第22卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 6
1996年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1996

# 配置区域极点的约束方差动态输出反馈控制[1)]

王子栋 郭 治
(南京理工大学自动控制系 南京 210094)

**摘 要**

在随机控制问题中,控制系统的稳态状态方差及闭环极点是分别表征控制系统稳、暂态特性的两个重要性能指标. 这里所研究的是,设计一个动态输出反馈控制器,使闭环系统的稳态状态方差不大于允许的上界,同时闭环极点位于期望的圆形区域中. 文中给出了期望控制器的存在条件及其解析表达式,并提供了相应的数值例子.

**关键词**: 线性连续随机系统,约束方差设计,区域极点配置,动态输出反馈.

## 1 引言

在随机控制领域中,一类工程控制问题的性能要求常常直接表现为系统稳态状态方差的上界形式,如大型空间结构的振动水平控制[1]、瞄准控制[2]等. 近年来,以此为背景而形成的约束方差控制问题得到国内外学者的广泛研究,并涌现了一批成果[3-6]. 需要指出的是,传统的控制理论(如 $LQG$ 控制、$H_\infty$ 控制、$L_1$ 控制等)用于解决上述约束方差设计问题通常不太适用,主要因为这些方法并不能保证各状态分量均满足各自允许的方差约束.

另一方面,一个理想的工程控制系统除了需具有良好的稳态特性外,还需具有良好的暂态特性,以保证过渡过程的品质要求. 为此,文献[5]研究了基于特征结构配置的协方差控制问题,但可配置的特征值较难得到;为弥补这一不足,文献[6]进而研究了状态反馈下配置圆形区域极点的约束方差设计问题. 本文的目的在于将文献[6]的结果推广到动态输出反馈的情形.

## 2 问题的描述

考虑如下线性时不变随机连续系统

$$d\boldsymbol{x}_p = (A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{u})dt + D_p dW(t), \tag{1a}$$

1) 国家自然科学基金及高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.
本文于1994年6月26日收到

$$y = Cx_p, \tag{1b}$$

其中 $n_c$ 阶动态控制器为

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \tag{2a}$$

$$u = C_c x_c + D_c y. \tag{2b}$$

这里 $x_p \in R^{n_x}$, $x_c \in R^{n_c}$, $y \in R^{n_y}$, $u \in R^{n_u}$, $W(t)$ 是增量协方差为 $I\mathrm{d}t$ 的 $n_w$ 维 Wiener 过程；$A_p, B_p$, $D_p, C, A_c, B_c, C_c, D_c$ 为适维常数矩阵.

做如下定义

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \tag{3a}$$

$$\tilde{C} \triangleq \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} \triangleq \begin{bmatrix} D_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}, \tag{3b}$$

$$\tilde{C}_y \triangleq [C \quad 0], \quad \hat{A} \triangleq \tilde{A} + \tilde{B}G\tilde{C}, \tag{3c}$$

则闭环系统具有如下形式

$$\mathrm{d}x = \hat{A}x\mathrm{d}t + \tilde{D}\mathrm{d}W(t), \tag{4a}$$

$$y = \tilde{C}_y x. \tag{4b}$$

闭环系统的稳态状态协方差矩阵由下式定义

$$X \triangleq \lim_{t\to\infty} E[x(t)x^T(t)] \triangleq \begin{bmatrix} X_p & X_{pc} \\ X_{pc}^T & X_c \end{bmatrix}. \tag{5}$$

其中 $X_p \triangleq \lim_{t\to\infty} E[x_p(t)x_p^T(t)]$, $X_{pc} \triangleq \lim_{t\to\infty} E[x_p(t)x_c^T(t)]$, $X_c \triangleq \lim_{t\to\infty} E[x_c(t)x_c^T(t)]$, 则当 $\hat{A}$ 渐近稳定时，$X$ 满足如下代数 Lyapunov 方程

$$\hat{A}X + X\hat{A}^T + \tilde{D}\tilde{D}^T = 0. \tag{6}$$

考虑位于左半复平面上的圆形区域 $\Omega(q,r)$，其圆心位于 $-q + j0$ $(q > 0)$，半径为 $r$ 且 $r < q$. 这样，即可将圆形区域极点及方差约束下的动态输出反馈控制器设计问题描述为设计控制器 $G$（包括参数 $A_c, B_c, C_c, D_c$），使下列性能指标同时得到满足

