第 28 卷　第 6 期
2002 年 11 月
自　动　化　学　报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 28, No. 6
Nov., 2002

短文

时变参数遗忘梯度估计算法的收敛性[1)]

丁　锋　　丁　韬　　杨家本　　徐用懋
(清华大学自动化系　北京　100084)
(E-mail: dingf@mail.tsinghua.edu.cn)

摘　要　提出了时变随机系统的遗忘梯度辨识算法，并运用随机过程理论研究了算法的收敛性. 分析表明，遗忘梯度算法的性能类似于遗忘因子最小二乘法，可以跟踪时变参数，但计算量要小得多，且数据的平稳性可以减小参数估计误差上界和提高辨识精度. 阐述了最佳遗忘因子的选择方法，以获得最小参数估计上界. 对于确定性时不变系统，遗忘梯度算法是指数速度收敛的；对于时变或时不变随机系统，遗忘梯度算法的参数估计误差一致有上界.

关键词　时变系统，辨识，参数估计
中图分类号　TP273

CONVERGENCE OF FORGETTING GRADIENT ESTIMATION ALGORITHM FOR TIME-VARYING PARAMETERS

DING Feng　DING Tao　YANG Jia-Ben　XU Yong-Mao
(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)
(E-mail: dingf@mail.tsinghua.edu.cn)

Abstract　Forgetting factor stochastic gradient algorithm (FG algorithm for short) is presented and its convergence is studied by using stochastic process theory. The analyses indicate that the FG algorithm can track the time-varying parameters and has the same properties as the forgetting factor least squares algorithms but takes less computational effort, and that the stationary data can improve the precision of the parameter estimates. The way of choosing the forgetting factor is stated so that the minimum upper bound of the parameter estimation error is obtained. For time invariant deterministic systems, the FG algorithm is exponentially convergent; for time-varying or time invariant stochastic systems, the estimation error given by the FG algorithm consistently has the upper bound.

Key words　Time-varying system, identification, parameter estimation

1) 国家自然科学基金(60074029)、国家自然科学基金重点项目(69934010)、清华大学信息学院创新基金资助
收稿日期　2000-10-31　　收修改稿日期　2001-07-20

1　引言

时变系统的遗忘因子最小二乘法(FFLS,Forgetting Foctor Least Squares method)的收敛性研究受到了普遍的关注,文献[1～5]在平稳性假设或各态遍历条件下研究了 FFLS 算法参数估计误差(协方差)的性质,即对于充分大的 t,参数估计误差 $\tilde{\theta}(t)$ 满足

$$\mathrm{E}[\|\tilde{\theta}(t)\|^2] \leqslant k_1(1-\lambda)\sup \mathrm{E}[v^2(t)] + \frac{k_2}{1-\lambda}\sup \mathrm{E}[\|w(t)\|^2] \tag{1}$$

其中矩阵 X 的范数定义为 $\|X\|^2=\mathrm{tr}[XX^{\mathrm{T}}]$,$0<\lambda<1$ 为遗忘因子,k_1,k_2,c 为正常数,$v(t)$ 和 $w(t)$ 分别为观测噪声和参数变化率.

对于确定性时变系统(即 $v(t)\equiv 0$),当 $\lambda\to 0$ 时,式(1)参数估计误差上界最小. 然而,遗憾的是,这个结论是错误的,因为当 $\lambda\to 0$ 时,FFLS 算法的协方差矩阵 $P(t)\to\infty$,不可能得到有界参数估计误差. 平稳性和各态遍历条件,只是从纯粹数学研究的需要而提出的[2],因此,在此假设下得到的结论在实际应用中是值得商榷的.

