第27卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0328-11 **文献标识码**: A

H 型群上的平均值公式及唯一延拓性

韩 军 强
(西北工业大学应用数学系，陕西 西安 710072)
(E-mail: southhan@163.com)

摘 要: 本文求得了 H 型群上次 Laplace 算子的基本解，并以此为基础，给出了平均值公式、Hardy 型不等式、不确定原理及唯一延拓性.

关键词: H 型群; 基本解; 平均值公式; 唯一延拓性.
MSC(2000): 35H20
中图分类: O175.25

1 引言和预备知识

设 G 是一个 2 步 Carnot 群, 具有 Lie 代数 $\mathrm{g}=V_1\oplus V_2$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 g 上的一个内积，$\{V_1,V_2\}$ 关于此内积正交. 设 $X=\{X_1,\dots,X_m\}$ 是 V_1 的一组标准正交基， $m=\dim V_1$; $Y=\{Y_1,\dots,Y_k\}$ 是 V_2 的一组标准正交基， $k=\dim V_2$. $\xi\in G$ 在 V_1 上的投影 ξ_1 在基 $\{X_1,\dots,X_m\}$ 下的坐标记为 $x=(x_1,\dots,x_m)\in \mathrm{R}^m$; 在 V_2 上的投影 ξ_2 在基 $\{Y_1,\dots,Y_k\}$ 下的坐标记为 $y=(y_1,\dots,y_k)\in\mathrm{R}^k$. 考虑如下定义的映射 $J:V_2\to \mathrm{End}(V_1)$($\mathrm{End}(V_1)$ 表示 V_1 上的自同态半群): 对任意的 $\xi_1',\xi_1''\in V_1$ 和 $\xi_2\in V_2$ 定义

$$\langle J(\xi_2)\xi_1',\xi_1''\rangle=\langle\xi_2,[\xi_1',\xi_1'']\rangle. \tag{1.1}$$

从定义 (1.1) 显然可得，对任意的 $\xi_1\in V_1$ 和 $\xi_2\in V_2$ 有 $\langle J(\xi_2)\xi_1,\xi_1\rangle=0$.

设 G 是一个 2 步 Carnot 群，如果对每一个 $\xi_2\in V_2$, $|\xi_2|=1$, (1.1) 式定义的映射 $J(\xi_2):V_1\to V_1$ 是正交的，则称 G 是 H 型群 [1].

设 G 是一个 H 型群. 据 [2] 有 $X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac12\sum_{i=1}^k\langle[\xi,X_j],Y_i\rangle\frac{\partial}{\partial y_i}, j=1,\dots,m$. G 上的次 Laplace 算子是 $L=\sum_{j=1}^m X_j^2$, 引入矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \frac12\langle[\xi,X_1],Y_1\rangle & \dots & \frac12\langle[\xi,X_1],Y_k\rangle\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \frac12\langle[\xi,X_m],Y_1\rangle & \dots & \frac12\langle[\xi,X_m],Y_k\rangle\\ \frac12\langle[\xi,X_1],Y_1\rangle & \dots & \frac12\langle[\xi,X_m],Y_1\rangle & \frac{|x|^2}{4} & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac12\langle[\xi,X_1],Y_k\rangle & \dots & \frac12\langle[\xi,X_m],Y_k\rangle & 0 & \dots & \frac{|x|^2}{4} \end{pmatrix},$$

收稿日期: 2005-01-19; **接受日期**: 2006-08-26
基金项目: 国家自然科学基金 (10371099).

那么次 Laplace 算子可改写为 $L=\mathrm{div}(A\nabla)$. G 上的函数 u 的水平梯度记为 $Xu=(X_1u,\dots,X_mu)$, 并记 $|Xu|=\left(\sum_{j=1}^m|X_ju|^2\right)^{\frac{1}{2}}$; 广义散度记为 div_G. 容易验证 $A\nabla u\cdot\nabla v=Xu\cdot Xv$. G 上的一族各向异性伸缩为

$$\delta_\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda^2 y),\quad \lambda>0,\ (x,y)\in G. \tag{1.2}$$

它的生成子为 $Z=\sum_{j=1}^m x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+2\sum_{i=1}^k y_i\frac{\partial}{\partial y_i}$. G 的齐次维数是 $Q=m+2k$, 且有 $\mathrm{div}_G Z=Q$.

G 上任意一点 (x,y) 到原点的距离定义为 $d(x,y)=(|x|^4+16|y|^2)^{\frac{1}{4}}$. 因为 d 关于伸缩 (1.2) 是一次齐次的，所以 $Zd=d$. 令 $\psi=\frac{|x|^2}{d^2}$, 那么 $|Xd|^2=\psi$, $Z\psi=0$.

对任意的 $r>0$, $B_r=\{(x,y)\in G|d(x,y)<r\},\partial B_r=\{(x,y)\in G|d(x,y)=r\}$ 分别称为 G 中以原点为中心、 r 为半径的球和球面. 定义 $|B_r|=\int_{B_r}\psi$,$|\partial B_r|=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}|B_r|$. 若记 $\omega=|B_1|$, 则 $|B_r|=\omega r^Q$. 另一方面， Federer 的余面积公式 (见 [3], 定理 3.2.12) 给出 $|B_r|=\int_0^r\int_{\partial B_\tau}\frac{\psi}{|\nabla \mathrm{d}|}\mathrm{d}H_{m+k-1}\mathrm{d}\tau$, 从而 $|\partial B_r|=\int_{\partial B_r}\frac{\psi}{|\nabla \mathrm{d}|}=Q\omega r^{Q-1}$.

