

研究论文

# 圆管聚合物热流中黏性耗散分析的无网格模拟

张小华, 欧阳洁, 张 林

(西北工业大学应用数学系, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 以与温度相关的指数定律作为本构方程, 应用无网格方法模拟了外表面为恒温时的圆管内具有黏性耗散的聚合物流动热传导问题, 给出了离入口不同位置处的温度分布。计算结果表明: 根据黏性耗散模型计算的温度比无黏性耗散模型高出  $64^{\circ}\text{C}$ , 从而说明了黏性耗散在聚合物流动热传导问题中具有举足轻重的作用。并且, 无论是无黏性耗散模型, 还是黏性耗散模型, 其极限温度与壁面温度有很大的关系, 但与入口温度无关。

**关键词:** 热传导; 黏性耗散; 非牛顿流体; 聚合物流动; 无网格方法

**中图分类号:** TK 124

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0438-1157 (2007) 01-0015-06

## Meshless analysis on heat transfer with viscous dissipation in polymer flow in tube

ZHANG Xiaohua, OUYANG Jie, ZHANG Lin

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, Shaanxi, China)

**Abstract:** This paper presents the results of meshless or mesh free analysis of a heat transfer problem of polymer melt flowing in a tube at constant ambient temperature. Here, the rheological behavior of the melt was described by a temperature dependent power-law model with viscous dissipation. Temperature profiles were obtained for different tube lengths. Comparing with the no viscous dissipation model, it was shown that the temperature-dependent viscous dissipation term had significant impact on the heat transfer, *i. e.*, the temperature difference between the model with temperature-dependent power-law viscous dissipation and the model without viscous dissipation was about  $64^{\circ}\text{C}$ . Moreover, the limiting temperature profiles of both no viscosity dissipation model and temperature-dependent power-law model were influenced by the wall boundary, but not by the inlet conditions of the polymer melt.

**Key words:** heat transfer; viscous dissipation; non-Newtonian fluid; polymer flow; meshless method

### 引 言

在聚合物加工、食品、生化等行业的热交换过程中, 经常会涉及到圆管内黏性不可压缩非牛顿 (non-Newtonian) 流体的热传导问题, 即所谓的

Graetz-Nusselt 问题。为了得到一个简单的数学模型, 许多研究者通常对该问题做如下的假设: (1) 温度达到稳定状态; (2) 轴向热传导忽略不计; (3) 密度  $\rho$  和比热容  $c_p$  与位置无关; (4) 黏度  $\eta$  和热传导率  $\kappa$  与位置无关; (5) 由黏性耗散产生的热

2005-12-24 收到初稿, 2006-03-08 收到修改稿。

**联系人:** 欧阳洁。第一作者: 张小华 (1980—), 男, 博士研究生。

**基金项目:** 国家自然科学基金重大项目 (10590353); 陕西省自然科学基金项目 (2005A16); 2004-2005 西北工业大学本科毕业设计重点扶持项目。

**Received date:** 2005-12-24.

**Corresponding author:** Prof. OUYANG Jie. E-mail: jieouyang@nupu.edu.cn

**Foundation item:** supported by the National Natural Science Foundation of China (10590353) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2005A16).

能忽略不计；(6) 无外部体力作用在流体上；(7) 流体服从 Newton 黏性定理并遵守 Fourier 热传导定律。但现实中的很多聚合物由于其内部结构在一定的流场作用下会发生变化，从而引起黏性的变化。此时黏度不再是个常数，因此为了更加准确描述一些物质（如聚乙烯熔体等）在圆管内的热流行为，本文采用修改后的假设<sup>[1]</sup>：(1) 黏度  $\eta$  是位置和温度的函数；(2) 考虑轴向热传导；(3) 考虑由黏性耗散产生的热能；(4) 流体服从指数定律和 Fourier 热传导定律。Wei 等<sup>[2]</sup>给出了上述模型离入口充分远处圆管内温度的解析解，但由于在入口附近温度梯度变化剧烈而无法得到该处温度分布的解析解，因此该问题必须采用数值方法来求解。Wei 等<sup>[1]</sup>应用有限元方法也求解了该问题，但由于某些原因，得到的数值结果和实际情况不相符。Agur 等<sup>[3]</sup>用有限差分法求解了忽略轴向热传导的 Graetz-Nusselt 问题，得到了一些有益的结果。Prusa 等<sup>[4]</sup>基于有限差分法，构造了所谓的奇摄动 (singular perturbation) 方法，求解了流体服从指数定律的 Graetz-Nusselt 问题，但有限差分法会涉及到烦琐的网格生成过程且难以处理复杂的边界问题。近年来发展的无网格方法<sup>[5-11]</sup>引起了人们的极大关注。无网格方法采用基于点的近似，可以彻底或部分地消除网格，且可容易地求解大变形、大梯度等问题。特别是 Belytschko 等<sup>[5-6]</sup>提出的无网格 Galerkin 方法 [Element-Free Galerkin (EFG) Method] 已被广泛应用于工程力学中的许多领域<sup>[7-10]</sup>。研究表明，EFG 方法具有计算稳定、精度较高，收敛速度快等优点，是无网格方法中较成熟的一种方法。为了更加准确的模拟 Graetz-Nusselt 问题，本文采用 EFG 方法求解该问题，从而考察黏性耗散在 non-Newtonian 流体热传导问题中的作用，同时也避免了烦琐的网格生成过程。