为了解决各态遍历假设下估计误差与协方差阵的不相容问题,丁锋和杨家本在没有平稳性和各态遍历条件下研究了 FFLS 的性能[6],得到的结论正好与协方差阵的性质是相容的,改进了文献[1～5]的结果. 文献[6]虽然解决了估计误差与协方差阵的相容问题,但估计误差上界分母出现 λ^{N-1}项,当 $\lambda\to 0$ 时,误差上界趋于无穷,这是所不期望的. 本文提出的遗忘梯度算法,由于没有协方差矩阵相容问题,只要信息向量满足 $\|\varphi(t)\|^2\geqslant\alpha>0$(即只要输入信号采用±1 的伪随机二进制序列),参数估计误差就具有式(1)的简单形式.

辨识方法的提出和辨识方法的收敛性分析是辨识领域的两大研究难题[7～10]. 本文运用随机过程理论分析了遗忘梯度算法的收敛性.

2　遗忘梯度算法与基本引理

考虑如下时变线性回归模型的参数辨识问题

$$y(t) = \varphi^{\mathrm{T}}(t)\theta(t-1) + v(t) \tag{2}$$

$$\theta(t) = [a_1(t),a_2(t),\cdots,a_{n_a}(t),b_1(t),b_2(t),\cdots,b_{n_b}(t)]^{\mathrm{T}} \in R^n,\ n = n_a + n_b$$

$$\varphi^{\mathrm{T}}(t)=[-y(t-1),-y(t-2),\cdots,-y(t-n_a),\ u(t-1),u(t-2),\cdots,u(t-n_b)]^{\mathrm{T}}\in R^n$$

其中 $\theta(t)\in R^n$ 为系统的待辨识时变参数向量,$\varphi(t)\in R^n$ 是由系统输入和直到$(t-1)$时刻及以前的输出构成的回归信息向量,$\{u(t)\}$和$\{y(t)\}$分别是系统的输入和输出序列,$\{v(t)\}$是零均值不相关随机噪声序列,上标 T 表示矩阵转置.

估计参数 $\theta(t)$的常规随机梯度算法(SG)[10]可表示为

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\varphi(t)}{r(t)}[y(t) - \varphi^{\mathrm{T}}(t)\hat{\theta}(t-1)] \tag{3}$$

$$r(t) = r(t-1) + \|\varphi(t)\|^2,\ r(0) = 1 \tag{4}$$

其中 $\hat{\theta}(t)$为 $\theta(t)$的估计,I 为单位阵.

估计参数 $\theta(t)$的遗忘因子随机梯度算法,简称遗忘梯度算法(FG)[10]可表示为

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\varphi(t)}{r(t)}[y(t) - \varphi^{\mathrm{T}}(t)\hat{\theta}(t-1)] \tag{5}$$

$$r(t)=\lambda r(t-1)+\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2,\ 0\leqslant\lambda<1,\ r(0)=r_0\geqslant 0 \tag{6}$$

引理 1. 对于系统(2),如果下列强持续激励条件成立[2]

A1) $\alpha I\leqslant\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\boldsymbol{\varphi}(t+i)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+i)\leqslant\beta I$, a.s., $t>0$, $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$, $N\geqslant n$.

算法(3)~(4)中 $r(t)$ 满足

$$(t-N+1)n\alpha+1\leqslant r(t)\leqslant n(t+N-1)\beta+1,\ \text{a.s.} \tag{7}$$

如果选择 $r(0)$ 满足

$$\frac{n\alpha}{1-\lambda}\leqslant r(0)\leqslant\frac{nN\beta}{1-\lambda},\ 0<\lambda<1,$$

则算法(5)~(6)中 $r(t)$ 满足

$$\frac{\lambda^{N-1}}{1-\lambda}n\alpha\leqslant r(t)\leqslant\frac{M}{1-\lambda},\ \text{a.s.},\ M\triangleq nN\beta,\ 0<\lambda<1 \tag{8}$$

证明. 引理 1 的前半部分证明很简单,这里从略. 引理的后半部分可参见文献[10]的证明. 证毕.

