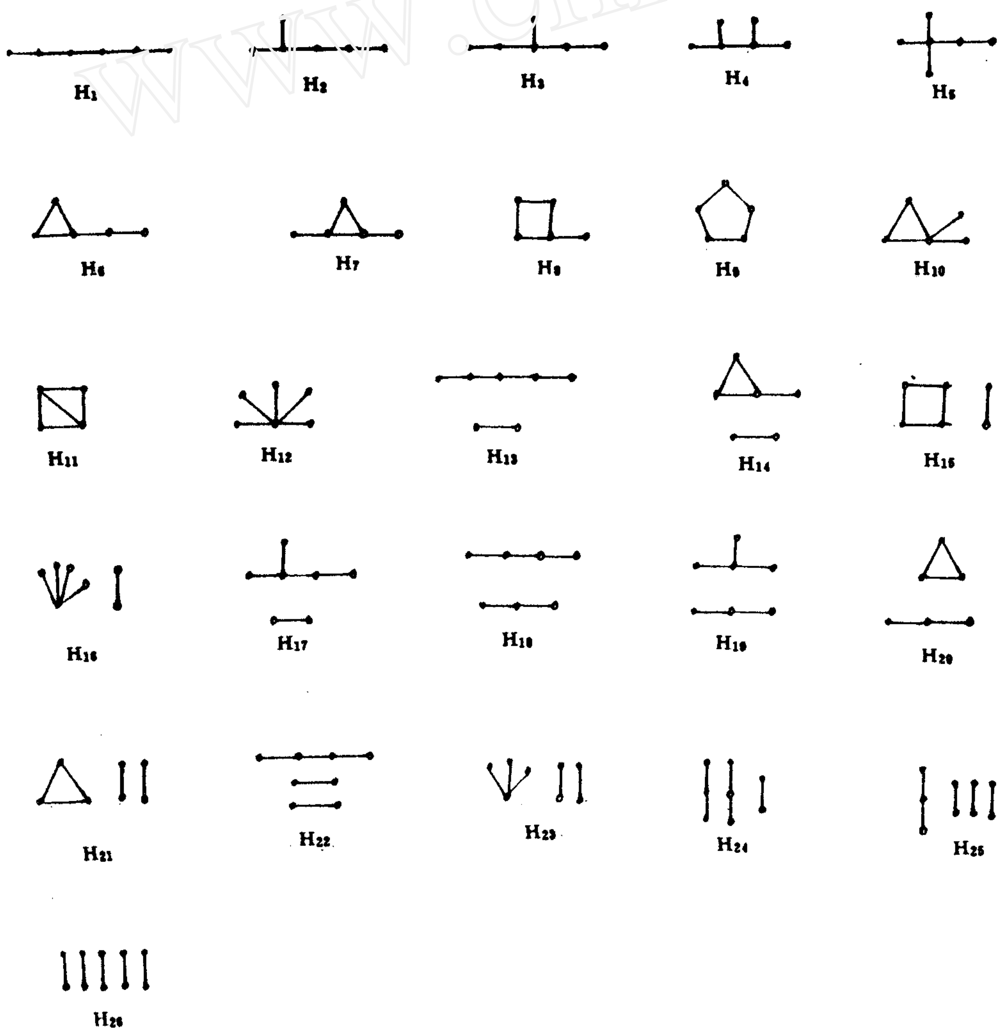
© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$c_i = (-1)^i c_i(H) + \sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k \cdot \sum_{\omega=0}^{k} \cdot 2^{\omega-1} \cdot m(k,\omega) \cdot \binom{n-k-\omega}{i-k-\omega} \cdot (i-k-1)!$$

$$i = 3,4,\cdots,n \qquad (*)$$

其中 $M(k,\omega)$ 是 H 中 k 条边的 ω 条点不相交的路组成的子图数，(约定 $m(0,0)=1$)，$H = K_n[A]$，$c_i(H)$ 表示 H 中长为 i 的圈的数目．

