第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0715-04 **文献标识码**: **A**

本原指数达到次大值的竞赛图的刻画

叶雪梅
(福建师范大学数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)
(E-mail: xmye@fjnu.edu.cn)

摘 要: 设 $n\geq 5$, D 为 n 阶强连通竞赛图, 本文给出了本原指数达到次大值 $n+1$ 的极图的完全刻画.

关键词: 竞赛图; 本原指数; 极图; 次大值.
MSC(2000): 05C20; 05C50
中图分类: O175.5

1 引 言

无向完全图的每条边规定方向后得到的有向图称为竞赛图, 记有向图 $D=(V,E)$, 其中 V 为顶点集, E 为有向边集. $N^-(u)$ 与 $N^+(u)$ 分别表示顶点 u 的内外邻集 [1].

定义 1 设 D 为有向图. 若存在正整数 k, 使得对任意 $u,v\in V$, D 中都有长为 k 的从点 u 到 v 的有向途径, 则称 D 为本原的, 且称这种 k 的最小值为 D 的本原指数, 记为 $\gamma(D)$.

定义 2 设 D 为有向图. 若 D 中任意一对顶点之间都存在有向途径, 则称 D 为强连通的.

定义 3 设 D 为有向图. $u,v\in V$, $d_{u,v}$ 表示从点 u 到 v 的距离. 图 D 的直径 $d=\max_{u,v\in V}\{d_{u,v}\}$.

1989 年, 柳柏濂 [2] 研究了本原指数的分布. 1991 年, 柳柏濂、邵嘉裕 [3] 对本原极矩阵集合进行了刻画. 近年来, 对特殊类型的本原有向图 (或矩阵) 及其极图的研究被人们所关注.

已知 n 阶竞赛图 D 是本原的当且仅当 D 是强连通的且 $n\geq 4$[1]. 文献 [4] 证明了当 $n\geq 5$ 时, $3\leq\gamma(D)\leq n+2$, 并给出了本原指数达到最大值 $n+2$ 的极图的完全刻画. 文献 [5] 证明了 5 阶本原竞赛图的指数集为 {4,6,7}, n $(n\geq 6)$ 阶本原竞赛图的指数集为 $\{3,4,5,\ldots,n+1,n+2\}$. 本文在文献 [4],[5] 的研究基础上, 给出 n $(n\geq 5)$ 阶竞赛图中, 本原指数达到次大值 $n+1$ 的极图的完全刻画.

2 预备定理

定理 1[1] 设 $n\geq 5$, D 为 n 阶强连通竞赛图, 并设 A 是 D 的邻接矩阵, d 是 D 的直径, 则 $A^{d+3}>0$ (即矩阵 A^{d+3} 的每个元素均为正数).

引理 1 设 $n\geq 5$, $D=(V,E)$ 为 n 阶竞赛图, $t\geq n$, 对 $u,v\in V$, 若从 u 到 v 存在长度为 t 的有向途径, 则从 u 到 v 必存在长度不大于 $t-3$ 的有向途径.

收稿日期: 2005-06-15; **接受日期**: 2005-08-01
基金项目: 福建省教育厅科研基金资助项目 (JB03144).

证明 设 P 为从 u 到 v 长为 t 的有向途径，由于 D 只有 n 个不同顶点，所以必有某个顶点 k 在 P 中至少出现二次，即 P 中含有过顶点 k 的圈 C, 而圈长至少为 3[4], 把 P 删去 C 后得到从 u 到 v 新的有向途径，其长度不大于 $t-3$.

引理 2 设 $n \geq 5$, d 为 n 阶强连通竞赛图 D 的直径，则 $\gamma(D) \leq d+3$.

证明 由定理 1, $A^{d+3} > 0$, 即 D 中任意两点间都存在长为 $d+3$ 的有向途径，所以 $\gamma(D) \leq d+3$.

引理 3 设 $n \geq 5$, D 为 n 阶强连通竞赛图，则当 $d=n-2$ 或 $d=n-1$ 时，$\gamma(D)=d+3$.

证明 由引理 2 知 $\gamma(D) \leq d+3$, 当 $d=n-2$ 时，若 $\gamma(D) \neq d+3$, 则 $\gamma(D) < d+3 = n+1$. 即 $\gamma(D) \leq n$, 则对任意的 $u, v \in V$, 都有从点 u 到 v 的长为 n 的有向途径，由引理 1, 从点 u 到 v 必有长为 $n-3$ 的有向途径，由于 u, v 的任意性，得到 $d \leq n-3$, 与 $d=n-2$ 矛盾，所以 $\gamma(D)=d+3$. 对 $d=n-1$ 情形同理可证.