1）闭环极点位于圆形区域 $\Omega(q,r)$ 内，即

$$\sigma(\hat{A}) \subset \Omega(q, r);$$

2）各状态分量的稳态方差满足

$$[X_p]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 \ (i = 1, 2, \cdots, n_x). \tag{7}$$

其中 $\sigma_i^2 (i = 1, 2, \cdots, n_x)$ 可由实际控制系统的性能要求确定，但不应小于由传统的最小方差控制获得的最小方差值.

本文的任务就在于给出期望控制器 $G$ 存在的条件及其解析表达式.

## 3 主要结果及证明

**定理 1.** 给定圆形区域 $\Omega(q,r)$，若存在正定阵 $Q > 0$ 满足如下代数矩阵方程

$$\hat{A}Q\hat{A}^T + (q^2 - r^2)Q + q(\hat{A}Q + Q\hat{A}^T + \hat{D}\hat{D}^T) = 0, \tag{8}$$

则有（证明见附录 A）

1) $\sigma(\hat{A}) \subset \Omega(q, r)$;

2）由(5)式定义的稳态协方差 $X$ 存在且满足

$$X \leqslant Q. \tag{9}$$

由定理 1，可选择适当的正定阵 $Q$，使之满足

$$Q = \begin{bmatrix} Q_p & Q_{pc} \\ Q_{pc}^T & Q_c \end{bmatrix}, \ [Q_p]_{ii} \leqslant \sigma_i^2 (i = 1, 2, \cdots, n_x), \tag{10}$$

这里 $Q$ 的分块情况与 $X$ 相同。然后，对给定的 $Q$，寻找满足(8)式的控制器 $G$ 的集合。若这样的集合非空，则由定理 1 可有 $[X_p]_{ii} \leqslant [Q_p]_{ii} \leqslant \sigma_i^2$ 及 $\sigma(\hat{A}) \subset \Omega(q, r)$。从而综合设计目的得以实现。这样，本文所考虑的极点/方差约束设计问题实际上转化为一个辅助的 $Q$ 矩阵配置问题，并将得到完整解决。

**引理 1.**[7]　设 $M \in R^{m\times n}$，$N \in R^{m\times p} (m \leqslant p)$，则存在正交阵 $V$（即 $VV^T = I$）满足 $N = MV$ 当且仅当 $MM^T = NN^T$；进一步，$V$ 的通解可表示为

$$V = V_M \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} V_N^T, \ U \in R^{(n-r_M)\times(p-r_M)}, \ UU^T = I. \tag{11}$$

其中 $V_M$ 及 $V_N$ 分别取自 $M, N$ 的奇异值分解

$$M = U_M \begin{bmatrix} Z_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_M^T = [U_{M1} \ \ U_{M2}] \begin{bmatrix} Z_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{M1}^T \\ V_{M2}^T \end{bmatrix},$$

$$N = U_N \begin{bmatrix} Z_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_N^T = [U_{N1} \ \ U_{N2}] \begin{bmatrix} Z_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N1}^T \\ V_{N2}^T \end{bmatrix},$$

且 $r_M = \mathrm{rank}(M)$，$U_M = U_N$，$Z_M = Z_N$。

**定义 1.**　给定期望的圆形区域 $\Omega(q, r)$ 及满足(10)式的正定阵 $Q$。则 $Q$ 称为 $\Omega$ 可配置的，如果存在 $G$ 使方程(8)有正定解 $Q$。

首先研究正定阵 $Q$ 为 $\Omega$ 可配置的充要条件。设 $Q^{\frac{1}{2}}$ 为 $Q$ 的唯一正定平方根因子，将方程(8)改写为

$$(\hat{A}Q^{\frac{1}{2}} + qQ^{\frac{1}{2}})(\hat{A}Q^{\frac{1}{2}} + qQ^{\frac{1}{2}})^T = r^2 Q - q\widetilde{D}\widetilde{D}^T. \tag{12}$$