### 1 数学模型

假设圆管的管壁光滑，流体物性为常数，流体黏性耗散为径向位置和温度的函数。对充分发展的非牛顿 Poiseuille 层流流动的稳态热传导问题，根据上述的假设，该问题满足

$$\alpha_{\rho} u \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \tau \frac{du}{dr} \quad (1)$$

对具有黏性耗散的聚合物熔体 (如图 1<sup>[1]</sup>)，本构方程为

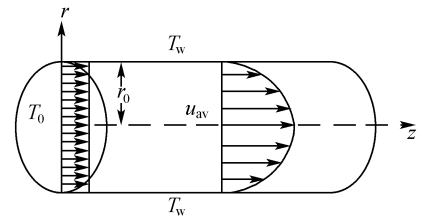


图 1 圆管内的聚物流动  
Fig. 1 Polymer flow in tube

$$\tau = \eta \frac{du}{dr} \quad (2)$$

式中

$$\eta = A e^{-nB(T-T_m)} \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} \quad (3)$$

由式 (1)、式 (2) 得

$$\alpha_{\rho} u \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \eta \left( \frac{du}{dr} \right)^2 \quad (4)$$

式中  $\rho$ 、 $c_p$ 、 $\kappa$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $T_m$  和  $n$  都是正常数，其中  $T_m$  为参考温度。速度  $u$  由式 (5) 定义<sup>[1,3]</sup>

$$u = u_{av} \left( \frac{\nu+2}{\nu} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^\nu \right] \quad (5)$$

式中  $r_0$  是圆管的半径， $u_{av}$  为平均流速， $\nu = (n+1)/n$ 。常数  $n$  即为指数定律中的指标，且满足  $0 < n < \infty$ 。

相应的边界条件为

$$\begin{cases} T(r, 0) = T_0 \\ -\kappa \frac{\partial T(r_0, z)}{\partial r} = h[T(r_0, z) - T_\infty] \\ \frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} = 0, z \rightarrow \infty \end{cases} \quad (6)$$

式中  $T_0$  是流体入口边界处温度， $T_\infty$  为圆管外环境温度， $h$  为薄膜系数，本文中  $h = 10^6$ 。当  $h$  非常大，且用  $T_w$  (管壁温度) 代替  $T_0$ ，则该条件和  $T(r_0, z) = T_w$  相容。

定义如下量纲 1 数

$$Z = \frac{\nu \kappa z}{(\nu+2)\alpha_{\rho} u_{av} r_0^2}, R = \frac{r}{r_0}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\nu \kappa}{(\nu+2)\alpha_{\rho} u_{av} r_0^2} \frac{\partial T}{\partial Z} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \left[ \frac{\nu \kappa}{(\nu+2)\alpha_{\rho} u_{av} r_0^2} \right]^2 \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial T}{\partial R}, \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \left( \frac{1}{r_0} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \\ \frac{du}{dr} &= -u_{av} (\nu+2) R^{\nu-1} \frac{1}{r_0} \end{aligned}$$

$$\eta = A e^{nBT_m} \left( u_{av} \frac{\nu+2}{r_0} \right)^{n-1} R^{(\nu-1)(n-1)} e^{-nBT}$$