作为 $(*)$ 的应用，容易计算 $K_n - A(|A|=5)$ 的圈长分布，对 $|A|=5$ 易知 $K_n[A]$ 恰有图 1 所示的 26 种图形，将这些图形记为 $H_1, H_2, \cdots, H_{26}$．



2　$K_n - A(|A|=j)$ 的最小最大 4 圈与 5 圈数

设 $X_j = \{G \mid G = K_n - A, |A| = j, A \subseteq E(K_n)\}$. 用 $c_i(G)$ 表示图 G 的 i 圈数，令 $m_j^{(i)} = \min_{G \in X_j} c_i(G)$，$M_j^{(i)} = \max_{G \in X_j} c_i(G)$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

命题 2.1 $m_j^{(4)} = 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + 2\binom{j}{2}, n \geqslant 8$

$$M_j^{(4)} = 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + (n-3)\binom{j}{2}$$

证明 任取 $G \in X_j$，则 $G = K_n - A$，$|A| = j$．设 $S \subseteq A$．显然，当 $|S| = 1$ 时，$\mu_4(S) = 2\binom{n-2}{2}$；当 $|S| = 2$ 时，$\mu_4(S) = \begin{cases} n-3, K_n[S] \cong K_{1,2}, \\ 2, K_n[S] \cong 2K_2; \end{cases}$ 当 $|S| = 3$ 时，$\mu_4(S) \leqslant 1$ 且等式成立当且仅当 $K_n[S]$ 为长为 3 的路；当 $|S| = 4$ 时，$\mu_4(S) \leqslant 1$ 且等式成立当且仅当 $K_n[S]$ 为 4 圈；当 $|S| \geqslant 5$ 时，$\mu_4(S) = 0$．设 $a_{4k} = \sum_{S \subseteq A, |S| = k} \mu_4(S)$，则容易算出

$$a_{41} = 2j\binom{n-2}{2}, 2\binom{j}{2} \leqslant a_{42} \leqslant (n-3)\binom{j}{2}, 0 \leqslant a_{43} \leqslant \binom{j}{3}, 0 \leqslant a_{44} \leqslant \binom{j}{4}, a_{45} = a_{46} = \cdots = a_{4j} = 0.$$

若 $a_{44} \neq 0$，$K_n[A]$ 中存在 4 圈．由于 $K_n[A]$ 中每个 4 圈恰好包含 4 条不同的长为 3 的路，设 $K_n[A]$ 中有 r 个不同的 4 圈，则 $K_{n[A]}$ 中至少有 $4r$ 条不同的长为 3 的路，从而 $a_{43} - a_{44} \geqslant 4r - r = 3r > 0$．若 $a_{44} = 0$ 则 $a_{43} - a_{44} \geqslant 0$．总之 $a_{43} - a_{44} \geqslant 0$ 恒成立．因此

$$c_4(G) = 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + a_{42} - a_{43} + a_{44} \leqslant 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + a_{42}$$
$$\leqslant 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + (n-3)\binom{j}{2}.$$

由 G 的任意性，有

$$M_j^{(4)} \leqslant 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + (n-3)\binom{j}{2}$$

又由于存在图 $G^* \in X_j$，使 $G^* = K_n - A^*$，$K_n[A^*] = K_{1,j}$ 且

$$c_4(G^*) = 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + (n-3)\binom{j}{2} \leqslant M_j^{(4)},$$

因此

$$M_j^{(4)} = 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + (n-3)\binom{j}{2}$$

又

$$c_4(G) = 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + a_{42} - a_{43} + a_{44} \geqslant 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + a_{42} - a_{43}.$$

若 $a_{43} = 0$，则

$$c_4(G) \geqslant 3\binom{n}{4} - 2j\binom{n-2}{2} + 2\binom{j}{2}.$$

若 $a_{43} \neq 0$．设 $K_n(A)$ 中有 r 条不同的 2 路．对固定的一条 2 路最多有 $j-2$ 条 3 路包含这条 2 路，故 $K_n(A)$ 中有 3 路数 $t \leqslant (j-2)r$．考虑到这些 3 路中某些被重复计算，是因为每条 3 路被 2 条不同的 2 路共用．因此 $K_n(A)$ 中不同的 3 路数 $t_1 \leqslant \frac{(j-2)r}{2}$，从而 $r \geqslant \frac{2}{j-2}t_1$，由此推出，