[1] 中构造了 H 型群 G 上次 Laplace 算子的基本解； [2] 和 [4] 中得到了 G 上 p- 次 Laplace 算子的基本解，当 $p=Q$ 时， [5] 中也得到了相同的结果. 利用 Heisenberg 群上次 Laplace 算子的基本解给出平均值公式可见 [6] 和 [7], [7] 还给出了 Hardy 型不等式、不确定原理及唯一延拓性. [8] 借助于关于向量场的 Picone 恒等式建立了 H 型群上 p- 次 Laplace 算子的 Hardy 型不等式.

本文在第 2 节用另一种方法求得了 H 型群上次 Laplace 算子的基本解，我们的方法显得更为直接和容易理解. 在此基础上，给出了平均值公式、 Hardy 型不等式、不确定原理. 在第 3 节，建立了唯一延拓性.

2 基本解、平均值公式、 Hardy 型不等式和不确定原理

定理 2.1 L 在原点处的基本解可表示为 $\Gamma=C_Qd^{2-Q}$, 这里

$$C_Q^{-1}=\int_G\varphi=(4-Q^2)\int_G|x|^2(d^4+1)^{\frac{-6-Q}{4}}.$$

证明 给定 $\varepsilon>0$, 令 $d_\varepsilon=(d^4+\varepsilon^4)^{\frac{1}{4}}$, 取 $f(d)=d_\varepsilon^{2-Q}=(d^4+\varepsilon^4)^{\frac{2-Q}{4}}$, 那么

$$\begin{aligned}f'(d)=&(2-Q)(d^4+\varepsilon^4)^{\frac{-2-Q}{4}}d^3,\\ f''(d)^2=&-(4-Q^2)(d^4+\varepsilon^4)^{\frac{-6-Q}{4}}d^6+3(2-Q)(d^4+\varepsilon^4)^{\frac{-2-Q}{4}}d^2,\end{aligned}$$

从而由 [4] 中的引理 2.1 知

$$Ld_\varepsilon^{2-Q}=(4-Q^2)|x|^2(d^4+\varepsilon^4)^{\frac{-6-Q}{4}}\varepsilon^4=\varepsilon^{-Q}\varphi(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x,y)). \tag{2.1}$$

注意到 $\varepsilon^{-Q}\int_G\varphi\circ\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}=\int_G\varphi=C_Q^{-1}<+\infty$ 及对 $(0,0)$ 的任意邻域 V, 当 $\varepsilon\to 0$ 时均有 $\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(V)\to G$, 所以对任意的 $u\in C_0^\infty(G)$ 有

$$\langle L(C_Qd^{2-Q}),u\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\langle L(C_Qd_\varepsilon^{2-Q}),u\rangle=C_Q\,u(0,0)\int_G\varphi(x,y)\ =\langle\delta,u(x,y)\rangle,$$

即 $L\Gamma=\delta$, 定理得证. □

下面的定理建立了 G 上 (光滑) 函数的表示公式.

定理 2.2 设 $u\in C^\infty(G)$, 则对任意的 $r>0$ 有

$$\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r} u\frac{\psi}{|\nabla d|}=u(0,0)-\int_{B_r}\left(\Gamma-\frac{C_Q}{r^{Q-2}}\right)Lu.$$

证明 对 $v\in C^\infty(G)$, 由散度定理得

$$\int_{B_r}(uLv-vLu)=\int_{\partial B_r}(uA\nabla v\cdot\vec{n}-vA\nabla u\cdot\vec{n}),\tag{2.2}$$

其中 $\vec{n}$ 为 ∂B_r 的单位外法向量. 令 $v=d_\varepsilon^{2-Q}$, 由 (2.1) 式得

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{B_r}uLv&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^{-Q}\int_{B_r}u\varphi(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x,y))=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{B_{\frac{r}{\varepsilon}}}u\delta_\varepsilon\varphi\\&=u(0,0)\int_G\varphi=C_Q^{-1}u(0,0).\end{aligned}\tag{2.3}$$

因为

$$\sum_{j=1}^m\langle[\xi,X_j],Y_i\rangle x_j=\sum_{j=1}^m\sum_{\alpha=1}^m x_\alpha\langle J(Y_i)X_\alpha,X_j\rangle x_j=\langle J(Y_i)\xi_1,\xi_1\rangle=0,$$

所以 $A\nabla d_\varepsilon\cdot\nabla d=\frac{\mathrm{d}\psi_\varepsilon}{d_\varepsilon}$, 其中 $\psi_\varepsilon=\frac{|x|^2}{d_\varepsilon^2}$, 因此

$$\int_{\partial B_r}uA\nabla v\cdot\vec{n}=(2-Q)(r^4+\varepsilon^4)^{\frac{-Q}{4}}r\int_{\partial B_r}u\frac{\psi_\varepsilon}{|\nabla d|}\to(2-Q)r^{-Q+1}\int_{\partial B_r}u\frac{\psi}{|\nabla d|}\quad(\varepsilon\to0^+).\tag{2.4}$$