注意到引理 3 中 $\gamma(D)=d+3$ 并不是对任意的 d 都成立，在文献 [5] 中就有 $d=2$ 的 5 阶竞赛图 D, 但是 $\gamma(D)=4 \neq d+3$ 的例子.

定理 2 设 $n \geq 5$, D 为 n 阶强连通竞赛图，则 $\gamma(D)=n+1$ 的充要条件为 $d=n-2$.

证明 其充分性由引理 3 即得，下面证明必要性.

由于 D 是 n 阶强连通的，故 $d \leq n-1$. 要证明 $d=n-2$, 只要证明 $d=n-1$ 及 $d<n-2$ 是不可能的.

(I) 若 $d=n-1$, 由引理 3 有 $\gamma(D)=n+2$, 矛盾.

(II) 若 $d<n-2$, 即 $d \leq n-3$, 由引理 2 知 $\gamma(D) \leq d+3 \leq n$, 矛盾.

所以 $d=n-2$, 必要性得证.

引用记号 H_k 表示文献 [4] 中提到的 k 阶竞赛图中本原指数达到最大值 $k+2$ 的极图，$H_k=(V,E)$, 其中

$$V=\{1,2,3,\ldots,k\}, E=\{(i,i+1)|1 \leq i \leq k-1\} \cup \{(i,j)|3 \leq j+2 \leq i \leq k\}.$$

定理 3[4] 设 $n \geq 5$, D 为 n 阶强连通竞赛图，则 $\gamma(D)$ 达到最大值 $n+2$ 的充要条件是 D 同构于图 H_n.

3 主要结论

引用记号 $G_{k,n}$ 表示特定的 n 阶图 $G_{k,n}=(V,E)$, 其中 $V=\{1,2,3,\ldots,n\}$, $2 \leq k \leq n-1$, 且满足以下两个条件:

(I) $G_{k,n}$ 包含有 $n-1$ 阶子图 H_{n-1}.

(II) $\{1,2,3,\ldots,k-3\} \cup \{k\} \subseteq N^+(n)$, $\{k+1,k+2,\ldots,n-2,n-1\} \subseteq N^-(n)$ (注：若 $k \leq 3$, $\{1,2,3,\ldots,k-3\}$ 为空集；若 $k=n-1$, $\{k+1,k+2,\ldots,n-2,n-1\}$ 为空集). 而对顶点 $k-1, k-2$ 约定如下:

当 $k=2$ 时 ($k-2$ 不存在), $k-1 \in N^-(n)$ 或 $k-1 \in N^+(n)$ 二者必居且只居其一;

当 $3 \leq k \leq n-3$ 时，以下：(i). $k-1, k-2 \in N^-(n)$. (ii). $k-1 \in N^-(n), k-2 \in N^+(n)$. (iii). $k-1 \in N^+(n), k-2 \in N^-(n)$. (iv). $k-1, k-2 \in N^+(n)$ 四者必居且只居其一;

当 $k=n-1$ 或 $k=n-2$ 时，顶点 $k-1, k-2$ 中至少有一个属于 $N^-(n)$, 即 $3 \leq k \leq n-3$ 中各种情形除 (iv) 外，(i),(ii), (iii) 三者必居且只居其一.

准确地说，对某个确定的 k 的值， $G_{k,n}$ 不只是一个图，而对应的是不多于四个的一簇图(如图 1 所示. 为简洁起见，当 $k \le i \le n-1, 1 \le j \le i-2$ 时，弧 (i,j) 略去不画. 顶点 n 与 $k-1, k-2$ 之间的弧线未标箭头方向，表示多种可能性).

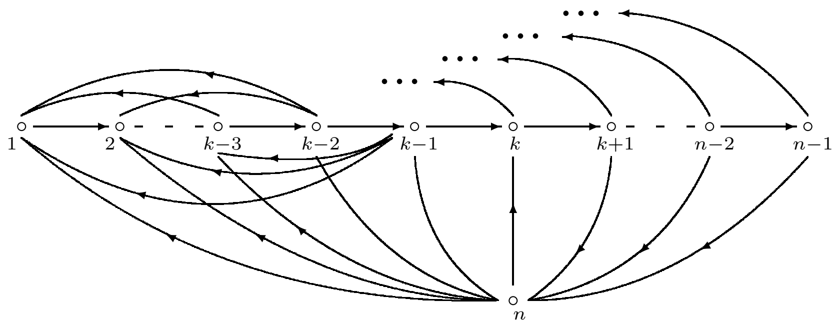

图 1

关于图及子图有如下事实: 设 $D^*=(V^*,E^*)$ 为 $D=(V,E)$ 的子图, 对 $u,v\in V^*, d^*_{u,v}, d_{u.v}$, 分别表示在 D^* 与 D 中从点 u 到 v 的距离, 则 $d_{u.v} \le d^*_{u,v}$.