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$a_{42}-a_{43}\geqslant 2\binom{j}{2}-2r+(n-3)r-t_1=2\binom{j}{2}+(n-5)r-t_1$$

$$\geqslant 2\binom{j}{2}+(n-5)\cdot\frac{2}{j-2}t_1-t_1>2\binom{j}{2}+(n-5)\cdot\frac{2}{n-2}t_1-t_1$$

$$=2\binom{j}{2}+\frac{n-8}{n-2}\cdot t_1\geqslant 2\binom{j}{2}\qquad(n\geqslant 8)$$

所以

$$c_4(G)\geqslant 3\binom{n}{4}-2j\binom{n-2}{2}+2\binom{j}{2}$$

由 G 的任意性，有

$$m_j^{(4)}\geqslant 3\binom{n}{4}-2j\binom{n-2}{2}+2\binom{j}{2}$$

又由于存在图 $G^*\in X_j$，使 $G^*=K_n-A^*$，$K_n[A^*]=jK_2$ 且

$$c_4(G^*)=3\binom{n}{4}-2j\binom{n-2}{2}+2\binom{j}{2}\geqslant m_j^{(4)}$$

所以

$$m_j^{(4)}=3\binom{n}{4}-2j\binom{n-2}{2}+2\binom{j}{2}$$ □

命题 2.2　$m_j^{(5)}=12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+(4n-16)\binom{j}{2}, n\geqslant 13$

$$M_j^{(5)}=12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}, n\geqslant 5$$

证明　任取 $G\in X_j$，则 $G=K_n-A$　$|A|=j$. 设 $S\subseteq A$.

设 $|S|=1$ 时，$\mu_5(S)=6\binom{n-2}{3}$；当 $|S|=2$ 时，$\mu_5(S)=2\binom{n-3}{2}$ 或 $4n-16$，$\mu_5(S)=2\binom{n-3}{2}$ 当且仅当 $K_n[S]$ 是长为 2 的路，$\mu_5(S)=4n-16$ 当且仅当 $K_n[S]$ 为对集，当 $|S|=3$，$\mu_5(S)=n-4$ 或 2 或 0，$\mu_5(S)=n-4$ 当且仅当 $K_n[S]$ 是长为 3 的路，$\mu_5(S)=2$ 当且仅当 $K_n[S]$ 为 $K_2\cup K_{1,2}$，当 $|S|=4$，$\mu_5(S)\leqslant 1$ 等式成立当且仅当 $K_n[S]$ 是长为 4 的路，当 $|S|=5$，$\mu_5(S)\leqslant 1$ 等式成立当且仅当 $K_n[S]$ 是长为 4 的路，当 $|S|=5$，$\mu_5(S)\leqslant 1$ 等式成立当且仅当 $K_n[S]$ 为 5 圈，当 $|S|\geqslant 6$，$\mu_5(S)=0$.

易算出 $a_{51}=b_j\binom{n-2}{3}$，$2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}\geqslant a_{52}\geqslant(4n-16)\binom{j}{2}$，$(n-4)\binom{j}{3}\geqslant a_{53}\geqslant 0$，$0\leqslant a_{54}\leqslant\binom{j}{4}$，$0\leqslant a_{55}\leqslant\binom{j}{5}$，$a_{56}=a_{57}=\cdots=a_{5j}=0$.