引理 2. 对于系统(2),定义转移矩阵

$$L(t+1,i)=\left[I-\frac{\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)}{r(t)}\right]L(t,i),\quad L(i,i)=I \tag{9}$$

引理 1 中持续激励条件 A1)成立,则对于算法(5)~(6),下列不等式成立

$$\rho_t\triangleq\lambda_{\max}[L^{\mathrm{T}}(t+N,t)L(t+N,t)]\leqslant 1-\frac{N\alpha^2(1-\lambda)}{M^2(N+1)^2}\triangleq\rho,\ \text{a.s.}$$

其中 $\lambda_{\max}(X)$ 表示 X 的最大特征值.

证明. 设 $\boldsymbol{v}_0$ 是矩阵 $L^{\mathrm{T}}(t+N,t)L(t+N,t)$ 的最大特征值 ρ_t 对应的单位特征向量,构造差分方程[9]

$$\boldsymbol{x}_{i+1}=\left[I-\frac{\boldsymbol{\varphi}(i)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(i)}{r(i)}\right]\boldsymbol{x}_i=L(i+1,i)\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{v}_0 \tag{10}$$

利用转移矩阵 $L(t,i)$ 的性质 $L(t,i)L(i,s)=L(t,s)$,有

$$\boldsymbol{x}_{t+N}=L(t+N,t)\boldsymbol{x}_t=L(t+N,t)\boldsymbol{v}_0$$

$$\|\boldsymbol{x}_{t+N}\|^2=\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}(t+N,t)L(t+N,t)\boldsymbol{v}_0=\rho_t$$

$$\boldsymbol{x}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{i+1}=\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\left[I-\frac{\boldsymbol{\varphi}(i)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(i)}{r(i)}\right]^2\boldsymbol{x}_i\leqslant\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i-\frac{\|\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{x}_i\|^2}{r(i)}$$

于是有

$$\frac{\|\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{x}_i\|^2}{r(i)}\leqslant\|\boldsymbol{x}_i\|^2-\|\boldsymbol{x}_{i+1}\|^2$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\|\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+i)\boldsymbol{x}_{t+i}\|^2}{r(t+i)}\leqslant\|\boldsymbol{x}_t\|^2-\|\boldsymbol{x}_{t+N}\|^2=1-\rho_t \tag{11}$$

对任意 $i\in[0,N-1]$,利用公式 $(\sum a_ib_i)^2\leqslant(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$,由式(10)和(11)有

$$\|\boldsymbol{x}_{t+i}-\boldsymbol{v}_0\|=\left\|\sum_{j=0}^{i-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}(t+j)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+j)}{r(t+j)}\boldsymbol{x}_{t+j}\right\|\leqslant\sqrt{i(1-\rho_t)}\leqslant\sqrt{N(1-\rho_t)} \tag{12}$$

持续激励条件 A1)取迹,可得

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2\leqslant M=nN\beta,\ \text{a.s.},\ t>0 \tag{13}$$

在条件 A1)两边左乘 $\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}$,右乘 $\boldsymbol{v}_0$,并利用式(8),(11)和(12),有

$$\alpha N \leqslant \boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=0}^{N-1}\boldsymbol{\varphi}(t+i)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+i)\boldsymbol{v}_0 \leqslant \sqrt{\frac{M}{1-\lambda}}\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}(t+i)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+i)}{\sqrt{r(t+i)}}\boldsymbol{v}_0 \leqslant$$

$$\sqrt{\frac{M}{1-\lambda}}\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\sqrt{M}\,\|\boldsymbol{x}_{t+i}-\boldsymbol{v}_0\| + \left[\sum_{i=0}^{N-1}\|\boldsymbol{\varphi}(t+i)\|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\|\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+i)\boldsymbol{x}_{t+i}\|^2}{r(t+i)}\right]^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$M(N+1)\sqrt{N}\sqrt{\frac{1-\rho_t}{1-\lambda}},\ \text{a.s.}$$

从上式求得 ρ_t 即得引理的结论.　　证毕.

