

36-42

相位谱重构信号的迭代算法中 初始值对重构结果的影响

施慧君, 李莉

(上海师范大学 理工信息学院, 上海 200234)

摘要: 讨论了在相位谱重构信号的迭代算法中, 幅度谱初值的不同设置对重构信号的收敛速度产生的不同影响。

关键词: 信号重构; 相位谱; 迭代算法, 初始值

中图分类号: TP294 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5137(2000)02-0036-07

0 引言

信号重构技术主要是研究从观测到的部分数据重构完整信号的方法和途径。人们对信号重构技术及其理论的研究早在几十年前就已经开始了。SHANNON 在1949年发表了采样定理, 提出在一定条件下, 可以用离散采样值重构带限连续信号。70年代 LOGAN 等人提出了从零交叉点重构带通或带限信号的定理及其算法。1983年 SANZ J L C 和 HUANG T S 对各种关于频谱有限信号外推问题的算法进行分析, 提出了统一的迭代算法。目前在利用部分频域信号重构有限时宽的离散信号方面取得了许多有意义的成果, 并已应用于图象处理^[1,3,4]、语言处理^[2]等领域。

论文主要讨论在仅用相位谱重构信号的迭代算法中, 初始幅度谱的不同选择方式及实际应用中相位谱的不同获取方式对重构信号的影响。

1 仅用相位谱重构信号的理论^[5]

对于一个能量有限, 物理可实现的具有任意相位的离散信号, 一般来说, 其傅氏变换的

收稿日期: 1999-10-20

基金项目: 上海市教委青年基金资助项目(99QD83)

作者简介: 施慧君(1974-), 女, 上海师范大学理工信息学院硕士研究生; 李莉(1962-), 女, 上海师范大学理工信息学院副教授。

幅度谱与相位谱之间是找不到任何一种映射的,即两者是互相独立的.例如,对一个长度为 $(N+1)$ 点的实离散信号,若给定一个幅度谱,就存在 2^N 个具有该幅度谱但有不同的相位谱的实离散信号.反之,若给定一个相位谱(非最小相位,也非最大相位),也存在着无限多个具有该相位谱但有不同的幅度谱的实离散信号.因此要准确地重构原始信号,必须在满足一定的条件下,仅用相位谱(或幅度谱)去唯一地重构原始信号.

1.1 最小相位信号的相位谱与幅度谱的关系

若能量有限的物理可实现的实信号为最小相位信号,则仅用其相位谱即可确定信号,因为仅用相位谱可以恢复其幅度谱.最小相位的实信号,其幅度谱与相位谱之间有以下的关系.

定理 1 设 $f(t) \in L_2^{(0,\infty)}$ 为实信号,其幅度谱为 $|F(\omega)|$,其相位谱为 $\theta(\omega)$.若 $f(t)$ 为最小相位,则

$$\log |F(\omega)| = \frac{j}{2\pi} \left[\theta(\omega) \times \frac{-1}{\pi\omega} \right].$$

1.2 在非最小相位情况下,仅用相位谱确定信号的条件

在非最小相位的情况下,不能仅用相位谱来唯一地确定信号.但是,在许多情况下,我们只关心信号的波形,而不要求确定其绝对数值的大小.因此,可以扩展唯一性的定义,即认为只要信号的波形形状相同,互相间可以差一个常数因子.在这种唯一性的定义下,可以寻找一些较松弛的条件,使之可以用相位谱来唯一地确定信号.

定理 2 令 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是两个有限长的实序列,当它们的 z 变换不存在任何倒数对零点而且它们的 z 变换在单位圆上不存在零点时,如果对于所有的 ω ,满足 $\theta_x(\omega) = \theta_y(\omega)$,则有 $x(n) = \beta y(n)$,其中 β 是某个正的常数.如果对于所有的 ω ,满足

$$\tan \theta_x(\omega) = \tan \theta_y(\omega).$$

则有 $x(n) = \beta y(n)$,其中 β 是某个实数.

定理 3 令 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是两个有限长的实序列,在时间间隔 $0 \leq n \leq M-1$ 之外,这两个序列的值为零,且设它们存在 z 变换.当它们的 z 变换不存在任何倒数对零点和在单位圆上不存在零点,而且,如果在 $(M-1)$ 个不同的频率点上(这些频率值大于零且小于 π)满足 $\theta_x(\omega) = \theta_y(\omega)$,则 $x(n) = \beta y(n)$,这里 β 是某个正的常数.如果在 $(M-1)$ 个不同的频率点上(这些频率值大于零且小于 π)满足 $\tan \theta_x(\omega) = \tan \theta_y(\omega)$,则 $x(n) = \beta y(n)$,这里 β 是某个实常数.