由 (2.2) 得

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\partial B_r}vA\nabla u\cdot\vec{n}=r^{2-Q}\int_{\partial B_r}A\nabla u\cdot\vec{n}=r^{2-Q}\int_{B_r}Lu.\tag{2.5}$$

又 $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{B_r}vLu=\int_{B_r}d^{2-Q}Lu=\int_{B_r}\frac{\Gamma}{C_Q}Lu$, 于是此式结合 (2.2)–(2.5) 式得

$$u(0,0)-\int_{B_r}\left(\Gamma-\frac{C_Q}{r^{Q-2}}\right)Lu=-\tfrac{(Q-2)C_Q}{r^{Q-1}}\textstyle\int_{\partial B_r}u\frac{\psi}{|\nabla d|}.\tag{2.6}$$

在 (2.6) 式中令 $u\equiv1$ 可得 $-\frac{(Q-2)C_Q}{r^{Q-1}}=\frac{1}{|\partial B_r|}$. 将其代入 (2.6) 式即得定理结论. □

推论 2.1 若 $u\in C^\infty(G)$ 是 $Lu=0$ 的解, 则对任意的 $r>0$ 均有

$$u(0,0)=\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r}u\frac{\psi}{|\nabla d|}.$$

定理 2.3 对 $u\in C_0^\infty(G\backslash\{(0,0)\})$ 及任意的 $r>0$ 有

$$\int_{B_r}\frac{u^2}{\mathrm{d}^2}\psi\le\frac{2}{Q-2}\frac{1}{r}\int_{\partial B_r}u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2\int_{B_r}|Xu|^2.$$

证明 对 u^2 应用定理 2.2 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\int_{\partial B_\rho} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|})\mathrm{d}\rho \\
= \quad & (Q-1)\int_0^r \frac{1}{\rho^2}\tfrac{\rho^{Q-1}}{(Q-2)C_Q}[\textstyle\int_{B_\rho} L(u^2)(\Gamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}})-u(0,0)^2]\mathrm{d}\rho+ \\
& \tfrac{1}{(Q-2)C_Q}\textstyle\int_0^r \rho^{Q-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\int_{B_\rho} L(u^2)(\Gamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}})-u(0,0)^2]\mathrm{d}\rho \\
= & (Q-1)\int_0^r \frac{1}{\rho^2}(-\int_{\partial B_\rho} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|})\mathrm{d}\rho+\tfrac{1}{(Q-2)C_Q}\textstyle\int_0^r \rho^{Q-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\int_{B_\rho} L(u^2)(\Gamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}})]\mathrm{d}\rho. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

注意到在 ∂B_r 上 $\Gamma=\frac{C_Q}{r^{Q-2}}$, 根据余面积公式及 (2.2) 式得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_{B_\rho} L(u^2)(\Gamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}})\mathrm{d}\rho=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\{\int_0^\rho[\int_{\partial B_s} L(u^2)(\Gamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}})\frac{1}{|\nabla d|}]\mathrm{d}s\} \\
&=\frac{(Q-2)C_Q}{\rho^{Q-1}}\int_0^\rho[\int_{\partial B_s} L(u^2)\frac{1}{|\nabla d|}]\mathrm{d}s=\frac{(Q-2)C_Q}{\rho^{Q-1}}\int_{B_\rho} L(u^2) \\
&=\frac{(Q-2)C_Q}{\rho^{Q-1}}\int_{\partial B_\rho} A\nabla(u^2)\frac{\nabla d}{|\nabla d|}. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

将 (2.8) 式代入 (2.7) 式得

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\int_{\partial B_\rho} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|})\mathrm{d}\rho=(Q-1)\int_0^r\frac{1}{\rho^2}(-\int_{\partial B_\rho} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|})\mathrm{d}\rho+\int_0^r\frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} A\nabla(u^2)\frac{\nabla d}{|\nabla d|} \\
&=(Q-1)\int_{B_r} u^2\frac{\psi}{\mathrm{d}^2}+\int_{B_r}\frac{2uXu\cdot Xd}{d}.
\end{aligned}$$

由余面积公式及 $u\in C_0^\infty(G\backslash\{(0,0)\})$ 得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{B}_r} u^2\frac{\psi}{d^2}&=\int_0^r[\int_{\partial B_\rho}\frac{u^2}{d^2}\frac{\psi}{|\nabla d|}]\mathrm{d}\rho=\int_0^r(-\frac{1}{\rho})'[\int_{\partial B_\rho} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}]\mathrm{d}\rho \\
&=-\frac{1}{r}\int_{\partial B_r} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+\int_0^r\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\int_{\partial B_\rho} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}]\mathrm{d}\rho \\
&=-\frac{1}{r}\int_{\partial B_r} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+(Q-1)\int_{B_\varepsilon} u^2\frac{\psi}{d^2}+\int_{B_r}\frac{2uXu\cdot Xd}{d}.
\end{aligned}$$

