

一种特殊角三角函数值的快速算法

何秋生¹, 郝建军¹, 李 辉¹, 程亚奇²

(1. 中国矿业大学(北京)机电学院, 北京 100083; 2. 中国科学院微电子所, 北京 100029)

摘要: 快速傅立叶变换、兼容 GPS/Galileo 系统接收机中上下变频以及 DDS 中都需要变换因子, 这些变换因子要求计算 $2k\pi/2^N$ 形式角度的三角函数值, 提出了一种调整的 CORDIC 算法, 通过仿真该算法在计算这些特殊角度的三角函数值时, 不仅节省系统存储空间资源, 而且计算效率可以提高 50%, 是一种行之有效的方法。

关键词: CORDIC; 旋转因子; 三角函数; 兼容 GPS/Galileo 接收机

Fast Algorithm of Trigonometric Function Computation of Specific Angle

HE Qiusheng¹, HAO Jianjun¹, LI Hui¹, CHENG Yaqi²

(1. Electromechanical School, China University of Mining & Technology (Beijing), Beijing 100083;

2. Institute of Microelectronic, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

【Abstract】 A modified CORDIC algorithm is presented, based on computing the trigonometric function of specific angle, which can be expressed as $2k\pi/2^N$ and used in FFT, upconvert/downconvert and DDS. Simulation results show that the storage unit can be saved and computation efficiency can be increased by about 50% compared with the traditional CORDIC algorithm. Therefore the algorithm is feasible and available.

【Key words】 CORDIC; Transfer factor; Trigonometric function; Combined GPS/Galileo receiver

1 概述

目前正研究的兼容GPS/Galileo数字接收机信号处理过程中需要使用DDS来复现多个不同频率的载波信号, 以剥离载波, 上变频器和下变频器的实现过程中也要求计算其变换因子^[1], 此外快速傅立叶变换过程也要计算其旋转因子, 其实这些过程中遇到的特殊角度都可以表示为 $2k\pi/2^N$, 其中 $k \in [0, 2^{N-1}]$, N 为非负整数, 而且 2 次计算的角度值之间都是 2 的幂的倍数关系。基于角度旋转的思想, Volder 提出计算角度三角函数的CORDIC算法, 这种算法只需要移位寄存器和累加器就可以实现三角函数的计算问题, 特别适合在FPGA上并行运算。如果使用在DSP上, 则既浪费处理器资源, 而且执行效率也不高。关于CORDIC算法, 国内外许多文献中针对不同的使用场合都提出了不同的改进型CORDIC算法^[2-4]。文献[5]中提出使用优化的CORDIC算法在DSP上实现的方法, 但是需要的计算量并没有减少。

为了计算可以表示为 $2k\pi/2^N$ 形式的特殊角度的三角函数值, 本文提出一种调整的 CORDIC 算法, 通过仿真分析, 使用该算法计算这些特殊角度的三角函数值, 不仅可以节省存储空间, 而且在满足精度不超过 0.005 的情况下, 计算效率可以提高近 50%。

2 传统 CORDIC 算法

传统的CORDIC算法是为了方便硬件实现, 要求每次旋转角度的选取符合如下基本原则: 即旋转角度的正切值和 2 的倍数有如下关系, $\theta_i = \tan^{-1}(2^{-i})$, 其中 $\tan^{-1}(2^{-i})$ 是需要预先计算并存储的值, 与所选择的计算字长有关, 字长越长, 迭代计算得到的数据与理论数据越接近。计算正弦余弦函数的传统CORDIC算法迭代公式如下^[6]:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - y_i \times d_i \times 2^{-i} \\ y_{i+1} = y_i + x_i \times d_i \times 2^{-i} \\ z_{i+1} = z_i - d_i \times \arctan 2^{-i} \end{cases} \quad (1)$$

其中, $d_i = \pm 1$ 来表示旋转的方向, 由 z_i 的符号决定, 如果 $z_i \geq 0$, 则 $d_i = 1$, 表示需要逆时针旋转; 否则, $d_i = -1$, 表示需要顺时针旋转。当 $i \rightarrow \infty$ 时, 式(1)可以转化为