定理3表明在离散的情况下,必须预先知道整个序列的准确长度.而定理2由于整个频率域上相位函数都为已知,所以不要求知道序列的长度.

2 仅用相位谱重构信号的算法

仅用相位谱重构信号的算法可分为两大类,一类是闭合形式解,它是一组线性方程的解;另一类是迭代解法,通过每次迭代以逼近其真实值.

2.1 迭代算法

HAYES 与 OPPENHEIM 等人在 QUATIERI 提出的迭代方法的基础上^[6],发展了一

种迭代算法,可以从相位谱重构满足一定条件的序列.

设序列 $x(n)$ 的长度为 M , 即在时间间隔 $0 \leq n \leq M-1$ 之外, $x(n) = 0$, 且设 $x(0) \neq 0$, $x(n)$ 的 N 点离散傅立叶变换可表示

$$X(k) = |X(k)| e^{j\theta_x(k)},$$

这里, 假设 $N \geq 2M$. 已知相位函数的 N 点抽样值为 $\theta_x(k)$, $(k = 0, 1, \dots, N-1)$, 现通过以下的迭代步骤, 从 $\theta_x(k)$ 重构 $x(n)$.

第一步: 对未知 $|X(k)|$ 取一个猜测值 $|X_0(k)|$, 作为迭代的起始值. 结合已知的相位谱 $\theta_x(k)$, 产生 $X(k)$ 的第一个估计值 $X_1(k)$. 即

$$X_1(k) = |X_0(k)| e^{j\theta_x(k)}.$$

计算 $X_1(k)$ 的逆傅氏变换, 得 $x(n)$ 的第一个估计值 $\hat{x}_1(n)$.

第二步: 根据序列 $x(n)$ 长度为 M 的已知条件, 令

$$\hat{x}_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

一般地, $\hat{x}_1(n)$ 与原序列 $x(n)$ 的差别是很大的. 这一步骤称为“序列截断”.

第三步: 把 $\hat{x}_1(n)$ 的 N 点 DFT 的幅度谱 $|\hat{X}_1(k)|$ 作为新的估计值, 并且用已知的相位谱 $\theta_x(k)$ 去替代 $\theta_{\hat{x}_1}(k)$. 这里, $\theta_{\hat{x}_1}(k)$ 是 $\hat{x}_1(n)$ 的 N 点 DFT 所产生的相位谱. 从而, $X(k)$ 的新的估计值由下式产生

$$X_2(k) = |\hat{X}_1(k)| e^{j\theta_x(k)},$$

这一步称为“相位替代”. 然后, 根据 $X_2(k)$ 的逆傅氏变换就可得到新的估计 $x_2(n)$.

反复运用第二步和第三步, 就是重构 $x(n)$ 的迭代算法. 具体流程见图 1:

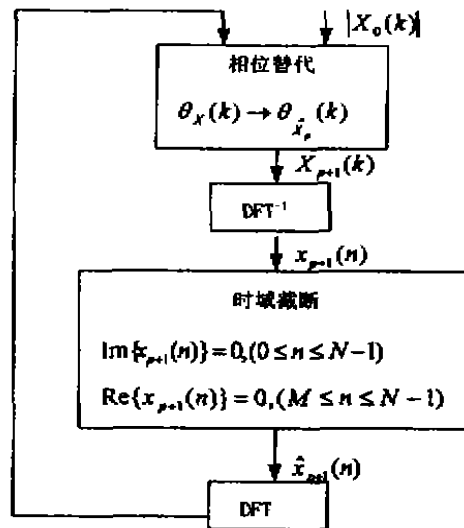


图 1 仅用相位谱重构信号的迭代算法框图

这里, 假设 $N \geq 2M$. 已知相位函数的 N 点抽样值为 $\theta_x(k)$, $(k = 0, 1, \dots, N-1)$, 可通过迭代从 $\theta_x(k)$ 重构 $x(n)$.

应用这种迭代算法时,使用的离散傅氏变换的长度 N 必须大于或等于原序列 $x(n)$ 的长度 M 的 2 倍,即满足 $N \geq 2M$,只有这样才保证在频率间隔 $0 < \omega < \pi$ 内,至少存在着 $(M - 1)$ 个不同的 ω 值,使 $\theta_i(\omega) = \theta_x(\omega)$. 这里 \hat{X} 为估计序列的傅氏变换. 若 $N < 2M$,则不能保证上述条件,也就无法应用唯一性定理去重构原序列.