由上式及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
(Q-2)\int_{B_\varepsilon} u^2\frac{\psi}{d^2}&=\frac{1}{r}\int_{\partial B_r} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}-\int_{B_r}\frac{2uXu\cdot Xd}{d} \\
&\le\frac{1}{r}\int_{\partial B_r} u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+\frac{Q-2}{2}\int_{B_\varepsilon} u^2\frac{\psi}{d^2}+\frac{2}{Q-2}\int_{B_\varepsilon}|Xu|^2,
\end{aligned}$$

定理得证. □

推论 2.2 (Hardy 型不等式) 设 $u\in C_0^\infty(G\backslash\{(0,0)\})$, 则

$$\int_G\frac{u^2}{d^2}\psi\le\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2\int_G|Xu|^2.$$

推论 2.3 (不确定原理) 设 $u \in C_0^\infty(G\backslash\{(0,0)\})$, 则

$$(\int_G |Xu|^2)(\int_G \mathrm{d}^2 u^2 \psi) \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 (\int_G u^2 \psi)^2.$$

证明 对推论 2.3 的不等式右端应用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 (\int_G u^2\psi)^2 &\leq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 (\int_G \frac{u^2}{\mathrm{d}^2}\psi)(\int_G d^2 u^2 \psi) \\ &\leq (\int_G |Xu|^2)(\int_G d^2 u^2 \psi).\end{aligned}$$

3 唯一延拓性

现在考虑方程

$$Lu = Vu \tag{3.1}$$

在固定球 B_{R_0} 上的解 u 的一些性质.

对方程 (3.1) 在 B_{R_0} 上的一个解 u 及任意的 $r < R_0$, 令

$$H(r) = \int_{\partial B_r} u^2 \frac{\psi}{|\nabla d|}, \quad D(r) = \int_{B_r} |Xu|^2, \quad I(r) = \int_{B_r} [|Xu|^2 + Vu^2],$$

并作如下假定：存在 $C > 0$ 和增函数 $f : (0, R_0) \to \mathrm{R}^+$, 使得

$$\int_0^{R_0} \frac{f(r)}{r} \mathrm{d}r < +\infty; \tag{3.2}$$

在 B_{R_0} 上几乎处处有

$$|V| \leq C \frac{f(d)}{d^2} \psi. \tag{3.3}$$

由 (3.2) 式可知 $\lim_{r\to 0+} f(r) = 0$.

引理 3.1 设 u 是 (3.1) 在 B_{R_0} 上的一个解，则对 a.e. $r \in (0, R_0)$ 有

$$H'(r) = \frac{Q-1}{r} H(r) + 2I(r). \tag{3.4}$$

证明 对 u^2 应用定理 2.2, 得

$$H(r) = -\tfrac{r^{Q-1}}{(Q-2)C_Q}[u(0,0)^2 - \textstyle\int_{B_r} L(u^2)(\Gamma - \tfrac{C_Q}{r^{Q-2}})],$$

从而由 (2.8) 式得

$$H'(r) = \frac{Q-1}{r} H(r) + \int_{B_r} L(u^2). \tag{3.5}$$

因为 $L(u^2) = 2Vu^2 + 2|Xu|^2$, 所以

$$I(r) = \frac{1}{2} \int_{B_r} L(u^2). \tag{3.6}$$

由 (3.5) 和 (3.6) 式即得结论. □

引理 3.2 设 u 是 (3.1) 式在 B_{R_0} 上的一个解，则存在只依赖于 Q 和 (3.3) 式中的 C 和 f 的 $r_0>0$, 使得下列情形之一成立:

(1) 在 B_{r_0} 上，$u\equiv 0$; (2) 对任意的 $r\in(0,r_0)$, $H(r)\neq 0$.

证明 假设对某个 $r_0<R_0$, $H(r_0)=0$, 则由 (3.6) 式和散度定理得

$$\begin{aligned}D(r_0)=I(r_0)-\int_{B_{r_0}}Vu^2&\le\frac{1}{2}\int_{B_{r_0}}L(u^2)+\int_{B_{r_0}}|V|u^2\\&=\int_{\partial B_{r_0}}uA\nabla u\cdot\vec{n}+\int_{B_{r_0}}|V|u^2=\int_{B_{r_0}}|V|u^2,\end{aligned}$$

再由 (3.3) 式及定理 2.3 得

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}}|V|u^2&\le Cf(r_0)\int_{B_{r_0}}\frac{u^2}{d^2}\psi\le C\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2f(r_0)\left[\frac{Q-2}{2}\frac{H(r_0)}{r_0}+D(r_0)\right]\\&=C\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2f(r_0)D(r_0)\to 0\quad(r_0\to 0^+),\end{aligned}$$

即得在 B_{r_0} 上必有 $u\equiv 0$. □

从引理 3.2 的证明可以看出 r_0 依赖于 Q,C 和 f, 且满足 $Cf(r_0)<\left(\frac{Q-2}{2}\right)^2$. 作为引理 3.2 的直接推论有

引理 3.3 设 $N(r)=\frac{rI(r)}{H(r)},r\in(0,r_0)$, r_0 如引理 3.2 所给出的，则函数 $r\mapsto N(r)$ 在区间 $(0,r_0)$ 上是绝对连续的. 特别地，对 a.e. $r\in(0,r_0)$, $N'(r)$ 存在.