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K \begin{pmatrix} x_0 \cos z_0 - y_0 \sin z_0 \\ y_0 \cos z_0 + x_0 \sin z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中比例因子 $K = \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{1+2^{-2n}} = 1.646\ 760\dots$, 用来保持向量的模恒定。例如要计算一个角度 α 的正弦和余弦值, 可以选取 $x_0 = 1/K = 0.607\ 252\dots$, $y_0 = 0$ 和 $z_0 = \alpha$ 。经过一系列的迭代后, 就有:

$$\begin{cases} x_n = \cos \alpha \\ y_n = \sin \alpha \\ z_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

计算角度的范围 $\alpha \in (\sum_{k=0}^{\infty} \arctan 2^{-k}, -\sum_{k=0}^{\infty} \arctan 2^{-k}) \in (-99.885^\circ, 99.885^\circ)$ 。首先取这个集合中的一个子集 $[0^\circ, 90^\circ)$, 然后在计算前把计算角度调整到 $[-\pi, \pi]$ 。这种算法的缺点就

基金项目: 中欧伽利略计划基金资助项目(CGTR)

作者简介: 何秋生(1973 -), 男, 博士生, 主研方向: 兼容 GPS/Galileo 数字接收机基带信号处理; 郝建军, 博士生、工程师; 李 辉, 博士生、讲师; 程亚奇, 研究员

收稿日期: 2006-07-04 **E-mail:** qiushenghe@vip.163.com

是受到字长的影响, 计算次数要求比较多, 在计算次数比较少时计算精度很差。

3 调整 CORDIC 算法

由于计算的角度都是特殊的角度, 可以表示为

$$2k\pi/2^N$$

其中 $k \in [0, 2^{N-1}]$, N 是寄存器的位数。基于此, 调整 CORDIC 算法选取旋转角度符合如下基本原则: 即旋转角度和 2 的倍数有如下关系: $\theta_i = \theta_{i-1}/2^{i-1}$ 。这样迭代公式(1)就变为

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + y_i \times d_i \times \tan \theta_i \\ y_{i+1} = y_i - x_i \times d_i \times \tan \theta_i \\ z_{i+1} = z_i + d_i \times \theta_i \end{cases} \quad (4)$$

其中 $d_i = \pm 1$, 由 z_i 的符号决定, 如果 $z_i \geq 0$, 则 $d_i = -1$, 表示需要顺时针旋转; 否则, $d_i = 1$, 表示需要逆时针旋转。比例因子调整为 $K = \prod_{i=0}^{\infty} \sqrt{1 + \tan^2 \theta_i} = 1.570796\dots$, 计算角度覆盖的范围是 $[0^\circ, 90^\circ]$ 。另外, 在计算 $k\pi/4$ (k 为整数) 时, 需要在计算前进行判断调整比例因子为 $K = \sqrt{1 + \tan^2 \theta_0}$ 。这种算法需要存储几个初始数据和几个临时数据, 所需要的存储空间不超过 64B。

4 仿真分析比较

由于接收机中复现载波时要求所计算的三角函数幅度精度不会超过 0.005, 因此 FFT 变换因子在许多场合所要求的计算精度也不会超过这个数据, 通过表 1 可以看出利用调整算法只要迭代 5 次就可以满足这个精度。另外考虑到计算字长也会对计算结果产生一定的影响, 因此在仿真过程中取每个角度正切值小数点后的 5 位有效数字, 仿真过程中遇到的所有其它数据也都取小数点后 5 位有效数字, 就足以满足这个要求。这样取有效数据的目的是为了忽略计算字长的影响。表 1 是两种算法迭代 5 次计算几个角度的正弦和余弦值的结果以及误差。其中 TRA 表示传统算法, MOD 表示调整算法。

表 1 两种算法在计算 5 次后的计算误差比较

角度(度)	理论正弦值	计算值		误差		理论余弦值	计算值(8次)		误差	
		TRA	MOD	TRA	MOD		TRA	MOD	TRA	MOD
84.375	0.995 18	0.989 66	0.993 47	0.005 52	0.001 71	0.098 02	0.199 24	0.098 01	0.101 22	1E-05
67.5	0.923 88	0.901 31	0.920 22	0.022 57	0.003 66	0.382 68	0.426 94	0.382 95	0.044 26	0.000 27
50.625	0.773 01	0.768 49	0.771 72	0.004 52	0.001 29	0.634 39	0.635 66	0.633 29	0.001 27	0.001 1
45	0.707 11	0.635 66	0.707 1	0.071 45	0.000 01	0.707 11	0.768 49	0.707 1	0.061 38	0.000 01
33.75	0.555 57	0.635 66	0.551 92	0.080 09	0.003 65	0.831 47	0.768 49	0.826 09	0.062 98	0.005 38
16.875	0.290 28	0.199 24	0.289 66	0.091 04	0.000 62	0.956 94	0.977 21	0.955 34	0.020 27	0.00 16
11.25	0.195 09	0.199 24	0.193 8	0.004 15	0.001 29	0.980 79	0.977 21	0.974 41	0.003 58	0.006 38

