研究简报

时不变线性Itô随机系统均方稳定性的充要条件

邓飞其 冯昭枢 刘永清
(华南理工大学自动化系 广州 510641)

关键词: 线性随机系统，均方稳定性，充要条件，系数矩阵，Hurwitz 性质.

1 引言

在随机系统模型中，Itô 型随机系统是最重要的类型之一，许多具有有色噪声的系统都可以借用 Itô 型随机系统加以研究[1]. 关于 Itô 型随机系统的稳定性与控制问题，已有许多研究结果，如文献[1—6]等. 然而有些基本问题并未得到圆满的解决，例如，Itô 型线性随机系统的均方稳定性就尚未有理想的结果.

在以往文献中，关于 Itô 型线性随机系统的稳定性结果主要是由 R. Z. Has'minskii 等人取得的[5]文献[5]讨论了线性 Itô 随机系统的稳定性，其中只对 n 阶线性随机微分方程给出了渐近稳定性的充要条件；对时不变线性 Itô 随机系统建立了二阶矩方程，并未加严格证明地指出了系统平衡态均方稳定性的充要条件，然而并未将矩方程系数矩阵简单表示出来，因而其结果还不够实用. 本文适当地选取二阶矩，对线性 Itô 随机系统建立了二阶矩方程，明确地表示了其系数矩阵. 与文献相比，本文结果具有完整性、实用性.

2 主要结果

考虑线性 Itô 随机系统

$$dx = A(t)xdt + \sum_{j=1}^{m} F_j(t)xd\boldsymbol{W}_j(t), \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$, $A(\cdot)$、$F_j(\cdot) \in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{W}(t) = [W_1(t), W_2(t), \cdots, W_m(t)]^{\mathrm{T}} (t \geqslant 0)$ 是定义在完全概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上具有独立分量的 m 维标准 Wiener 过程. 下面定义 $A \oplus A = I_n \otimes A + A \otimes I_n$，而 $\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积[8]. 关于随机系统均方稳定性的定义，见文献[1].

1) 国家自然科学基金资助的项目.
本文于1994年10月31日收到

记 $[x]=x\otimes x$. 经推导有

$$dE[x]/dt=\left[A(t)\oplus A(t)+\sum_{j=1}^{m}F_j(t)\otimes F_j(t)\right]E[x], \tag{2}$$

定理 1. (1) 之平衡态均方稳定(一致稳定、渐近稳定)的充要条件是：确定型线性系统

$$\dot{y}=\left[A(t)\oplus A(t)+\sum_{j=1}^{m}F_j(t)\otimes F_j(t)\right]y \tag{3}$$

之零解稳定(一致稳定、渐近稳定).

定理 2. 当 (1) 为时不变系统 (A, $F_j=$ const.) 时，(1) 之平衡态均方渐近稳定的充要条件是：矩阵 $M=A\oplus A+\sum_{j=1}^{m}F_j\otimes F_j$ 稳定(具有 Hurwitz 性质).

3　解的均方表达式、Lyapunov 函数

下设 $A,F_j=$ const.. 由 (2) 易求得 (1) 之解的均方表达式

$$E[x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2]^{\mathrm{T}}=Ke^{\left(A\oplus A+\sum_{j=1}^{m}F_j\otimes F_j\right)(t-t_0)}E[x(t_0)], \tag{4}$$

其中

$$\begin{array}{c}K=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.\\ \quad(1)\qquad\qquad (n+1)\qquad ((n-1)n+1)\end{array} \tag{5}$$

对 (2), 我们有确定型的 Lyapunov 函数 $V=E[x]^{\mathrm{T}}PE[x]$, 其中 P 是下述 Lyapunov 方程之正定解

$$\left(A\oplus A+\sum_{j=1}^{m}F_j\otimes F_j\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A\oplus A+\sum_{j=1}^{m}F_j\otimes F_j\right)=-Q(Q>0). \tag{6}$$

4　扰动分析

考虑扰动系统

$$dx=[Ax+\Phi(t,x)]dt+\sum_{j=1}^{m}F_jxdW_j, \tag{7}$$

其中 $\Phi(t,x)$ 满足

$$\|\Phi(t,x)\|_2\leqslant k\|x\|_2(k=\text{const.}). \tag{8}$$

定理 3. 若 $Re\lambda(M)<0$, 且

$$k<\{2\sqrt{2n}\,n^2\|(M\oplus M)^{-1}\|_F\}^{-1}, \tag{9}$$

则 (7) 之平衡态均方渐近稳定.

注. 可采用上述确定型 Lyapunov 函数证明定理 3. 记

$$\beta = \frac{1}{2} - 4n^5k^2\|(M \oplus M)^{-1}\|_F^2(>0),$$

则可得

$$\dot{V} \leqslant -\beta E[x]^{\mathrm{T}} E[x], \tag{10}$$

从而得定理 3 之结论. 这种方法可用于更多问题的研究.

参 考 文 献

[1] 刘永清,冯昭枢. 大型动力系统的理论与应用,卷 4: 随机、稳定与控制. 广州: 华南理工大学出版社, 1992. 49, 73.

[2] Feng Zhaoshu, Liu Yongqing. Stability Analysis and Stabilization Synthesis of Stochastic Large-Scale Systems. Beijing & New York:Science Press, 1995.

[3] Ladde GS, Lakshmikantham V. Random Differential Inequalities. New York: Academic Press, 1980.

[4] Has'minskii RZ. Necessary and sufficient conditon for the asymptotic stability of linear stochastic systems. Theory Prob. Appl. 1967, **12**:144—147.

[5] Has'minskii RZ. Stochastic Stability of Differential Equations. Nauka, Moscow, 1969. English Translation: Sijthoff and Nordhoff. Alphen aan den Rijn The Netherlands, 1980. 199—243.

[6] 郭雷. 时变随机系统. 长春: 吉林科学技术出版社, 1993.

[7] 胡宣达. 随机微分方程稳定性理论. 南京: 南京大学出版社, 1986.

[8] 陈公宁. 矩阵理论与应用. 北京: 高等教育出版社, 1990.

[9] 邓飞其,冯昭枢,刘永清. 矩阵方程 $A^{\mathrm{T}}P + PA + \sum_{i=1}^{m} F_i^{\mathrm{T}} P F_i = -Q_i$ 的解及其应用. 控制理论与应用. 1996, **13**(2): 163—168.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR MEAN-SQUARE STABILITY OF TIME-INVARIANT LINEAR ITÔ STOCHASTIC SYSTEMS

DENG FEIQI FENG ZHAOSHU LIU YONGQING

(Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Key words: Linear stochastic systems, mean-square stability, necessary and sufficient condition, coefficient matrices, Hurwitz property.