令

$$\Lambda_{r_0}=\{r\in(0,r_0)|N(r)>\max\{1,N(r_0)\}\},\tag{3.7}$$

由引理 3.3 知 Λ_{r_0} 是一个开集，因此

$$\Lambda_{r_0}=\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j),\quad a_j,b_j\notin\Lambda_{r_0}.\tag{3.8}$$

由引理 3.2, 将 (3.4) 式除以 $H(r)$ 得对 a.e. $r\in(0,r_0)$,

$$\frac{H'(r)}{H(r)}=\frac{Q-1}{r}+2\frac{I(r)}{H(r)}.\tag{3.9}$$

注意到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\ln\frac{H(r)}{r^{Q-1}}]=\frac{H'(r)}{H(r)}-\frac{Q-1}{r}$, 即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln\frac{H(t)}{t^{Q-1}}]=2\frac{N(t)}{t}.\tag{3.10}$$

由 (3.7) 式知，对任意的 $r\in\Lambda_{r_0}$ 有

$$\frac{H(r)}{r}<I(r),\tag{3.11}$$

因此，对任意的 $r\in\Lambda_{r_0}$, $I(r)\neq 0$. 再由引理 3.3 知

$$\frac{N'(r)}{N(r)}=\frac{1}{r}+\frac{I'(r)}{I(r)}-\frac{H'(r)}{H(r)},\quad\text{a.e. }r\in\Lambda_{r_0}.\tag{3.12}$$

下面来具体计算 $\frac{N'(r)}{N(r)}$.

引理 3.4 对 a.e. $r\in\Lambda_{r_0}$, 有

$$\begin{aligned}\frac{N'(r)}{N(r)}=&-\frac{Q-2}{r}\frac{\int_{B_r}Vu^2}{I(r)}+2\frac{\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}}{I(r)}+\frac{8}{r}\frac{\int_{\partial B_r}\frac{Zu}{r}\frac{1}{d^2}(\sum_{i=1}^k y_iT_iu)\frac{1}{|\nabla d|}}{I(r)}-\\&\frac{2}{r}\frac{\int_{B_r}ZuVu}{I(r)}+\frac{\int_{\partial B_r}Vu^2\frac{1}{|\nabla d|}}{I(r)}-2\frac{I(r)}{H(r)}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

证明 由余面积公式及定理 2.2 得

$$\begin{aligned}\frac{I'(r)}{I(r)}=&\frac{Q-2}{r}-\frac{Q-2}{r}\frac{\int_{B_r}Vu^2}{I(r)}+2\frac{\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}}{I(r)}+\frac{8}{r}\frac{\int_{\partial B_r}\frac{Zu}{r}\frac{1}{d^2}(\sum_{i=1}^k y_iT_iu)\frac{1}{|\nabla d|}}{I(r)}-\\&\frac{2}{r}\frac{\int_{B_r}ZuLu}{I(r)}+\frac{\int_{\partial B_r}Vu^2\frac{1}{|\nabla d|}}{I(r)},\end{aligned}\tag{3.14}$$

由 (3.9),(3.12) 和 (3.14) 式即得结论. □

引理 3.5 存在常数 $B=B(Q,C,f)>0$, 使得对任意的 $r\in\Lambda_{r_0}$ 有

$$D(r)\le BI(r).\tag{3.15}$$

证明 类似于引理 3.2 中的证明, 有

$$\begin{aligned}D(r)\le I(r)+\int_{B_r}|V|u^2&\le I(r)+\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2Cf(r)\left[\frac{Q-2}{2}\frac{H(r)}{r}+D(r)\right]\\&<\left[1+\frac{2}{Q-2}Cf(r)\right]I(r)+\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2Cf(r)D(r),\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 (3.11) 式. 令 $B=\frac{1+\frac{2}{Q-2}Cf(r_0)}{1-(\frac{2}{Q-2})^2Cf(r_0)}$, 即得结论. □

引理 3.6 设 u 是 (3.1) 式的解, 存在 $C_1>0$ 和满足 (3.2) 式的增函数 $g:(0,R_0)\to \mathrm{R}^+$ 使得

$$|\sum_{i=1}^k y_iT_iu|\le C_1g(d)|x|^2|u|,\tag{3.16}$$

其中 $T_i=\sum_{j,j'=1}^m x_{j'}\langle[X_{j'},X_j],Y_i\rangle\frac{\partial}{\partial x_j}$. 则存在常数 $M=M(Q,C,C_1,f,g)>0$, 使得对 a.e. $r\in\Lambda_{r_0}$, 有

$$\frac{N'(r)}{N(r)}\ge -M[\frac{f(r)+g(r)}{r}].\tag{3.17}$$

证明 先对 (3.13) 式右端的第一、五、四项分别进行估计. 类似于引理 3.2 中的证明, 结合 (3.11) 和 (3.15) 式得

$$\begin{aligned}\left|-\frac{Q-2}{r}\int_{B_r}Vu^2\right|&\le C\frac{Q-2}{r}f(r)\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2\left[\frac{Q-2}{2}\frac{H(r)}{r}+D(r)\right]\\&<C(Q-2)\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2\left(\frac{Q-2}{2}+B\right)\frac{f(r)}{r}I(r).\end{aligned}\tag{3.18}$$