因为  $\nu = (n+1)/n$ ，有

$$\eta \left( \frac{du}{dr} \right)^2 = A e^{nBT_m} \left( u_{av} \frac{\nu+2}{r_0} \right)^{n-1} R^{(\nu-1)(n-1)} \left( -u_{av} \frac{\nu+2}{r_0} R^{\nu-1} \right)^2 e^{-nBT} =$$

$$A e^{nBT_m} \left( u_{av} \frac{\nu+2}{r_0} \right)^{n+1} R^{(\nu-1)(n-1)} e^{-nBT} =$$

$$A e^{nBT_m} \left( u_{av} \frac{\nu+2}{r_0} \right)^{n+1} R^\nu e^{-nBT}$$

于是式 (4) 的量纲 1 形式为

$$(1 - R^\nu) \frac{\partial T}{\partial Z} = D \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + C e^{-nBT} R^\nu \quad (7)$$

其中

$$D = \left[ \frac{\kappa}{(\nu+2)\rho c_p u_{av} r_0} \right]^2, C = \frac{u_{av}^{n+1}}{\kappa} A e^{nBT_m} \frac{(\nu+2)^{n+1}}{r_0^{n+1}},$$

$$\eta = \frac{C\kappa}{u_{av}^2 (\nu+2)^2} R^{(\nu-1)(n-1)} e^{-nBT}$$

## 2 无网格 Galerkin 方法

### 2.1 移动最小二乘法

EFG 方法的数学基础是移动最小二乘 (moving least square, MLS) 法<sup>[5-6]</sup>。

一般情况下，由 MLS 构造的形函数不满足 Kronecker delta 条件，即  $\Phi_i(x_j) \neq \delta_{ij}$ ，这给本质边界条件的处理带来了很大困难。目前已经提出了多种处理本质边界条件的办法，如 Lagrange 乘子法<sup>[5]</sup>、罚参数法<sup>[11]</sup>、修正的变分原理<sup>[6]</sup>、与有限元耦合<sup>[6]</sup>等。由于罚参数法易于实施，且适合于大规模计算，所以本文采用罚参数法处理本质边界条件。

此外，权函数的连续性将直接影响到形函数的连续性，所以本文取三次样条函数<sup>[11]</sup>作为权函数。

### 2.2 Galerkin 离散

基于 Galerkin 离散，式 (7) 的弱形式为

$$\int_\Omega \left( \frac{\partial W}{\partial R} \frac{\partial T}{\partial R} + D \frac{\partial W}{\partial Z} \frac{\partial T}{\partial Z} \right) dV + \int_\Omega W (1 - R^\nu) \frac{\partial T}{\partial Z} dV +$$

$$2\pi\alpha \int_{\Gamma_D} W T d\Gamma + 2\pi \int_{\Gamma_N} W h T d\Gamma - \int_\Omega W C e^{-nBT} R^\nu dV =$$

$$2\pi \int_\Omega W h T_\infty d\Gamma + 2\pi\alpha \int_{\Gamma_D} W T_0 d\Gamma \quad (8)$$

式中  $\alpha$  为罚参数，本文中取  $\alpha = 10^7$ 。

采用 MLS 近似，取  $W$ 、 $T$  为形函数  $\Phi_i(\mathbf{x})$ ，式 (8) 离散可得

$$\mathbf{KT} = \mathbf{F} + \mathbf{Q} \quad (9)$$

其中

$$K_{ij} = 2\pi \int_\Omega \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial R} \frac{\partial \Phi_j}{\partial R} + D \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial Z} \right) R dR dZ +$$

$$2\pi \int_\Omega \Phi_i (1 - R^\nu) \frac{\partial \Phi_j}{\partial Z} R dR dZ + 2\pi\alpha \int_{\Gamma_D} \Phi_i \Phi_j d\Gamma + 2\pi \int_{\Gamma_N} \Phi_i h \Phi_j d\Gamma$$

$$Q_{ij} = 2\pi C \int_\Omega \Phi_i e^{-nBT} R^{\nu+1} dR dZ$$

$$F_i = 2\pi \int_{\Gamma} \Phi_i h T_\infty d\Gamma + 2\pi\alpha \int_{\Gamma_D} \Phi_i T_0 d\Gamma$$