引理 3. 对于系统(2),引理 1 中持续激励条件 A1)成立,则对于算法(3)～(4),下列不等式成立

$$\rho_t = \lambda_{\max}[L^{\mathrm{T}}(t+N,t)L(t+N,t)] \leqslant 1 - \frac{N\alpha^2}{M(N+1)^2[n(t+2N-1)\beta+1]},\ \text{a.s.}$$

证明. 类似于引理 2 的证明. 在条件 A1)两边左乘 $\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}$,右乘 $\boldsymbol{v}_0$,考虑到算法(3)～(4)中 $r(t)$是递增的,利用式(7),(11)和(12),有

$$\alpha N\leqslant\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=0}^{N-1}\boldsymbol{\varphi}(t+i)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+i)\boldsymbol{v}_0\leqslant\sqrt{r(t+N-1)}\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\boldsymbol{\varphi}(t+i)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+i)}{\sqrt{r(t+i)}}\boldsymbol{v}_0\leqslant$$

$$\sqrt{r(t+N-1)}\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\sqrt{M}\,\|\boldsymbol{x}_{t+i}-\boldsymbol{v}_0\|+\left[\sum_{i=0}^{N-1}\|\boldsymbol{\varphi}(t+i)\|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\|\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+i)\boldsymbol{x}_{t+i}\|^2}{r(t+i)}\right]^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$\sqrt{n(t+2N-1)\beta+1}(N+1)\sqrt{NM(1-\rho_t)},\ \text{a.s.}$$

从上式求得 ρ_t 即得引理的结论.　　证毕.

引理 4[2]. 设非负序列$\{x(t)\}$,$\{a_t\}$,$\{b_t\}$满足下列关系

$$x(t+1)\leqslant(1-a_t)x(t)+b_t,\ t\geqslant 0$$

而 $a_t\in[0,1)$,$\sum_{t=1}^{\infty}a_t=\infty$,$x(0)<\infty$,则有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{b_t}{a_t}$$

其中假设上式右端极限存在.

3　主要结果

关于遗忘梯度算法(5)～(6)的收敛性有如下定理.

定理 1. 对于时变系统(2),假设观测噪声$\{v(t)\}$和参数变化率$\{\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{\theta}(t)-\boldsymbol{\theta}(t-1)\}$是与输入$\{u(t)\}$不相关的零均值随机噪声序列,且满足

A2)　$\mathrm{E}[v(t)]=0,\ \mathrm{E}[\boldsymbol{w}(t)]=0,\ \mathrm{E}[v(t)\boldsymbol{w}(i)]=0$

A3)　$\mathrm{E}[v(t)v(i)]=0,\ \mathrm{E}[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(i)]=0,\ i\neq t$

A4)　$\mathrm{E}[v^2(t)]=\sigma_v^2(t)\leqslant\sigma_v^2<\infty,\ \mathrm{E}[\|\boldsymbol{w}(t)\|^2]=\sigma_w^2(t)\leqslant\sigma_w^2<\infty$

持续激励条件 A1)成立,则遗忘梯度算法给出的参数估计误差 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}(t)$均方有界,即

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}(t)\|^2\leqslant\frac{k_1(1-\lambda)}{(\lambda^{N-1})^2}\sigma_v^2+\frac{k_2}{1-\lambda}\sigma_w^2\triangleq f(\lambda)$$

其中

$$k_1 = \frac{2NM^3(N+1)^2}{n^2\alpha^4}, \quad k_2 = \frac{2NM^2(N+1)^2}{\alpha^2}.$$

证明. 定义参数估计误差向量

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}(t) \tag{14}$$

并假定 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(0)$与 $v(t)$无关,且 $\mathrm{E}[\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(0)\|^2]<\infty$,利用式(2)和式(5)可得