若 $a_{55}\neq 0$　$K_n[A]$ 中存在 5 圈，由于 $K_n[A]$ 中每个 5 圈恰好包含 5 条不同的长为 4 的路．设 $K_n[A]$ 中有 r 个不同的 5 圈，则 $K_n[A]$ 中至少有 $5r$ 条不同的长为 4 的路，因此 $a_{54}-a_{55}\geqslant 5r-r=4r>0$，若 $a_{55}=0$ 显然 $a_{54}-a_{55}\geqslant 0$. 因此 $a_{54}-a_{55}\geqslant 0$ 恒成立．

$$c_5(G)=12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+a_{52}-a_{53}+a_{54}-a_{55}\geqslant 12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+a_{52}-a_{53}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(1) 若 $a_{53}=0$

$$c_5(G)\geqslant 12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+(4n-16)\binom{j}{2}$$

(2) 若 $a_{53}\neq 0$ 设 $K_n[A]$ 中有 r 条长为 2 的路，l_1 条长为 3 的路和 l_2 个不同的子图 $K_2\cup K_{1,2}$，则由命题 2.1 的证明，得 $r\geqslant\frac{2l_1}{j-2}(j=|A|)$

$l_1\leqslant\frac{(j-2)r}{2}, l_2\leqslant(j-2)r$.

于是

$$\begin{aligned}a_{52}-a_{53}&\geqslant(4n-16)\binom{j}{2}+\left[2\binom{n-3}{2}-(4n-16)\right]r-(n-4)l_1-2(l_2-2)\\&\geqslant(4n-16)\binom{j}{2}+\left[2\binom{n-3}{2}-(4n-16)\right]r-\frac{(j-2)(n-4)r}{2}-2(j-2)r\\&\geqslant(4n-16)\binom{j}{2}+\left[2\binom{n-3}{2}-(4n-16)\right]r-\frac{n(n-5)}{2}r\quad(j\leqslant n-3)\\&>(4n-16)\binom{j}{2}\qquad(n\geqslant 13)\end{aligned}$$

所以

$$a_{52}-a_{53}\geqslant(4n-16)\binom{j}{2}$$

因此

$$c_5(G)\geqslant 12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+(4n-16)\binom{j}{2}.$$

由 G 的任意性有

$$m_j^{(5)}\geqslant 12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+(4n-16)\binom{j}{2}.$$

又由于存在图 $G^*\in X_j$，使 $G^*=K_n-A^*$ $K_n[A^*]=jK_2$ 且

$$c_5(G^*)=12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+(4n-16)\binom{j}{2}\geqslant m_j^{(5)},$$

因此

$$m_j^{(5)}=12\binom{j}{5}-6j\binom{n-2}{3}+(4n-16)\binom{j}{2}.$$

又

$$c_5(G)=12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+a_{52}-a_{53}+a_{54}-a_{55}\leqslant 12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+a_{52}+a_{54}$$

(1) 若 $a_{54}=0$ 显然

$$c_5(G)\leqslant 12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}$$

(2) 若 $a_{54}\neq 0$ $|A|=j$. 设 $K_n[A]$ 中有 r 条长为 2 的路，$\binom{j}{2}-r$ 个 $2\cdot K_2$，l_1 条长为 3 的路，l_2

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

个 $K_2\cup K_{1,2}$，t_3 条长为 4 的路，则 $t_1\leqslant\frac{(j-2)r}{2}$，$t_2\leqslant(j-2)r$，$t_3\leqslant\frac{(j-3)(j-2)}{4}r$，所以

$$a_{52}-a_{53}+a_{54}\leqslant 2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}+[(4n-16)-2\binom{n-3}{2}][\binom{j}{2}-r]-(n-4)t_1-2t_2+t_3$$

$$\leqslant 2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}+\frac{1}{2}(n-3)(n-4)^2(7-n)+\frac{r}{4}(3n^2-45n+142)$$

$$\leqslant 2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}+\frac{1}{2}(n-3)(n-4)^2(7-n)+\frac{(n-3)(n-4)}{8}(3n^2-45n+142)$$

$$\leqslant 2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}\qquad (n\geqslant 5)$$

因此

$$c_5(G)\leqslant 12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}$$

由 G 的任意性，有

$$M_j^{(5)}\geqslant 12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2},$$

又由于存在图 $G^*\in X_j$，使 $G^*=K_n-A^*$　$K_n[A^*]=K_{1,j}$ 且

$$c_5(G^*)=12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}\leqslant M_j^{(5)},$$