因上式左端非负定，为此假定

$$Q > \frac{q}{r^2}\widetilde{D}\widetilde{D}^T. \tag{13}$$

令 $P = r^2 Q - q\widetilde{D}\widetilde{D}^T = TT^T$，其中 $T > 0$ 为 $P$ 的平方根因子。则由引理 1，(12)式等价于存在正交阵 $V$，使

$$\hat{A}Q^{\frac{1}{2}} + qQ^{\frac{1}{2}} = TV. \tag{14}$$

注意到 $\hat{A} = \widetilde{A} + \widetilde{B}G\widetilde{C}$，上式即为

$$\widetilde{B}G\widetilde{C} = TVQ^{-\frac{1}{2}} - (\widetilde{A} + qI). \tag{15}$$

由文献[8]，存在 $G$ 使上式成立当且仅当

$$(I - \widetilde{B}\widetilde{B}^+)(TVQ^{-\frac{1}{2}} - \widetilde{A} - qI) = 0, \tag{16a}$$

$$(TVQ^{-\frac{1}{2}} - \widetilde{A} - qI)(I - \widetilde{C}^+\widetilde{C}) = 0. \tag{16b}$$

其中 $\widetilde{B}^+, \widetilde{C}^+$ 表示 $\widetilde{B}, \widetilde{C}$ 的 Moore-Penrose 广义逆。令

$$M = \begin{bmatrix} (I - \widetilde{B}\widetilde{B}^+)T \\ (I - \widetilde{C}^+\widetilde{C})(\widetilde{A}^T + qI)(T^T)^{-1} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} (I - \widetilde{B}\widetilde{B}^+)(\widetilde{A} + qI)Q^{\frac{1}{2}} \\ (I - \widetilde{C}^+\widetilde{C})Q^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

注意到 $I-\widetilde{C}^{+}\widetilde{C}$ 对称且 $VV^{T}=I$，则不难验证（16a），（16b）式成立等价于存在正交阵 $V$，使

$$MV=N. \tag{18}$$

由引理1，上式等价于

$$MM^{T}=NN^{T}. \tag{19}$$

将(17)式代入(19)式可产生四个矩阵等式，其中两个为恒等式，另两个为

$$(I-\widetilde{B}\widetilde{B}^{+})[r^{2}Q-q\widetilde{D}\widetilde{D}^{T}-(\widetilde{A}+qI)Q(\widetilde{A}+qI)^{T}](I-\widetilde{B}\widetilde{B}^{+})=0, \tag{20}$$

$$(I-\widetilde{C}^{+}\widetilde{C})[(\widetilde{A}+qI)^{T}(r^{2}Q-q\widetilde{D}\widetilde{D}^{T})^{-1}(\widetilde{A}+qI)-Q^{-1}](I-\widetilde{C}^{+}\widetilde{C})=0. \tag{21}$$

由以上推导，可得如下定理.

**定理 2.** 给定期望圆形区域 $\Omega(q,r)$，且正定阵 $Q$ 满足(10)和(13)式，则 $Q$ 是 $\Omega$ 可配置的当且仅当 $Q$ 满足(20)和(21)式.

下面的定理给出了相应于可配置阵 $Q$ 的控制器 $G$ 的集合.