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-[\boldsymbol{\theta}(t-1)+\boldsymbol{w}(t)]=L(t+1,t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1)+\frac{\boldsymbol{\varphi}(t)}{r(t)}v(t)-\boldsymbol{w}(t)=$$

$$L(t+1,t-N+1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-N)+\sum_{i=0}^{N-1}L(t+1,t-i+1)\left[\frac{\boldsymbol{\varphi}(t-i)}{r(t-i)}v(t-i)-\boldsymbol{w}(t-i)\right] \tag{15}$$

式(15)两边取范数 $\|*\|^2$ 得到

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|^2\leqslant\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}(t-N)L^{\mathrm{T}}(t+1,t-N+1)L(t+1,t-N+1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-N)+$$

$$2\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}(t-N)L^{\mathrm{T}}(t+1,t-N+1)\sum_{i=0}^{N-1}L(t+1,t-i+1)\left[\frac{\boldsymbol{\varphi}(t-i)}{r(t-i)}v(t-i)-\boldsymbol{w}(t-i)\right]+$$

$$N\sum_{i=0}^{N-1}\left\|L(t+1,t-i+1)\left[\frac{\boldsymbol{\varphi}(t-i)}{r(t-i)}v(t-i)-\boldsymbol{w}(t-i)\right]\right\|^2 \tag{16}$$

由于对任意 $i\geqslant1$,$L^{\mathrm{T}}(t+1,t-i+1)L(t+1,t-i+1)$的最大特征值小于或等于 1. 令 $T(t)=\mathrm{E}[\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|^2]$,式(16)两边取期望,并利用式(13)和(8)得到

$$T(t)\leqslant\rho T(t-N)+0+N\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{E}\left\{\left\|L(t+1,t-i+1)\left[\frac{\boldsymbol{\varphi}(t-i)}{r(t-i)}v(t-i)-\boldsymbol{w}(t-i)\right]\right\|^2\right\}\leqslant$$

$$\rho T(t-N)+2N^2\left[\frac{M(1-\lambda)^2\sigma_v^2}{(\lambda^{N-1}n\alpha)^2}+\sigma_w^2\right] \tag{17}$$

令 $t=Ni+k,0\leqslant k\leqslant N-1$,有

$$T(t=Ni+k)\leqslant\rho^iT(k)+\frac{2N^2}{1-\rho}\left[\frac{M(1-\lambda)^2\sigma_v^2}{(\lambda^{N-1}n\alpha)^2}+\sigma_w^2\right] \tag{18}$$

利用引理 2,可得

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)\|^2]=\lim_{t\to\infty}T(t=Ni+k)=\lim_{i\to\infty}T(t=Ni+k)\leqslant$$

$$\frac{2N^2M^2(N+1)^2}{N\alpha^2(1-\lambda)}\left[\frac{M(1-\lambda)^2\sigma_v^2}{(\lambda^{N-1}n\alpha)^2}+\sigma_w^2\right] \tag{19}$$

整理即得定理 1 的结论. 证毕.

下面研究遗忘因子取何值时,参数估计误差上界最小.

推论 1. 对于随机时变系统 $y(t)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}(t-1)+v(t)$,令定理 1 中 $f'(\lambda)=0$,可得

$$k_1[(2N-3)(1-\lambda)+1](1-\lambda)^2\sigma_v^2=k_2\lambda^{2N-1}\sigma_w^2$$

上式是一个 $2N-1$ 次方程,共有 $2N-1$ 个根,可以用数值方法求解这些根,其中使 $f(\lambda)$为最小的根 $\lambda=\lambda_0$ 即为最佳遗忘因子,$f(\lambda_0)$为最小估计误差上界.

推论 2. 对于时不变随机系统 $y(t)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}+v(t)$,则

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}\|^2]\leqslant\frac{k_1(1-\lambda)}{(\lambda^{N-1})^2}\sigma_v^2\triangleq f_1(\lambda)$$

当 $\lambda\to1$ 时,$f_1(\lambda)=0=\min$,故常规随机梯度算法($\lambda=1$)可以给出时不变随机系统参数的一致估计,而遗忘梯度算法($0<\lambda<1$)只能给出有界估计误差.