由 (3.3) 及 (3.11) 式得

$$\left|\int_{\partial B_r} Vu^2\frac{1}{|\nabla d|}\right| \le C\frac{f(r)}{r^2}H(r) < \frac{Cf(r)}{r}I(r). \tag{3.19}$$

由 (3.3) 式得 $|-\frac{2}{r}\int_{B_r} ZuVu| \le \frac{2Cf(r)}{r}\int_{B_r}|\frac{1}{d}\psi Zu|\frac{|u|}{d}$，由于

$$A\nabla d\cdot\nabla u = \frac{1}{d}\psi Zu + \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{4}{d^2}\langle[\xi, X_j], Y_i\rangle y_i\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{1}{d}\psi Zu + \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k}\frac{4y_i}{d^2}T_iu,$$

从而

$$\left|\frac{2}{r}\int_{B_r} ZuVu\right| \le \frac{2Cf(r)}{r}\int_{B_r}|A\nabla d\cdot\nabla u|\frac{|u|}{d} + \frac{2Cf(r)}{r}\int_{B_r}\frac{1}{d}|\sum_{i=1}^{k}\frac{4y_i}{d^2}T_iu|\frac{|u|}{d}. \tag{3.20}$$

类似于引理 3.2 中的证明，由 (3.11) 和 (3.15) 式及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|A\nabla d\cdot\nabla u|\frac{|u|}{d} &= \int_{B_r}|Xd\cdot Xu|\frac{|u|}{d} \le (\int_{B_r}\frac{u^2}{d^2}\psi)^{\frac{1}{2}}(\int_{B_r}|Xu|^2)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \frac{2}{Q-2}\left[\frac{Q-2}{2}\frac{H(r)}{r} + D(r)\right]^{\frac{1}{2}} D(r)^{\frac{1}{2}} < \frac{2}{Q-2}\left[\left(\frac{Q-2}{2}+B\right)B\right]^{\frac{1}{2}} I(r).\end{aligned} \tag{3.21}$$

又由 Hölder 不等式及 (3.16) 式得

$$\begin{aligned}\int_{B_r}\frac{1}{d}|\sum_{i=1}^{k}\frac{4y_i}{d^2}T_iu|\frac{|u|}{d} &\le (\int_{B_r}\frac{\frac{16}{d^4}|\sum_{i=1}^{k}y_iT_iu|^2}{d^2\psi})^{\frac{1}{2}}(\int_{B_r}\frac{u^2}{d^2}\psi)^{\frac{1}{2}} \le 4C_1g(r)\int_{B_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\\ &< 4C_1\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2\left(\frac{Q-2}{2}+B\right)g(r)I(r).\end{aligned} \tag{3.22}$$

将 (3.21) 和 (3.22) 代入 (3.20) 式得

$$\left|\frac{2}{r}\int_{B_r} ZuVu\right| \le G\frac{f(r)}{r}I(r), \tag{3.23}$$

其中 $G = G(Q, C, C_1, f, g) > 0$.

(3.13) 和估计 (3.18),(3.19),(3.23) 式容许得出结论：对 a.e. $r \in \Lambda_{r_0}$,

$$\frac{N'(r)}{N(r)} = 2\frac{\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}}{I(r)} + \frac{8}{r}\frac{\int_{\partial B_r}\frac{Zu}{r}\frac{1}{d^2}(\sum_{i=1}^{k}y_iT_iu)\frac{1}{|\nabla d|}}{I(r)} - 2\frac{I(r)}{H(r)} + O(\frac{f(r)}{r}), \tag{3.24}$$

其中 $O(\frac{f(r)}{r})$ 是一个函数，$|O(\frac{f(r)}{r})| \le L\frac{f(r)}{r}$, $L = L(Q, C, C_1, f, g) > 0$.

现在处理 (3.24) 式右端．由 Hölder 不等式及 (3.16) 式得

$$\begin{aligned}\left|\frac{4}{r}\int_{\partial B_r}\frac{Zu}{r}\frac{1}{d^2}(\sum_{i=1}^{k}y_iT_iu)\frac{1}{|\nabla d|}\right| &\le \frac{4}{r}[\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}]^{\frac{1}{2}}(\int_{\partial B_r}\frac{1}{d^4}\frac{|\sum_{i=1}^{k}y_iT_iu|^2}{\psi|\nabla d|})^{\frac{1}{2}}\\ &\le 4C_1\frac{g(r)}{r}[\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}]^{\frac{1}{2}}(\int_{\partial B_r}u^2\frac{\psi}{|\nabla d|})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

现在分两种情况考虑：

(a) $\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\cdot\int_{\partial B_r}u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\le 2I(r)^2$;

(b) $\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\cdot\int_{\partial B_r}u^2\frac{\psi}{|\nabla d|}> 2I(r)^2$.