故

$$M_j^{(5)}=12\binom{n}{5}-6j\binom{n-2}{3}+2\binom{n-3}{2}\binom{j}{2}\qquad\square$$

由命题 2.1 和 2.2 可得：

令 $f(x)=(x-2)(x-3)-(x-3)\binom{j}{2}$，则

$$m_{j-1}^{(5)}-M_j^{(5)}=(n-4)[f(n)+4\binom{j-1}{2}],(n\geqslant 13);$$

$$m_{j-1}^{(4)}-M_j^{(4)}=f(n)+2\binom{j-1}{2},(n\geqslant 8).$$

命题 2.3　(1) 若存在实数 $k_0\geqslant\max\{\frac{1}{2}[5+\binom{j}{2}],8\}$，使 $f(k_0)+2\binom{j-1}{2}>0$，则对一切自然数 $n\geqslant k_0$，$m_{j-1}^{(4)}>M_j^{(4)}$.

(2) 若存在实数 $k_0\geqslant\max\{\frac{1}{2}[5+\binom{j}{2}],13\}$，使 $f(k_0)+4\binom{j-1}{2}>0$，则对一切自然数 $n\geqslant k_0$，$m_{j-1}^{(5)}>M_j^{(5)}$

证明　$f(x)=(x-2)(x-3)-(x-3)\binom{j}{2}$，$f'(x)=2x-[5+\binom{j}{2}]$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_0=\frac{1}{2}[5+\binom{j}{2}]$. 显然，当 $x>x_0$，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上严格单调增加.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由假设(1),(2)知:$K_0 \geqslant x_0$,故当 $n \geqslant k_0$ 时,由 $f(x)$ 的单调增加性,得:$f(n) \geqslant f(k_0)$. 于是可得:

(1) 当 $n \geqslant k_0 \geqslant 8$ 时,$m_{j-1}^{(4)} - M_j^{(4)} = f(n) + 2\binom{j-1}{2} \geqslant f(k_0) + 2\binom{j-1}{2} > 0$

(2) 当 $n \geqslant k_0 \geqslant 13$ 时,$m_{j-1}^{(5)} - M_j^{(5)} = (n-4)[f(n) + 4\binom{j-1}{2}] \geqslant (n-4)[f(k_0) + 4\binom{j-1}{2}] > 0$

□

定理 2.1 设 $G_1 \in X_{j-1}, G_2 \in X_l (l \geqslant j)$. 若存在实数 $k_0 \geqslant \max\{\frac{1}{2}[5+\binom{j}{2}], 8\}$,使 $f(k_0) + 2\binom{j-1}{2} > 0$;或存在实数 $k_0 \geqslant \max\{\frac{1}{2}[5+\binom{j}{2}], 13\}$,使 $f(k_0) + 4\binom{j-1}{2} > 0$,则对一切自然数 $n \geqslant k_0$,G_1 和 G_2 具有不同的圈长分布.

证明 由于 $l \geqslant j$,显然存在图 $G \in X_j$,使 $G_2 \subseteq G$,从而有 $M_j^{(4)} \geqslant c_4(G) \geqslant c_4(G_2)$ 或 $M_j^{(5)} \geqslant c_5(G) \geqslant c_5(G_2)$.

据命题 2.3,得 $c_4(G_1) \geqslant m_{j-1}^{(4)} > M_j^{(4)} \geqslant c_4(G_2)$ 或 $c_5(G_1) \geqslant m_{j-1}^{(5)} > M_j^{(5)} \geqslant c_5(G_2)$. 因此 G_1 和 G_2 具有不同的圈长分布. □

3 几类由圈长分布确定的图

定理 3.1 设 $n \geqslant 9$, $G \in \{K_n - A \mid |A| = 4\}$,则 G 是圈长分布唯一图.

证明 (1) 图 G 在 $K_n[A]$ 的不同情形下具有互不相同的圈长分布.