式 (9) 是一个非线性方程组，因此必须非线性迭代求解，本文采用具有二次收敛速度的牛顿迭代法求解。其具体过程如下：

设  $\mathbf{R} = \mathbf{KT} - \mathbf{F} - \mathbf{Q}$

则牛顿迭代公式为

$$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{T}^n) \mathbf{R}(\mathbf{T}^n) \quad (10)$$

为了避免矩阵求逆，将式 (10) 改写为

$$\mathbf{J}(\mathbf{T}^n) \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{T}^n) \mathbf{T}^n - \mathbf{R}(\mathbf{T}^n) \quad (11)$$

其中，Jacobian 矩阵  $\mathbf{J}$  为

$$\mathbf{J}(\mathbf{T}^n) = \mathbf{K} - \nabla \mathbf{Q} \quad (12)$$

其中

$$\nabla Q_{ij} = -2\pi C B n \int_\Omega \Phi_i \Phi_j e^{-nBT} R^{\nu+1} dR dZ$$

## 3 计算结果及分析

以典型高密度聚乙烯熔体为例来研究上述问题，根据 Agur 等<sup>[3]</sup>提供的数据，式 (3) 中， $A = 28200 \text{ Pa} \cdot \text{s}^n$ ， $B = 0.0240 \text{ K}^{-1}$ ， $T_m = 399.5 \text{ K}$ ， $n = 0.453$ ， $u_{av} = 0.15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ， $r_0 = 0.00125 \text{ m}$ ， $T_0 = 130^\circ\text{C}$ ， $T_\infty = 160^\circ\text{C}$ ， $c_p = 2.51 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ， $D = 1.7667 \times 10^{-1}$ ， $\kappa = 6.10 \times 10^{-4} \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 0.255 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

图 2 (a)、(b) 分别给出了在  $R$ - $Z$  面上均匀布置  $41 \times 21$ 、 $51 \times 21$  个节点的圆管内无黏性耗散的

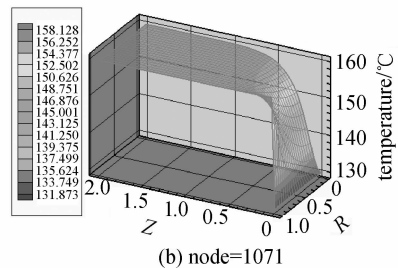
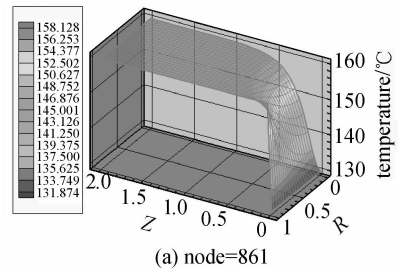


图 2 无黏性耗散时圆管内幂律流体的温度分布  
Fig. 2 3-D bulk temperature profile of power-law flow in tube without viscous dissipation

聚乙烯热传导的数值解。从图 2 可以看出，由于不存在黏性耗散产生热，所以对于温度充分发展问题，温度的发展主要取决于壁面边界温度。

图 3 给出了对应的具有黏性耗散的数值解。由图 3 可见，由于黏性耗散的存在，所获得的温度比没有黏性耗散所获得的温度高得多，最高温度在 224℃ 左右。和壁面温度相比，在  $R=0.5$  处管壁附近温度迅速凸起，表明在管壁附近由黏性耗散产生的热量比在圆管中心处多，这主要是由于在管壁处剪切速率最大的缘故。

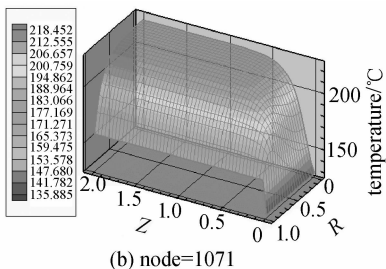
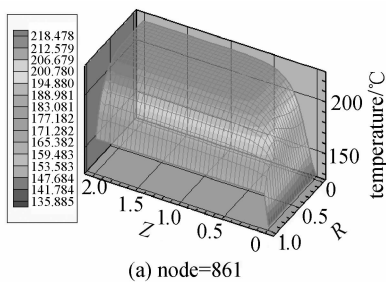
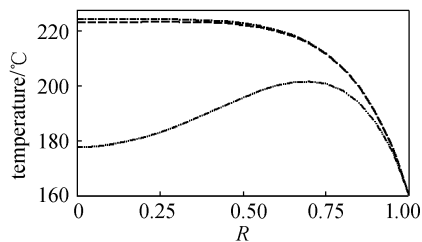