**定理 3.** 若 $Q$ 是 $\Omega$ 可配置的，则所有配置该 $Q$ 的控制器均可表示为

$$G=\widetilde{B}^{+}\left(TV_{M}\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & U\end{bmatrix}V_{N}^{T}Q^{-\frac{1}{2}}-\widetilde{A}-qI\right)\widetilde{C}^{+}+Z-\widetilde{B}^{+}\widetilde{B}Z\widetilde{C}\widetilde{C}^{+}. \tag{22}$$

其中 $TT^{T}=r^{2}Q-q\widetilde{D}\widetilde{D}^{T}$；$M,N$ 如(17)式定义；$V_{M}$，$V_{N}$ 如引理 1 中定义；$U$ 是维数为 $n_{x}+n_{c}-r_{M}$ 的正交阵；$Z$ 为适维任意矩阵.

**证明.** 据文献[8]，若（16a）和（16b）式成立，即若 $Q$ 为 $\Omega$ 可配置，则(15)式的通解为

$$G=\widetilde{B}^{+}(TVQ^{-\frac{1}{2}}-\widetilde{A}-qI)\widetilde{C}^{+}+Z-\widetilde{B}^{+}\widetilde{B}Z\widetilde{C}\widetilde{C}^{+}. \tag{23}$$

而其中 $V$ 为满足 $MV=N$ 的正交阵. 将引理 1 中 $V$ 的表达式(11) 代入 (23) 式即可得(22)式. 证毕.

最后，给出本文所研究的极点/方差动态反馈控制设计问题的解.

**定理 4.** 若存在正定阵 $Q>0$，使得对于期望的 $\Omega(q,r)$ 及方差约束 $\sigma_{i}^{2}(i=1,2,\cdots,n_{x})$，(10)，(13)，(20)，(21)诸式成立，则需求的动态输出反馈控制器 $G$ 可由(22)式获得.

**讨论.** 在工程设计中，可将 $Q$ 的元素视为待定参数，直接代入(20)和(21)式中，再结合不等式(10)和(13)，直接构造出可配置正定阵 $Q$，继而求出相应的控制器 $G$. 必要时可采用数值搜索的方法. 因控制器设计可离线进行，上述方法还是可行的.

## 4 数值例子

考虑线性随机连续系统(1)及一阶动态控制器，其中[4]

$$A_{p}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B_{p}=D_{p}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

则在闭环系统(4)中

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \widetilde{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \widetilde{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \widetilde{D}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

现欲设计一阶控制器 $G$(即参数 $A_c,B_c,C_c,D_c$)，使如下指标得到满足：1) $\sigma(\tilde{A}+\tilde{B}G\tilde{C})\subset\Omega(q,r)=\Omega(3,2.5)$; 2) $[X_p]_{11}\leqslant 0.9,[X_p]_{22}\leqslant 1.4$.

由上节提供的方法，令 $Q$ 具有形式 $Q=(q_{ij})_{3\times 3}$(其中 $q_{ij}=q_{ji}$)，并代入(20)和(21)式中. 注意到(21)式自然满足，而(20)式则成为 $2.75q_{11}+6q_{12}+q_{22}=0$. 进一步，相应于条件(10)和(13)，可选择 $\Omega$ 可配置正定阵 $Q$，并因此得控制器 $G$(在(22)式中令 $U=1,Z=0$)分别为

$$Q=\begin{bmatrix}0.8276 & -0.5857 & 0\\ -0.5857 & 1.2385 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}-1.74254 & -2.74496 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

从而一阶反馈控制器为 $\dot{x}_c=-2x_c,u=[-1.74254\ -2.74496]y$. 经验证，闭环极点为 $\{-0.996766,-1.748195,-2\}$，稳态方差 $[X_p]_{11}=0,[X_p]_{22}=0.182152$，均满足给定约束，从而控制目的得以实现.

## 参　考　文　献


[1] Skelton R E, Delorenzo M L. Space structure control design by variance assignment. *J. Guidance. Contr. Dynam.*, 1985, **8**(6): 454—462.

[2] Kim S, Meerkov S M, Runolfsson T. Aiming control: design of residence probability controllers. *Automatica*, 1992, **28**(3): 557—584

[3] Hotz A F, Skelton R E. Covariance control theory. *Int. J. Control*. 1987, **46**(1): 13—32.