如果 (a) 成立，则有 $|\frac{4}{r}\int_{\partial B_r}\frac{Zu}{r}\frac{1}{d^2}(\sum_{i=1}^k y_iT_iu)\frac{1}{|\nabla d|}|\le 4\sqrt{2}C_1\frac{g(r)}{r}I(r)$, 代入 (3.24) 式得

$$\frac{N'(r)}{N(r)}=2\frac{\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}}{I(r)}-2\frac{I(r)}{H(r)}+O(\frac{f(r)+g(r)}{r}),$$

其中 $|O(\frac{f(r)+g(r)}{r})|\le M\frac{f(r)+g(r)}{r}$, $M=M(Q,C,C_1,f,g)>0$. 由 (3.6) 式知

$$\begin{aligned}I(r)&=\frac{1}{2}\int_{B_r}L(u^2)=\int_{\partial B_r}uA\nabla u\cdot\vec{n}=\int_{\partial B_r}uA\nabla u\cdot\frac{\nabla d}{|\nabla d|}\\&=\int_{\partial B_r}u\frac{Zu}{r}\frac{\psi}{|\nabla d|}+\int_{\partial B_r}u\frac{4}{d^3}(\sum_{i=1}^k y_iT_iu)\frac{1}{|\nabla d|}=\int_{\partial B_r}u\frac{Zu}{r}\frac{\psi}{|\nabla d|}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

从 (3.26) 式和 Schwarz 不等式得，对 $r\in\Lambda_{r_0}$ 有

$$I(r)\le(\int_{\partial B_r}u^2\frac{\psi}{|\nabla d|})^{\frac{1}{2}}[\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}]^{\frac{1}{2}}=H(r)^{\frac{1}{2}}[\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}]^{\frac{1}{2}},$$

即得 $\frac{\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}}{I(r)}\ge\frac{I(r)}{H(r)}$, 进而有 (3.17) 式.

如果 (b) 成立，则由 (3.25) 式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned}|\frac{4}{r}\int_{\partial B_r}\frac{Zu}{r}\frac{1}{d^2}(\sum_{i=1}^k y_iT_iu)\frac{1}{|\nabla d|}|&\le 2C_1g(r)\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+2C_1\frac{g(r)}{r}\frac{H(r)}{r}\\&<2C_1g(r)\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+2C_1\frac{g(r)}{r}I(r),\end{aligned}\tag{3.27}$$

其中在最后一个不等式中用了事实: 对 $r\in\Lambda_{r_0}$, (3.11) 式成立. 如果必要的话, 可限制区间 $(0,r_0)$, 使得 r_0 满足下面两个条件:

$$\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2Cf(r_0)<1,\quad 2-4C_1g(r_0)>1.\tag{3.28}$$

由引理 3.2 可知， r_0 已经满足 (3.28) 式中的第一个不等式.

将 (3.27) 式代入 (3.24) 式，得

$$\frac{N'(r)}{N(r)}\ \ge[2-4C_1g(r)]\frac{\int_{\partial B_r}(\frac{Zu}{r})^2\frac{\psi}{|\nabla d|}}{I(r)}-2\frac{I(r)}{H(r)}-M[\frac{f(r)+g(r)}{r}],$$

由 g 的递增性和 (3.28) 式中的第二个不等式及 (b) 知,

$$\frac{N'(r)}{N(r)}\ \ge -M[\frac{f(r)+g(r)}{r}].$$

综合两种情形知 (3.17) 式成立. □

定理 3.1 设对某个 C 和 f, V 满足 (3.3) 式； u 是 (3.1) 式在 B_{R_0} 上的解；存在 $C_1>0$ 和满足 (3.2) 式的增函数 $g:(0,R_0)\to \mathrm{R}^+$, 使得 (3.16) 式对 a.e. $(x,y)\in B_{R_0}$ 均成立. 那么存在 $r_0=r_0(Q,C,C_1,f,g)>0$ 和 $S=S(Q,C,C_1,f,g,u)>0$, 使得如果在 $B_r(0<r<\frac{r_0}{2})$ 上 u 不恒等于零，则对 $0<r<\frac{r_0}{2}$ 有

$$\int_{B_{2r}} u^2\psi \le S\int_{B_r} u^2\psi. \tag{3.29}$$

证明 从对任意的 $t\in(0,r_0)$ 均有 (3.8) 式出发，对 $r<\frac{r_0}{2}$, 有

$$\ln[\frac{H(2r)}{H(r)}2^{1-Q}]=\int_r^{2r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln\frac{H(t)}{t^{Q-1}}]\mathrm{d}t=2\int_r^{2r}\frac{N(t)}{t}\mathrm{d}t \tag{3.30}$$

$$\le 2\int_{(r,2r)\cap\Lambda_{r_0}}\frac{N(t)}{t}\mathrm{d}t+2\int_{J_r}\frac{N(t)}{t}\mathrm{d}t, \tag{3.31}$$

其中 $J_r=\{t\in(r,2r)|t\notin\Lambda_{r_0},N(t)\ge 0\}$, 因为在 J_r 上有 $0\le N(t)\le\max\{1,N(r_0)\}$, 于是

$$\int_{J_r}\frac{N(t)}{t}\mathrm{d}t\le\max\{1,N(r_0)\}\ln 2. \tag{3.32}$$

另一方面，将 (3.17) 式在 (r,b_j) 上积分，其中 $r\in(a_j,b_j)$, (a_j,b_j) 是分解 (3.8) 式中的任意一个区间，得 (因为 $0<a_j<r<b_j<r_0<R_0$)

$$\ln\frac{N(b_j)}{N(r)}=\int_r^{b_j}\frac{N'(t)}{N(t)}\mathrm{d}t\ge -M\int_r^{b_j}\frac{f(t)+g(t)}{t}\mathrm{d}t\ge -M\int_0^{R_0}\frac{f(t)+g(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