文[2]指出,$K_n[A]$ 共有 11 种不同的情形 H_i', $i = 1,2,\cdots,11$. 且已将图 G 在 11 种情形中的 4 圈数算出:

$c_4^{(1)'} = \lambda' + 4n - 11$, $c_4^{(2)'} = \lambda' + 5n - 15$, $c_4^{(3)'} = \lambda' + 3n - 3$, $c_4^{(4)'} = \lambda' + 3n - 5$,

$c_4^{(5)'} = \lambda' + 4n - 10$, $c_4^{(6)'} = \lambda' + 6n - 18$, $c_4^{(7)'} = \lambda' + 2n + 1$, $c_4^{(8)'} = \lambda' + 3n - 3$,

$c_4^{(9)'} = \lambda' + 2n + 2$, $c_4^{(10)'} = \lambda' + n + 7$, $c_4^{(11)'} = \lambda' + 12$.

其中 $\lambda' = 3\binom{n}{4} - 8\binom{n-2}{2}$.

易知当 $n \geqslant 9$ 时,

$$c_4^{(11)'} < c_4^{(10)'} < c_4^{(7)'} < c_4^{(9)'} < c_4^{(4)'} < c_4^{(3)'} = c_4^{(8)'} < c_4^{(1)'} < c_4^{(5)'} < c_4^{(2)'} < c_4^{(6)'}, \qquad (\mathrm{I})$$

据文[2]提供的公式,易算出:

$$c_3^{(3)'} = \binom{n}{3} - 4\binom{n-2}{1} + 2 < \binom{n}{3} - 4\binom{n-2}{1} + 3 = c_3^{(8)'}$$

所以图 G 在 11 种情形下具有互不相同的圈长分布.

(2) G 不是 K_n; $K_n - e$; $K_n - A$; $|A| = 2$; 或 K_{n-A}, $|A| = 3$.

根据文[3]中的定理 P,Q 和定理 1.2,即知.

(3) 任取 $G' \in \{K_n - A \mid |A| \geqslant 5\}$, G' 与 G 具有不同的圈长分布.

(i) 当 $n \geqslant 11$ 时. 由于 $j = 5$, $f(x) = (x-2)(x-3) - 10(x-3) = (x-3)(x-12)$,

$\binom{j-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$.

$\frac{1}{2}[5 + \binom{j}{2}] = \frac{15}{2} < 8$,取 $k_0 = 11 > 8$.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$f(k_0)+2\binom{j-1}{2}=f(11)+12=-8+12=4>0.$$

由定理2.1即知,G′与G具有不同的圈长分布.

(ii) 当 $n=9,10$ 时.

先证 $\forall G'\in\{K_n-A\mid |A|\geqslant 6\}$,G′与G具有不同的圈长分布.

事实上:存在 $G''\in\{K_n-A\mid |A|=6\}$,使 $G'\subseteq G''$. 于是 $M_6^{(4)}\geqslant c_4(G'')\geqslant c_4(G')$.

据命题2.2知:当 $n=9,10$ 时,

$$m_4^{(4)}=3\binom{n}{4}-8\binom{n-2}{2}+12,$$

$$M_6^{(4)}=3\binom{n}{4}-12\binom{n-2}{2}+15(n-3)$$

$$m_4^{(4)}-M_6^{(4)}=4\binom{n-2}{2}+12-15(n-3)=(n-3)[2(n-2)-15]+12>0$$

所以

$$c_4(G)\geqslant m_4^{(4)}>M_6^{(4)}\geqslant c_4(G').$$

即G′与G具有不同的圈长分布.

再证 $\forall G'\in\{K_n-A\mid |A|=5\}$,G′与G具有不同的圈长分布.