3 实验过程及结果

3.1 收敛程度的准则函数

为了比较迭代算法的性能,这里,把原序列与第 p 次迭代所得的估计序列之间的归一化相关系数 S_p 作为迭代收敛程度的准则函数, S_p 的定义如下式

$$S_p = \frac{\sum_{n=1}^M x(n)\hat{x}_p(n)}{\sqrt{\sum_{n=1}^M x^2(n) \sum_{n=1}^M [\hat{x}_p(n)]^2}}$$

3.2 幅度谱初值的设置

实验1:设原序列长度 $M = 256$,离散傅氏变化的长度 $N = 2M$,幅度谱初值设置为以下 5 种情况,如图 2 所示,我们选用 3 组原始信号的相位谱分别进行相位重构. 原始信号的波形如图 3 所示. 实验结果见表 1.

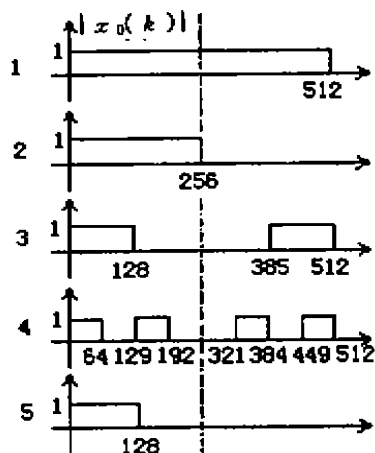


图 2 幅度谱的初值

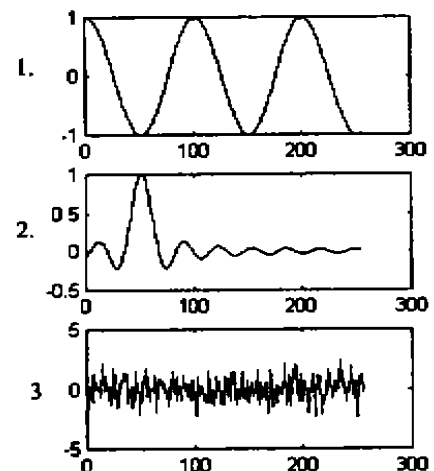


图 3 原始信号

由表 1 可知,在迭代次数统一时,幅度谱初值的不同设置对重构信号会有不同影响,幅度谱初值为 2,5 时,信号 3 不收敛,幅度谱初值为 1,3,4 时,以上各类信号均收敛,并且重构结果相近. 所以幅度谱初值设置以前后对称形式为佳. 由实验结果也可以看出,1,2 两类信号的频谱主要集中于前半部分,因此当幅度谱初值设为 2,5 时收敛最快. 信号 3 这类接近于

随机噪声的信号由于其频带范围广,因此选择第一类幅度谱初值时收敛最快.

表1 实验1结果

信号类型	1	2	3	4	5
1	0.9400	0.9460	0.9401	0.9400	0.9505
2	0.6755	0.7136	0.6760	0.6767	0.7781
3	0.9790	--	0.7932	0.8593	--

实验2:幅度谱初值采用实验1中的第1种情况,仅改变 $|X_0(k)|$ 的大小,迭代次数为100.

表2 实验2结果

信号	0.01	0.1	1	100	1000
1	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400
2	0.6755	0.6755	0.6755	0.6755	0.6755

由表2可知,当幅度谱初值的大小取0.01,0.1,1,10,100,1000不同值时, S_p 的大小基本保持不变,即幅度谱初值的大小对重构结果没有太大影响.可根据实际需要适当选择.如 $|X_0(k)| = 1$ 时,信号1,2的重构结果见图4.

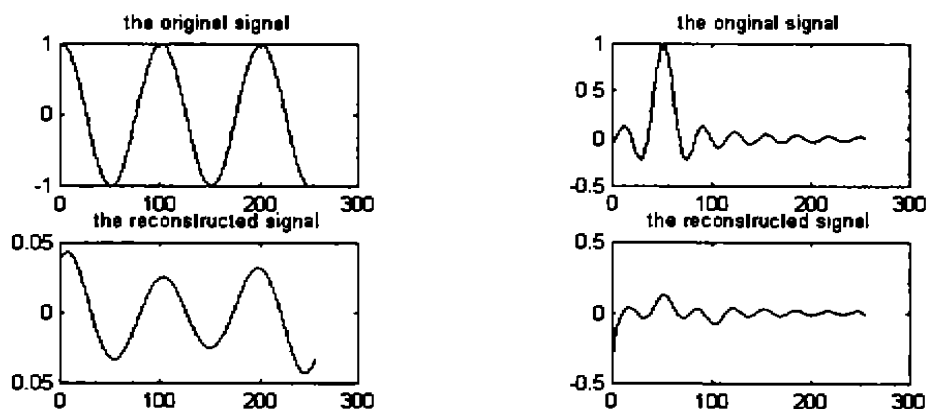


图4 信号1,2迭代100次重构波形图

3.3 实际情况下相位谱的获取

已知离散信号的 M 点采样值为 $x(n)$,为了得到 N 点相位谱 $\theta_r(k)$,可先在 $x(n)$ 的前后插零为 $x'(n)$,使其长度为 N ,再进行 DFT 变换,就可以得到 N 点的相位谱.时域截断时估计值 $\hat{x}_p(n)$ 的截取也要与 $x(n)$ 在 $x'(n)$ 中的位置相对应.