[4] Skelton R E, Ikeda M. Covariance controllers for linear continuous-time systems. *Int. J. Control*, 1989, **49**(5): 1773—1785.

[5] Chen Xuemin, Wang Zidong, Xu Gang, Guo Zhi. Eigenstructure assignment in state covariance control. *Systems and Control Letters*, 1995, **26**:157—162.

[6] Wang Zidong, Chen Xuemin, Guo Zhi. Controller design for Continuous systems with variance and circular pole constraints. *Int. J. Systems Science*, 1995, **26**(5):1249—1256.

[7] Xu J —H, Skelton R E. An improved covariance assignment theory for discrete Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **37**(10): 1588—1591.

[8] Ben Israel A, Greville T N E. *Generalized inverse: theory and application*. John Wiley and Sons., Inc., 1974.


## 附录 A. 定理 1 的证明

设 $s$ 及 $\eta$ 分别为 $\hat{A}^T$ 的一个特征值及相应的右特征向量，则

$$\hat{A}^T\eta=s\eta,\quad \eta^{*T}\hat{A}=s^*\eta^{*T}. \tag{A1}$$

将(8)式左乘 $\eta^{*T}$、右乘 $\eta$，并将(A1)式代入可得

$$[q(s^*+s)+|s|^2+(q^2-r^2)]\eta^{*T}Q\eta=-\eta^{*T}[q\tilde{D}\tilde{D}^T]\eta. \tag{A2}$$

令 $s=x+jy$，则 (A2) 成为

$$\{(x+q)^2+y^2-r^2\}\eta^{*T}Q\eta=-\eta^{*T}[q\tilde{D}\tilde{D}^T]\eta. \tag{A3}$$

因 $Q>0$ 且 $qDD^T\geqslant 0$，从而应有

$$(x+q)^2+y^2-r^2<0. \tag{A4}$$

这说明 $\hat{A}^T$ (或 $\hat{A}$)的特征根位于 $\Omega(q,r)$ 内，且稳态协方差 $X$ 存在、满足(6)式. 进一步，将(8)式改写为

$$\hat{A}Q+Q\hat{A}^T+\tilde{D}\tilde{D}^T+q^{-1}[\hat{A}Q\hat{A}^T+(q^2-r^2)Q]=0. \tag{A5}$$

(A5)式减去(6)式得

$$\hat{A}(Q-X)+(Q-X)\hat{A}^T+q^{-1}[\hat{A}Q\hat{A}^T+(q^2-r^2)Q]=0. \tag{A6}$$

因 $\hat{A}$ 渐近稳定且 $q^{-1}[\hat{A}Q\hat{A}^T+(q^2-r^2)Q]>0$，则(A6)式等价于

$$Q-X=\int_0^\infty \exp(\hat{A}t)[q^{-1}(\hat{A}Q\hat{A}^T+(q^2-r^2)Q)]\exp(\hat{A}^Tt)\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

即 $X\leqslant Q$.　证毕.

# VARIANCE-CONSTRAINED DYNAMIC OUTPUT FEEDBACK CONTROL WITH REGIONAL POLE ASSIGNMENT

WANG ZIDONG GUO ZHI

(*Dept, of Auto, Contr., Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094)

ABSTRACT

In the problem of stochastic control, the steady-state variances and closed-loop poles of the control systems, which respectively represent the steady-state and transient-state behaviour, are two important performance requirements. The problem addressed in this paper is to design the dynamic output feedback controller such that the steady-state variance is not greater than the desired upper bound and the closed-loop poles lie within the prescribed circular region. The existence conditions and the analytical expression of the expected controllers are obtained. A numerical example is provided to show the effectiveness of the method.

**Key words:** Linear continuous stochastic systems, constrained variance design, regional pole placement, dynamic output feedback.

**王子栋** 简介及照片见本刊第 21 卷第 3 期.

**郭 治** 简介及照片见本刊第 21 卷第 3 期.