从这个不等式及 $b_j\notin\Lambda_{r_0}$ 得对任意的 $r\in\Lambda_{r_0}$,

$$N(r)\le\exp\{M\int_0^{R_0}[f(t)+g(t)]\frac{1}{t}\mathrm{d}t\}N(b_j),$$

所以

$$\int_{(r,2r)\cap\Lambda_{r_0}}\frac{N(t)}{t}\mathrm{d}t\le\exp\{M\int_0^{R_0}[f(t)+g(t)]\frac{1}{t}\mathrm{d}t\}\max\{1,N(r_0)\}\ln 2.$$

将上式及 (3.32) 式代入 (3.31) 式，得

$$H(2r)\le 2^{Q-1}\exp(2\ln 2\max\{1,N(r_0)\}\{1+\exp\{M\int_0^{R_0}[f(t)+g(t)]\frac{1}{t}\mathrm{d}t\}\})H(r). \tag{3.33}$$

令

$$S=2^{Q-1}\exp(2\ln 2\max\{1,N(r_0)\}\{1+\exp\{M\int_0^{R_0}[f(t)+g(t)]\frac{1}{t}\mathrm{d}t\}\}),$$

将 (3.33) 式关于 r 积分，由余面积公式即得结论.

定理 3.2 在定理 3.1 的条件下，如果 u 在原点无限阶为零，即 $\psi^{\frac{1}{2}}u\in L^2(B_{R_0})$, 且对任意的 $k\in\mathbf{N}$ 均有 $\int_{B_r}u^2\psi=O(r^k)$ $(r\to 0^+)$, 那么在 B_{r_0} 上 $u\equiv 0$, 其中 r_0 如定理 3.1 所述.

证明 (3.29) 式迭代 k 次后得

$$\int_{B_{r_0}} u^2\psi \le S^k \int_{B_{r_0\cdot 2^{-k}}} u^2\psi = S^k |B_{r_0\cdot 2^{-k}}|^\beta \cdot \frac{1}{|B_{r_0\cdot 2^{-k}}|^\beta} \int_{B_{r_0\cdot 2^{-k}}} u^2\psi, \tag{3.34}$$

其中 $\beta > 0$ 是一个待定的数. 由于

$$S^k|B_{r_0\cdot 2^{-k}}|^\beta = S^k[\omega(r_0\cdot 2^{-k})^Q]^\beta = \omega^\beta r_0^{\beta Q}(\frac{S}{2^{\beta Q}})^k,$$

取 β 使得 $\frac{S}{2^{\beta Q}} = 1$, 则 (3.34) 式变成

$$\int_{B_{r_0}} u^2\psi \le |B_{r_0}|^\beta \cdot \frac{1}{|B_{r_0\cdot 2^{-k}}|^\beta} \int_{B_{r_0\cdot 2^{-k}}} u^2\psi.$$

当 $k \to \infty$ 时，上式右端趋于零，于是在 B_{r_0} 上 $u \equiv 0$. □

参考文献:

[1] KAPLAN K. *Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, **258**(1): 147–153.
[2] GAROFALO N, VASSILEV D. *Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe-type equations on groups of Heisenberg type* [J]. Duke Math. J., 2001, **106**(3): 411–448.
[3] FEDERER H. *Geometric Measure Theory* [M]. Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.
[4] CAPOGNA L, DANIELLI D, GAROFALO N. *Capacitary estimates and the local behavior of solutions of nonlinear subelliptic equations* [J]. Amer. J. Math., 1996, **118**(6): 1153–1196.
[5] HEINONEN J, HOLOPAINEN I. *Quasiregular maps on Carnot groups* [J]. J. Geom. Anal., 1997, **7**(1): 109–148.
[6] GAVEAU B. *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents* [J]. Acta Math., 1977, **139**(1–2): 95–153.
[7] GAROFALO N, LANCONELLI E. *Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation* [J]. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1990, **40**(2): 313–356.
[8] 韩军强，钮鹏程，韩亚洲. Heisenberg 型群上的几类 Hardy 型不等式 [J]. 系统科学与数学， 2005, **25**(5): 588–598.
HAN Jun-qiang, NIU Peng-cheng, HAN Ya-zhou. *Some Hardy-type inequalities on groups of Heisenberg type* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 2005, **25**(5): 588–598. (in Chinese)

Mean Value Formulas and Unique Continuation on Groups of Heisenberg Type

HAN Jun-qiang
(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Shaanxi, 710072, China)

Abstract: A fundamental solution of the Sub-Laplacian on groups of Heisenberg type is given. On this basis, the mean value formulas, Hardy type inequality, uncertainty principle and unique continuation are established.

Key words: group of Heisenberg type; fundamental solution; mean value formula; unique continuation.