推论 3. 对于确定性时变系统 $y(t)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}(t-1)$,则

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}(t)\|]^2\leqslant\frac{k_2}{1-\lambda}\sigma_w^2\triangleq f_2(\lambda)$$

当 $\lambda\to 0$ 时（此时 $r(t)\to \|\varphi(t)\|^2$，遗忘梯度算法(5)～(6)退化为投影算法)，$f_2(\lambda)=k_2\sigma_w^2=\min$.

推论 4. 对于确定性时不变系统 $y(t)=\varphi^{\mathrm{T}}(t)\theta$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{E}[\|\hat{\theta}(t)-\theta\|^2]=0$. 从定理 1 的证明过程可知，遗忘梯度算法给出的参数估计以指数速度收敛于真参数，而常规随机梯度算法($\lambda=1$)的收敛速度为 $\left(\frac{1}{t}\right)$（见定理 3).

这些结论与已有研究成果是相吻合的.

定理 2. 在定理 1 的条件下，如果信息向量 $\varphi(t)$ 有界，即

A5)　$$\|\varphi(t)\|^2\geqslant\alpha>0,\quad \text{a.s.},$$

持续激励条件 A1)成立，则遗忘梯度算法给出的参数估计误差 $\hat{\theta}(t)-\theta(t)$ 均方有界，即

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[\|\hat{\theta}(t)-\theta(t)\|]^2\leqslant k_1(1-\lambda)\sigma_v{}^2+\frac{k_2}{1-\lambda}\sigma_w^2$$

式中

$$k_1=\frac{2NM^3(N+1)^2}{\alpha^4},\quad k_2=\frac{2NM^2(N+1)^2}{\alpha^2}.$$

证明. 由条件 A5)，A1)和式(6)可得

$$\frac{\alpha(1-\lambda^t)}{1-\lambda}+\lambda^t r(0)\leqslant r(t)\leqslant\frac{M(1-\lambda^t)}{1-\lambda}+\lambda^t r(0),\quad \text{a.s.}$$

为简化定理的证明，我们选择 $r(0)$ 满足

$$\frac{\alpha}{1-\lambda}\leqslant r(0)\leqslant\frac{M}{1-\lambda},\quad \text{a.s.},\ 0<\lambda<1$$

则有

$$\frac{\alpha}{1-\lambda}\leqslant r(t)\leqslant\frac{M}{1-\lambda},\quad \text{a.s.}\tag{20}$$

$r(t)$ 采用式(20)，类似于定理 1 的证明，不难推得定理 2 的结论.　　证毕.

条件 A5)是很容易满足的，只要输入采用 ±1 的伪随机二进制序列就可以了. 关于随机梯度算法(3)～(4)的收敛性有如下定理.

定理 3. 对于时不变系统

$$y(t)=\varphi^{\mathrm{T}}(t)\theta+v(t)$$

在定理 1 的条件下，持续激励条件 A1)成立，则随机梯度算法(3)～(4)给出的参数估计误差 $\mathrm{E}[\|\hat{\theta}(t)-\theta\|^2]$ 以 $O\left(\frac{1}{t}\right)$ 的速度收敛于零.