图 3 具有黏性耗散时，圆管内幂律流体的温度分布  
Fig. 3 3-D bulk temperature profile of power-law flow in tube with viscous dissipation

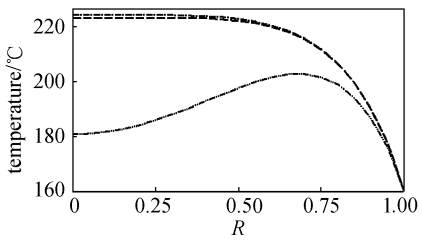
针对无黏性耗散模型和黏性耗散模型，图 4 比较了不同节点数下距入口不同位置处的温度分布。从图 4 可以看出，在距入口不同的位置处，黏性耗散模型的温度均远远高于无黏性耗散模型的温度。

图 5 给出了无黏性耗散模型和黏性耗散模型沿  $R=0.5$  的温度分布图。从图 5 中可以看出，无黏性耗散模型的温度逼近于壁面温度，即 160℃；而黏性耗散模型的温度逼近于 224℃。64℃ 的温度差说明由黏性耗散在该问题中具有极其重要的作用。结合图 3、图 5 可知，对黏性耗散模型，在  $Z \approx 0.6$  以后，圆管内沿轴向的温度已经充分发展。

前面已经指出，圆管入口处的温度目前还无法得到解析解；但离入口处充分远时，Wei 等<sup>[2]</sup>已经给出了温度充分发展情况下该问题的解析解。为了



(a) node=861



(b) node=1071

图 4 距入口不同位置幂律流体沿径向的温度分布  
Fig. 4 Temperature profiles along tube radial axis for power-law flow at various tube length  
—— no viscous dissipation; - - - - -  $Z=0.15$ ;  
- - - - -  $Z=0.6$ ; - · - · -  $Z=1.2$ ; - · - · -  $Z=1.8$

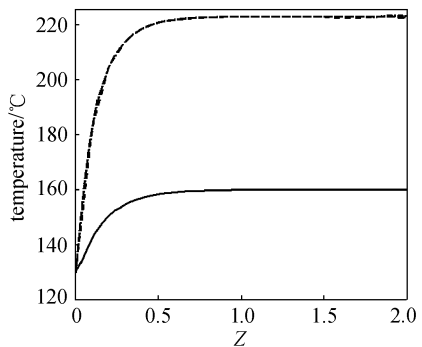


图 5 不同节点数时幂律流体沿轴向的温度分布  
Fig. 5 Temperature profiles along axial distance with different node numbers

—— no viscous dissipation; - - - - - node=441;  
- · - · - node=651; - · - · - node=861; - · - · - node=1071

误差分析，定义如下相对误差

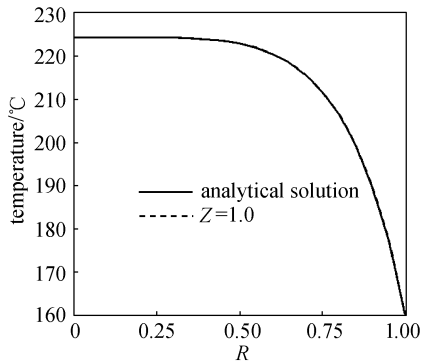
$$e = \frac{\sum_{i=1}^n |T_i^{\text{exact}} - T_i^{\text{num}}|}{\sum_{i=1}^n |T_i^{\text{exact}}|}$$

在温度充分发展的情况下，表 1 给出了无网格 Galerkin 方法在不同节点数时的误差情况，可以看出，对于温度充分发展以后，无网格 Galerkin 方法在节点布置较稀疏时，也可以获得很高的计算精度。图 6 给出了  $Z=1.0$  时解析解和数值解的比较。从图中可以看出，无网格 Galerkin 方法采用

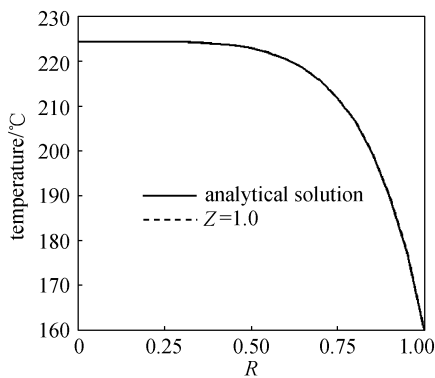
表 1 不同节点数时的相对误差

Table 1 Errors in numerical results for various node number

Node number	Relative error/%
441	0.05915329845972
651	0.05157240080563
871	0.05081431104022
1071	0.05076971752461