一般情况下, 对于传统 CORDIC 算法需要 10 次以上, 才能够得出比较满意的结果, 但是在 10 次以内, 它的计算逼近曲线不如修正算法。图 1 是在计算 50.625 度角的正弦值和余弦值时得出的逼近曲线图, 其中仿真过程中涉及到的所有计算数据有效位数都为 5 位。从图中可以看出在计算 10 次以后二者的计算结果趋于相近, 但是在计算 5~10 次时调整算法

的精度还是明显优于传统算法的。这样使用 CORDIC 算法计算这些特殊角度, 在达到相同精度的情况下, 修正算法的计算量明显要比传统算法少。

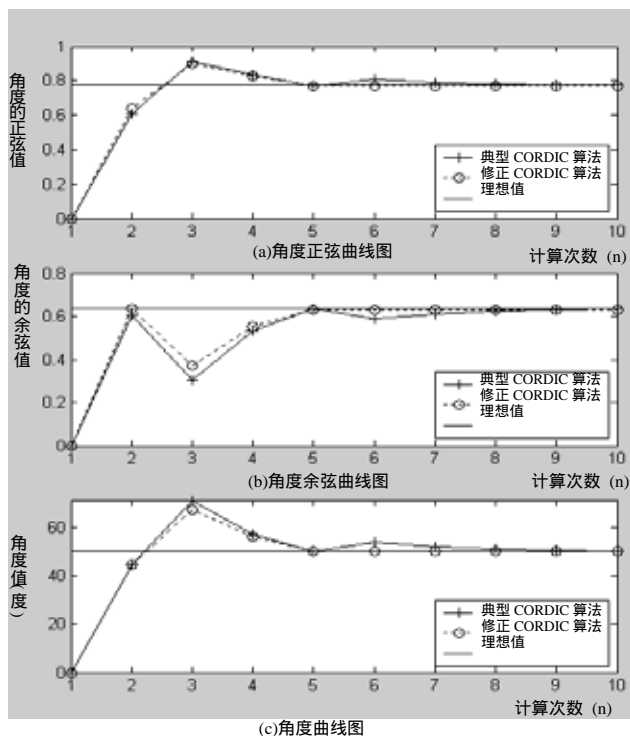


图 1 使用两种算法计算 50.625 度的正弦和余弦值时的逼近曲线

4 结论

研制的兼容 GPS/Galileo 接收机中需要合成正弦和余弦波形, 另外在计算 FFT 的旋转因子等场合中都涉及到计算这种形式特殊角度的正弦和余弦函数值。从对调整算法的仿真结果可以看出, 在针对计算特殊角度的正弦和余弦函数值, 计算精度要求没有超过 0.005 的情况下, 调整算法计算效率要比传统算法提高近 50%, 是一种行之有效的、适用的方法。

参考文献

- 1 Kaplan E D. GPS 原理与应用[M]. 邱致和, 王万义, 译. 北京: 电子工业出版社, 2004.
- 2 Kuhlmann M, Parhi K K. A Novel CORDIC Rotation Method for Generalized Coordinate Systems[C]//Proc. of ACSSC. IEEE on Digital Object Identifier, 1999.
- 3 Zuo R C, Li G M. A Design of Modified CORDIC-based Cosine and Sine Generator[C]//Proc. of IEEE ASIC, 2003.
- 4 刘晨, 王森章. 直接数字频率合成器的设计及 FPGA 实现[J]. 微电子学与计算机, 2004, 25(5): 63-65.
- 5 王玉泰, 李念强. 基于 DSP 的直接数字频率合成的算法研究及实现[J]. 仪器仪表学报, 2004, 25(4): 66-68.
- 6 Walther J S. A Unified Algorithm for Elementary Function[C]//Proceedings of Conference on Joint Computer, 1971.