证明. 定义参数估计误差向量

$$\tilde{\theta}(t)=\hat{\theta}(t)-\theta$$

类似于定理 1 的证明可得

$$T(t)\leqslant\rho_{t-N+1}T(t-N)+N\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{E}\left[\left\|L(t+1,t-i+1)\frac{\varphi(t-i)}{r(t-i)}v(t-i)\right\|^2\right]\tag{21}$$

利用引理 3 和式(7)，可得

$$T(t)\leqslant\rho_{t-N+1}T(t-N)+N\sum_{i=0}^{N-1}\frac{M\sigma_v^2}{[(t-N+1-i)n\alpha+1]^2}\leqslant$$
$$\left(1-\frac{N\alpha^2}{M(N+1)^2[n(t+N)\beta+1]}\right)T(t-N)+\frac{N^2M\sigma_v^2}{[(t-2N+2)n\alpha+1]^2}$$

利用引理 4 可得

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[\|\hat{\theta}(t)-\theta\|^2]\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{N^2M\sigma_v^2}{[(t-2N+2)n\alpha+1]^2}\frac{M(N+1)^2[n(t+N)\beta+1)]}{N\alpha^2}=0$$

证毕.

4 结束语

遗忘梯度算法的收敛性分析表明：1)对于确定性时不变系统,遗忘梯度算法是指数速度收敛的；2)对于确定性时变系统,投影算法(在遗忘梯度算法中取 $\lambda\to0$)给出的参数估计误差上界最小;当 $\lambda\to0$ 时,由于遗忘因子最小二乘法中协方差矩阵 $P(t)\to\infty$,导致参数估计误差无上界,这时,遗忘梯度算法的性能优于遗忘因子最小二乘法；3)对于时变或时不变随机系统,遗忘梯度算法的参数估计误差一致有上界.

总之,常规随机梯度算法没有跟踪时变参数的能力,而遗忘梯度算法($0<\lambda<1$)可以跟踪时变参数,给出有界参数估计误差，且数据的平稳性(α 越大,β 越小,或 α 和 β 越接近)可以减小估计误差上界和提高辨识精度.

参 考 文 献

1 丁 锋. 鞅超收敛定理与遗忘因子最小二乘算法的收敛性分析. 控制理论与应用，1997，**14**(1):90～95

2 郭 雷. 时变随机系统——稳定性、估计与控制. 长春：吉林科学技术出版社，1993

3 Ljung L，Priouret P. A result on the mean square error obtained using general tracking algorithms. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*，1991，**5**(4):231～250

4 Ljung L，Priouret P. Remarks on the mean square tracking error. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*，1991，**5**(6):395～403

5 Guo L，Ljung L，Priouret P. Performance analysis of the forgetting factor RLS algorithm. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*，1993，**7**(6):525～527

6 丁 锋. 关于鞅超收敛定理与遗忘因子最小二乘算法的收敛性分析. 控制理论与应用，1999，**16**(4):569～572

7 丁 锋，谢新民，方崇智. 时变系统辨识的多新息方法. 自动化学报，1996，**22**(1):85～91

8 丁 锋. 多变量系统的辅助模型辨识方法的收敛性分析. 控制理论与应用，1997，**14**(2):192～200

9 丁 锋，杨家本. 衰减激励条件下确定性系统多新息算法的收敛性分析. 清华大学学报(自然科学版)，1998，**38**(9):111～115

10 Ding Feng，Yang Jia-Ben，Xu Yong-Mao. Convergence analysis of forgetting gradient algorithm by using martingale hyperconvergence theorem. *Tsinghua Science and Technology*，2000，**5**(2):188～193

丁 锋 1984 年于湖北工学院获学士学位,1990 年和 1994 年在清华大学自动化系分别获得硕士学位和博士学位,现任清华大学自动化系副教授.研究兴趣为自适应辨识与控制及其应用.

丁 韬 1999 年毕业于清华大学自动化系,现为清华大学自动化系在读硕士生. 主要研究兴趣为自动控制与系统工程.

杨家本 1959 年毕业于清华大学动力系,现任清华大学自动化系教授,博士生导师. 主要研究兴趣为系统工程和复杂系统的自组织理论与应用.

徐用懋 1958 年毕业于清华大学动力系，现任清华大学自动化系教授,博士生导师.研究兴趣为控制理论与控制工程，尤其是工业过程的建模、控制与优化.