定理 4 当 $n \ge 5, 2 \le k \le n-1$ 时， $G_{k,n}$ 为 n 阶强连通竞赛图，且 $\gamma(G_{k,n}) = n+1$.

证明 (I) 由于 $G_{k,n}$ 的子图 H_{n-1} 中含有圈 $(1,2,3,\ldots,n-1,1)$, 又 $k\in N^+(n), k-1, k-2$ 或者 $k+1$ 中至少有一个属于 $N^-(n)$, 所以 $G_{k,n}$ 强连通.

由文献 [4] 知 H_{n-1} 为 $n-1$ 阶竞赛图. 又对任意 $v\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}$, 都有 $v\in N^-(n)$ 或 $v\in N^+(n)$, 二者必居且只居其一，故 $G_{k,n}$ 为竞赛图.

由以上 $G_{k,n}$ 为 n 阶强连通竞赛图.

(II) 先证明 $d=n-2$. 由文献 [4] 知在子图 H_{n-1} 中, 有 $d^*_{1,n-1}=d^*=n-2$, 且易知在母图 $G_{k,n}$ 中, 从点 1 到 $n-1$ 无更短的有向途径, 故 $d_{1,n-1}=n-2$. 又任给 $u,v\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}$, 都有 $d_{u,v}\le d^*_{u,v}\le d^*=n-2$.

下面对任意 $v\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}$, 分别证明 $d_{v,n}\le n-2, d_{n,v}\le n-2$.

(i). 记 $t=\min N^-(n)$, 则 $t\le n-2$ (事实上，若 $k\le n-3$, 由于 $k+1\in N^-(n)$, 所以 $t\le k+1\le n-2$; 若 $k=n-1$ 或 $k=n-2$, 由于顶点 $k-1,k-2$ 中至少有一个属于 $N^-(n)$, 所以 $t\le k-1\le(n-1)-1=n-2$).

因为 $d_{v,n}\le d_{v,t}+d_{t,n}=d_{v,t}+1$. 当 $1\le v\le t$ 时， $d_{v,t}=t-v\le(n-2)-1\le n-3$; 当 $v=t+1$ 时， $d_{v,t}\le d_{v,t+2}+d_{t+2,t}=1+1=2$; 当 $t+2\le v\le n-1$ 时， $d_{v,t}=1$. 所以 $d_{v,n}\le d_{v,t}+1\le n-2$.

(ii). 因为 $d_{n,v}\le d_{n,k}+d_{k,v}=1+d_{k,v}$.

当 $1\le v\le k-2$ 时， $d_{k,v}=1$; 当 $v=k-1$ 时， $d_{k,v}\le d_{k,k+1}+d_{k+1,v}=1+1=2$; 当 $k\le v\le n-1$ 时，由条件 $k\ge 2$, 得 $d_{k,v}=v-k\le(n-1)-2=n-3$.

所以 $d_{n,v}\le 1+d_{k,v}\le n-2$.

因此 $d=\max_{u,v\in V}\{d_{u,v}\}=n-2$ 得证. 由引理 3, $\gamma(G_{k,n})=n+1$.

定理 5 设 $n\ge 5$, D 为 n 阶强连通竞赛图， $\gamma(D)$ 达到次大值 $n+1$ 的充要条件：存在满足 $2\le k\le n-1$ 的正整数 k, 使得 D 同构于图簇 $G_{k,n}$ 中的某一个图.

证明 *充分性*. 若存在 $2\le k\le n-1$, 使得 D 同构于 $G_{k,n}$, 由定理 4 即得 $\gamma(D)=n+1$.

必要性. 若 $\gamma(D)=n+1$, 由定理 2 有 $d=n-2$. 设 $D=(V,E)$, 其中 $V=\{1,2,3,...,n\}$, 由 $d=n-2$ 知至少存在一对顶点 $u,v\in V$, 使得 $d_{u,v}=n-2$. 不妨设 $d_{1,n-1}=n-2$, 且设 $(1,2,3,...,n-1)$ 是与有向距离 $d_{1,n-1}$ 对应的从点 1 到 $n-1$ 的一条最短有向途径. 由

$d_{1,n-1}=n-2$ 知 $(j,i)\overline{\in}E$ $(3\leq j+2\leq i\leq n-1)$, 所以 $(i,j)\in E$ $(3\leq j+2\leq i\leq n-1)$, 而由顶点集 $\{1,2,3,...,n-1\}$, 及边集 $E=\{(i,i+1)|1\leq i\leq n-2\}\cup\{(i,j)|3\leq j+2\leq i\leq n-1\}$ 构成的 D 的 $n-1$ 阶子图即竞赛图 H_{n-1}, 这就证明了 D 含有与 H_{n-1} 同构的 $n-1$ 阶子图.