应用公式(*),容易算出图G′在 $K_n[A]$ 的26种情形中的4圈数.

$$\begin{aligned}
&c_4^{(1)}=\lambda+4n-3, && c_4^{(2)}=\lambda+5n-8, && c_4^{(3)}=\lambda+5n-9, && c_4^{(4)}=\lambda+6n-14,\\
&c_4^{(5)}=\lambda+7n-18, && c_4^{(6)}=\lambda+6n-14, && c_4^{(7)}=\lambda+7n-20, && c_4^{(8)}=\lambda+6n-15,\\
&c_4^{(9)}=\lambda+5n-10, && c_4^{(10)}=\lambda+8n-24, && c_4^{(11)}=\lambda+8n-25, && c_4^{(12)}=\lambda+10n-30,\\
&c_4^{(13)}=\lambda+3n+3, && c_4^{(14)}=\lambda+5n-7, && c_4^{(15)}=\lambda+4n-3, && c_4^{(16)}=\lambda+6n-10,\\
&c_4^{(17)}=\lambda+4n-2, && c_4^{(18)}=\lambda+3n+4, && c_4^{(19)}=\lambda+4n, && c_4^{(20)}=\lambda+4n,\\
&c_4^{(21)}=\lambda+3n+5, && c_4^{(22)}=\lambda+2n+9, && c_4^{(23)}=\lambda+3n+5, && c_4^{(24)}=\lambda+2n+10,\\
&c_4^{(25)}=\lambda+n+15, && c_4^{(26)}=\lambda+20. &&&&
\end{aligned}\tag{Ⅱ}$$

其中 $\lambda=3\binom{n}{4}-10\binom{n-2}{2}$.

由命题2.1

$$M_5^{(4)}=\max_{1\leqslant i\leqslant 26}\{c_4^{(i)}\}=c_4^{(12)}=\lambda+10n-30$$

经过简单排序可得:

$$M=\max_{i\in\{1,\cdots,26\}-\{12\}}\{c_4^{(i)}\}=c_4^{(10)}=\lambda+8n-24$$

当 $n=9,10$ 时

$$c_4^{(7)'}-M_5^{(4)}=3\binom{n}{4}-8\binom{n-2}{2}+2n+1-\left[3\binom{n}{4}-10\binom{n-2}{2}+10n-30\right]$$

$$=2\binom{n-2}{2}-8n+31=(n-6)(n-7)-5>0$$

由(Ⅰ)式可得:

$$c_4^{(i)'}-M_5^{(4)}\geqslant c_4^{(7)'}-M_5^{(4)}>0,i\in\{1,2,\cdots,9\}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

从而

$$c_4^{(i)'} - c_4^{(j)} > 0, i \in \{1,2,\cdots,9\}, j \in \{1,2,\cdots,26\}.$$

又

$$c_4^{(11)'} - M = 3\binom{n}{4} - 8\binom{n-2}{2} + 12 - \left[3\binom{n}{4} - 10\binom{n-2}{2} + 8n - 24\right]$$
$$= 2\binom{n-2}{2} - 8n + 36 = (n-6)(n-7) > 0,$$

且 $c_4^{(10)'} > c_4^{(11)'}$．所以

$$c_4^{(i)'} - c_4^{(j)} > 0, i = 10,11, j \in \{1,2,\cdots,26\} - \{12\}.$$

又

$$c_4^{(10)'} - c_4^{(12)} = 2\binom{n-2}{2} - 9n + 37 = (n-7)^2 - 6\begin{cases} < 0, n = 9 \\ > 0, n = 10 \end{cases}$$

$$c_4^{(11)'} - c_4^{(12)} = 2\binom{n-2}{2} - 10n + 42 = (n-7)(n-8) - 8 < 0$$

总之，

$$c_4^{(i)'} \neq c_4^{(j)}, i \in \{1,2,\cdots,11\}, j \in \{1,2,\cdots,26\}, n = 9,10.$$