实验3:为了检验在 $x(n)$ 的前后不同位置插零对重构结果的影响,下面分3种情况构造 $x'(n), \hat{x}_p(n), N = 2M$,实验信号类型为1.

$$1. \begin{cases} x'(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq M-1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ \hat{x}_p(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n \leq M-1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x'(n) = \begin{cases} x(n), & p \leq n \leq P+M-1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ \hat{x}_p(n) = \begin{cases} x_p(n), & p \leq n \leq p-M-1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{cases}$$

其中 $p \leq n \leq n-M$ 的整数.

$$3. \begin{cases} x'(n) = \begin{cases} x(n), & N-M \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ \hat{x}_p(n) = \begin{cases} x_p(n), & N-M \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{cases}$$

表3 实验3结果

迭代次数	1	2	3
10	0.8763	0.8763	0.8763
50	0.9203	0.9203	0.9203
100	0.9400	0.9400	0.9400
500	0.9831	0.9831	0.9831
1000	0.9942	0.9942	0.9942

由实验3可知,迭代次数越多, S_p 值逐渐归一,而原序列前后插零的位置对收敛准则函数基本没有影响.

实验4:为了检验相位谱采样数 N 的大小对重构结果的影响,选用信号1,设 $N = 2M, 4M$ 两种情况,实验结果见表4.

表4 实验4结果

信号1	S_p	0.96	0.98	0.99	0.994	0.9994
$N = 2M$	迭代次数	199	433	736	987	2176
	迭代时间 t (s)	1.59	3.68	5.99	7.86	17.14
$N = 4M$	迭代次数	5	8	23	58	279
	迭代时间 t (s)	0.11	0.17	0.33	0.88	4.39

由实验4可知,当 S_p 为固定值0.994时, $N = 2M$ 时所用时间为7.86 s,迭代次数为987次, $N = 4M$ 时所用时间为0.88 s,迭代次数为58次. N 的大小对迭代速度有很大影响, N 取

值越大重构信号收敛速度越快.

4 结 论

仅用相位谱重构信号的迭代算法中,幅度谱的初值大小的设置对迭代结果基本没有影响,只与其形状有关,以前后对称的形状设置为最佳.原始信号前后插零的位置对重构结果基本没有影响,但要求时域截断的位置与原始信号在插零序列中的位置一致.初始相位谱的长度对重构信号的收敛速度有较大影响,设置的长度越长,重构信号收敛的越快,相应迭代次数也越少.本文的实验结果对实际应用中仅用相位谱重构信号具有一定的参考价值.

参考文献:

- [1] MEIJERING E H W, ZUIDERVELD K J, VIERGEVER M A. Image reconstruction by convolution with symmetrical piecewise n th-order polynomial kernels[J]. IEEE Trans on image processing, 1999, 8(2).
- [2] GOH Z, TAN K C, TAN B T G. Kalman-filtering speech enhancement method based on a voiced-unvoiced speech model[J]. IEEE Trans speech and audio processing, 1999, 7(5).
- [3] YAN H, IKEHARA M. Two-dimensional perfect reconstruction FIR filter banks with triangular supports[J]. IEEE Trans on signal processing, 1999, 47(4).
- [4] CASTLEMAN K R. 数字图象处理[M]. 北京:清华大学出版社,1998.
- [5] 李衍达,常同. 信号重构理论及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,1991.
- [6] HAYES M H, LIM J S, OPPENHEIM A V. Signal reconstruction from phase or magnitude[J]. IEEE Trans Acoust, Speech Signal Processing, 1980, 28(12).

Effect of Initial Value toward Signal Reconstruction in Phase Reconstruction Signal Algorithm

SHI Hui-jun, LI Li

(College of Science, Engineering and Information, Shanghai Teachers University, Shanghai, 200234, China)

Abstract: The signal reconstruction is discussed through phase spectrum by iterative algorithm. It shows that different initial configuration of the amplitude initial values causing different convergency speeds for signal reconstruction and reconstruction effect.

Key words: signal reconstruction; phase spectrum; iteration