再考虑顶点 n 与顶点 $1,2,3,...,n-1$ 的关系，由于 D 为强连通竞赛图，所以 $N^-(n)$ 与 $N^+(n)$ 均非空. 记 $k=\max N^+(n)$, 即 $k\in N^+(n)$ 但 $k+1,k+2,...,n-1\in N^-(n)$. 易知 $k\neq 1$, 否则， D 同构于图 H_n(D 中的顶点 $n,1,2,...,n-2,n-1$ 分别对应 H_n 中的顶点 $1,2,3,...,n-1,n$), 由定理 3, $\gamma(D)=n+2\neq n+1$. 因此， $2\leq k\leq n-1$.

当 $1\leq i\leq k-3$ 时, 必有 $i\in N^+(n)$, 否则, 存在从点 1 到 $n-1$ 的有向途径 $(1,2,...,i,n,k,k+1,...,n-1)$, 其长度不大于 $n-3$, 与 $d_{1,n-1}=n-2$ 不符.

下面分情形考虑顶点 $k-1,k-2$.

(i). 若 $2\leq k\leq n-3, k-1,k-2$ 可以都属于 $N^-(n)$, 或者都属于 $N^+(n)$, 也可以一个属于 $N^-(n)$ 另外一个属于 $N^+(n)$.

(ii). 若 $k=n-1$, 则 $k-1,k-2$ 中至少有一个属于 $N^-(n)$, 否则 $N^-(n)$ 为空集.

(iii). 若 $k=n-2$, 则 $k-1,k-2$ 中至少有一个属于 $N^-(n)$, 否则图 D 即图 $H_n,\gamma(D)=n+2\neq n+1$.

综合以上，得到的图即 $G_{k,n}(n\geq 5, 2\leq k\leq n-1)$, 所以存在 $2\leq k\leq n-1$, 使得 D 同构于图簇 $G_{k,n}$ 中的某一个图. 至此，完成了本原指数达到次大值 $n+1$ 的极图的完全刻画.

最后, 作为图 $G_{k,n}(n\geq 5, 2\leq k\leq n-1)$ 的一个应用, 取 $k=n-3$, 令 $k-1,k-2\in N^+(n)$, 所得到的图即文献 [5] 所提到的本原指数为 m $(6\leq m\leq n+2)$ 的图中, 当 $m=n+1$ 的 n $(n\geq 5)$ 阶竞赛图 D, 本原指数 $\gamma(D)=m=n+1=\gamma(G_{k,n})$.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Application* [M]. London: Macmilan, 1976.

[2] 柳柏濂. 关于本原矩阵的本原指数集的分布 [J]. 数学学报， 1989, **32**(6): 803–809.
LIU Bo-lian. *Distribution of primitive exponent sets of primitive matrices* [J]. Acta Math. Sinica, 1989, **32**(6): 803–809. (in Chinese)

[3] 柳柏濂，邵嘉裕. 本原极矩阵集合的完全刻画 [J]. 中国科学 (A 辑), 1991, **34**(1): 5–14.
LIU Bo-lian, SHAO Jia-yu. *Characterization of primitive extremal matrices* [J]. Sci. China Ser. A, 1991, **34**(1): 5–14. (in Chinese)

[4] 叶雪梅. 竞赛图的本原指数及其极图刻画 [J]. 福建师范大学学报 (自然科学版), 1999, **15**(3): 22–25.
YE Xue-mei. *Primitive exponent of tournament and the characterizations of their extremi digraphs* [J]. J. Fujian Normal Univ. Natur. Sci. Ed., 1999, **15**(3): 22–25. (in Chinese)

[5] 叶雪梅. 关于本原竞赛图的连续指数集 [J]. 福建师范大学学报 (自然科学版), 2000, **16**(3): 7–10.
YE Xue-mei. *On the continuous exponent set of primitive tournament* [J]. J. Fujian Normal Univ. Natur. Sci. Ed., 2000, **16**(3): 7–10. (in Chinese)

Characterization of the Tournament with Primitive Exponent Reaching Its Secondary Value

YE Xue-mei

(School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fujian 350007, China)

Abstract: Let D be the disconnected tournament on n vertices $(n\geq 5)$. We prove a complete characterization of the tournament with primitive exponent reaching its secondary value $n+1$.

Key words: tournament; primitive exponent; extreme digraph; secondary value.