由(i),(ii)即知(3)成立．

综合(1)～(3)，定理得证． □

定理 3.2 设 $G \in \{K_n - A \mid |A| = 5\}$，$n \geqslant 14$ 同，则 G 是圈长分布唯一图．

证明 (1) 图 G 在 $K_n[A]$ 的 26 种情形中具有不同的圈长分布．

由前述的(Ⅱ)式，易知当 $n \geqslant 14$ 时，

$$c_4^{(26)} < c_4^{(25)} < c_4^{(22)} < c_4^{(24)} < c_4^{(13)} < c_4^{(18)} < c_4^{(21)} = c_4^{(23)} < c_4^{(1)} = c_4^{(15)}$$
$$< c_4^{(17)} < c_4^{(19)} = c_4^{(20)} < c_4^{(9)} < c_4^{(3)} < c_4^{(2)} < c_4^{(14)} < c_4^{(8)} < c_4^{(4)}$$
$$= c_4^{(6)} < c_4^{(16)} < c_4^{(7)} < c_4^{(5)} < c_4^{(11)} < c_4^{(10)} < c_4^{(12)}.$$

又据公式(＊)，可以算出：

$$c_3^{(21)} = \binom{n}{3} - 5n + 12, \quad c_3^{(23)} = \binom{n}{3} - 5n + 13, \quad \therefore \quad c_3^{(21)} < c_3^{(23)}.$$

$$c_3^{(19)} = \binom{n}{3} - 5n + 14, \quad c_3^{(20)} = \binom{n}{3} - 5n + 13, \quad \therefore \quad c_3^{(20)} < c_3^{(19)}.$$

$$c_3^{(4)} = \binom{n}{3} - 5n + 16, \quad c_3^{(6)} = \binom{n}{3} - 5n + 15, \quad \therefore \quad c_3^{(6)} < c_3^{(4)}.$$

$$c_5^{(1)} = 12\binom{n}{5} - 30\binom{n-2}{3} + 8\binom{n-3}{2} + 21\binom{n-4}{1} - 10,$$

$$c_5^{(15)} = 12\binom{n}{5} - 30\binom{n-2}{3} + 8\binom{n-3}{2} + 20\binom{n-4}{1} - 8, \qquad \therefore \quad c_5^{(15)} < c_5^{(1)}$$

综上即知(1)成立．

(2) G 不是 $K_n - A$．$|A| = 0,1,2,3,4$．

根据文[3]中定理 P,Q 和定理 1,2 及本文的定量 3.1 即知．

(3) $\forall\, G' \in \{K_n - A \mid |A| \geqslant 6\}$，$G'$ 与 G 具有不同的圈长分布．

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由于 $j=6,\binom{j}{2}=15,\binom{j-1}{2}=10,f(x)=(x-2)(x-3)-15(x-3),\frac{1}{2}[5+\binom{j}{2}]=10<13$. 取 $k_0=14>13=\max\{\frac{1}{2}[5+\binom{j}{2}],13\}$;

$$f(k_0)=4\binom{j-1}{2}=f(14)+40=-33+40=7>0,$$

由定理2.1即知,G'与G是具有不同的圈长分布.

综合(1)～(3),定理得证. □

本文的写作是在导师施永兵教授的热心指导和帮助下完成的. 特此向施永兵教授表示衷心感谢.

参 考 文 献

1 施永兵. Some Problem of Cycle Length Distribution. 南京大学学报(图论专辑),1991,27:233～234

2 吴承勋,施永兵. 由圈长分布确定的图. 上海师范大学学报(自然科学版),1992,12:15～20

3 徐岳灿,施永兵. 一类由圈长分布确定的图. 上海师范大学学报(自然科学版),1994,23(2):110

The Cycle Length Distribution of a Graph and Unique Cycle Length Distribution Graphs

Li Wei　　Zhou HuiWen

(Department of Mathematics)

Abstract The cycle length distribution of order n is $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, where c_i is the number of cycles of length i. If there does not exist G' ($G'\not\cong G$), whose cycle length distribution is the same as that of G, then G is called a unique cycle length distribution graph.

In this paper, the maximum and minimum numbers of cycles of length 4 and 5 on K_n-A ($|A|=j,n\geqslant|A|+3$) are obtained. It is also proven that K_n-A ($|A|=4$, $n\geqslant 9$) and K_n-A ($|A|=5$, $n\geqslant 14$) are unique cycle length distribution graphs.

Key words cycle length distribution; unique cycle length distribution; cycle

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net