(a) node=861



(b) node=1071

图 6 数值解和精确解的比较

Fig. 6 Comparison of numerical solutions and analytical solutions

861 个节点时的解已经和解析解吻合很好。

图 7 给出了黏性耗散模型在不同入口温度 (130、190、220℃) 情况下沿  $R=0.5$  的温度分布, 可看出, 在各种入口温度情况下, 它们均有同一个极限温度 (224℃)。这是由于对速度充分发展的问题, 熔体的温度取决于壁面边界温度、黏度和热导率, 而不由熔体的入口温度决定<sup>[3]</sup>。结合图 2 可见, 对无黏性耗散模型, 其极限温度也刚好等于壁面温度 (160℃)。

## 4 结 论

本文采用无网格 Galerkin 方法, 研究了圆管

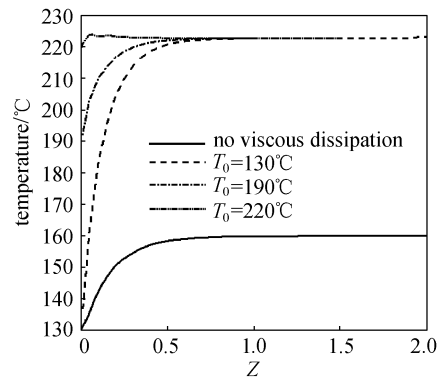


图 7 不同入口温度情况下沿轴向的温度分布

Fig. 7 Temperature profiles as functions of dimensionless axial distance with different inlet temperature

内具有黏性耗散的不可压缩非牛顿流体的 Graetz-Nusselt 问题。数值结果表明:

(1) 黏性耗散对温度的分布影响至关重要。本文中, 黏性耗散模型的温度比无黏性耗散模型的温度高出 64℃。

(2) 在  $Z \approx 0.6$  以后, 黏性耗散模型的温度得到充分发展。

(3) 无论是无黏性耗散模型, 还是黏性耗散模型, 其极限温度与壁面温度有很大的关系, 但与入口温度无关。

(4) 采用无网格方法, 前后处理方便, 求解过程中可避免烦琐的网格生成, 因而可以节省大量的人力和计算费用, 并且无网格方法具有很高的精度。

## References

- [1] Wei D M, Luo H B. Finite element solutions of heat transfer in molten polymer flow in tubes with viscous dissipation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2003, **46** (16): 3097-3108
- [2] Wei D M, Zhang Z. Decay estimates of heat transfer to molten polymer flow in pipes with viscous dissipation. *Electron. J. Differen. Equat.*, 2001 (1): 1-14
- [3] Agur E E, Vlachopoulos J. Heat transfer to molten polymer flow in tubes. *Journal of Applied Polymer Science*, 1981, **26** (5): 765-773
- [4] Prusa J, Manglik R M. Asymptotic and numerical solutions for thermally developing flows of Newtonian and non-Newtonian fluids in circular tubes with uniform wall temperature. *Numer. Heat transfer, Part A.*, 1994, **26** (2): 119-217
- [5] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin

- methods. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 1994, **37** (2): 229-256
- [6] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. Meshless method: an overview and recent developments. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1996, **139** (1/2/3/4): 3-47
- [7] Belytschko T, Kpysl P, Krongauz Y. A three-dimensional explicit element-free Galerkin method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, 1997, **24** (12): 1253-1270
- [8] Do C J. An element-free Galerkin method for simulation of stationary two-dimensional shallow water flows in rivers. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2000, **182** (1/2): 89-107
- [9] Singh I V, Jain P K. Parallel EFG algorithm for heat transfer problems. *Advances in Engineering Software*, 2005, **36** (8): 554-560
- [10] Qiu Yi (仇轶), You Changfu (由长福), Qi Haiying (祁海鹰), Xu Xuchang (徐旭常). Numerical simulation of flow around a cylinder for different  $Re$  using a meshless method. *Journal of Tsinghua University: Science and Technology*(清华大学学报: 自然科学版), 2005, **45** (2): 220-223
- [11] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Comput. Mech.*, 1998, **22** (2): 117-127