



随机加工参数串行生产线的性能估计¹⁾

赵千川 郑大钟

(清华大学自动化系 北京 100084)

摘要 研究加工参数服从一般分布,重复批量加工 n 种不同工件的随机串行生产线. 给出了一个稳态加工周期的存在性条件,得到稳态加工周期、生产率、机器利用率的上下估界.

关键词 串行生产线,极大代数.

1 引言

本文研究同一批次包含 n 种不同工件的有限缓冲随机串行生产线. 在较为一般的条件下证明了稳态加工周期的存在性,进而得到了加工周期、生产率和机器利用率的估计式. 我们的结果是文[1-4]的结果向服务时间周期平稳过程的推广,同时也是文[5]结果向随机情形的推广.

2 主要结果

串行生产线由 m 台机器 M_0, \dots, M_{m-1} 和相应的前置缓冲器组成,批加工方式,每批加工 n 种工件 J_0, \dots, J_{n-1} . 一批工件按种类序数依次加工. p_{ij}^k 为机器 M_i 上加工第 k 批的第 j 个工件的加工时间. 不失一般性,假定生产线为刚性连接^[5].

假设 1. 对任意 $i \in \mathbf{I} = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $j \in \mathbf{J} = \{0, 1, \dots, n-1\}$, p_{ij}^k 的分布相同, $k = 1, 2, \dots$, 当 $k \neq l$ 或 $i \neq s$ 或 $j \neq t$ 时, p_{ij}^k 与 p_{st}^l 独立,且 $\mathbf{E}p_{ij}^k < +\infty, \forall i, j, k$.

命题 1. 考虑有限缓冲的生产线. 假设 1 成立,则存在 λ , 使成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} T(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}T(k) = \lambda \quad \text{a. s.} \quad (1)$$

其中, $T(k)$ 表示前 k 批工件加工的总时间.

证明. 用 $x_i(s-1)$, $i \in \mathbf{I}$ 代表累计第 s 个工件离开机器 M_i 的时刻. 显然 $T(k)$ 就等于 $x_{m-1}(kn-1)$. 任意取定满足条件 $d > (m-1)/n$ 的正整数 d , 在假定 1 下, 对 $y(k) = x(dk)$ 应用文[2]中定理 5, 可知 $(\mathbf{E}y_{m-1}(k))/k$ 和 $(y_{m-1}(k))/k$ 以概率 1 有极限 $0 \leq a < +\infty$, 取 $\lambda = a/nd$ 即可导出命题.

1) 国家自然科学基金资助项目.

约定 $\otimes, \prod, \oplus, \sum$ 分别代表极大代数意义下的“乘”、“连乘”及“加”、“连加”运算. 约定当 $t < 0$ 时 $x_i(t) = 0, p_{ij}^t = 0, i \in I, j \in J$, 对实数 a , 运算的结果 $[a]$ 是 a 的整数部分, 结果 $\langle a \rangle_n$ 是 n 除 a 所得的最小非负剩余. 以 $\underline{\lambda}$ 记加工参数为 $\mathbf{E}p_{ij}^k$ 的确定性加工过程的稳态加工周期, 令 $\bar{\lambda}_1 = \underline{\lambda} \otimes \prod_{s=0}^{n-1} \mathbf{E} \sum_{\substack{\langle i+j \rangle_n = s \\ i \in I, j \in J}} |p_{ij}^1 - \mathbf{E}p_{ij}^1|, \bar{\lambda}_2 = \prod_{s=0}^{n-1} \mathbf{E} \sum_{\substack{\langle i+j \rangle_n = s \\ i \in I, j \in J}} p_{ij}^1, \bar{\lambda} = \min(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$.

定理 1. 考虑有限缓冲的生产线. 假设 1 成立, 那么必有

$$\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda} \quad \text{a. s.} \quad (2)$$

证明. 由文[5]可知 $\underline{\lambda}$ 有定义. 熟知, $T(k) = x_{m-1}(kn-1)$ 可表示为加工参数的有限次 \otimes 和 \oplus 运算的参数化表达式. 以 $\underline{x}_i(kn-1)$ 表示以 $\mathbf{E}p_{ij}^k$ 为参数的确定性加工过程的状态. 对 $T(k)$ 的参数化表达式递归地运用适用于二元随机变量 a, b 的单调关系: $\mathbf{E}a \otimes \mathbf{E}b = \mathbf{E}(a \otimes b)$ 和 $\mathbf{E}a \oplus \mathbf{E}b \leq \mathbf{E}(a \oplus b)$ 可导出不等式

$$\mathbf{E}x_{m-1}(kn-1) \leq \mathbf{E}x_{m-1}(kn-1). \quad (3)$$

两边除以批次 k 并取极限即证得下界估计式.

证上界估计式. 令

$$\mathbf{x}(s) = [x_0(s), x_1(s-1), \dots, x_{m-2}(s-m+2), x_{m-1}(s-m+1)]^T,$$

任取样本轨道 ω , 对 $p_{i(\omega,s) < s-i(\omega,s) >_n}^{\lfloor \frac{s-i(\omega,s)}{n} \rfloor + 1}$ 运用不等式 $a \leq \mathbf{E}a + |a - \mathbf{E}a|$ (a 为随机变量)结合归纳法可得递推不等式

$$\mathbf{x}(kn-1) \leq \underline{\mathbf{x}}(kn-1) \otimes \prod_{s=0}^{kn-1} \sum_{i \in I} \left| p_{i < s-i >_n}^{\lfloor \frac{s-i}{n} \rfloor + 1} - \mathbf{E}p_{i < s-i >_n}^{\lfloor \frac{s-i}{n} \rfloor + 1} \right|. \quad (4)$$

其中 $\underline{\mathbf{x}}$ 表示以期望值为参数的确定性加工过程的状态向量. 另一方面, 我们有参数化表达式

$$x_{m-1}(kn-1) = T(k) = \prod_{s=0}^{kn-1} p_{i(\omega,s) < s-i(\omega,s) >_n}^{\lfloor \frac{s-i(\omega,s)}{n} \rfloor + 1}(\omega) \leq \prod_{s=0}^{kn-1} \sum_{i \in I} p_{i < s-i >_n}^{\lfloor \frac{s-i}{n} \rfloor + 1}(\omega). \quad (5)$$

式(4)和(5)两边均除以批次 k 并取极限, 结合假设 1 下独立同分布随机变量序列的强大数定理可证得 $\lambda \leq \bar{\lambda}_i, i=1, 2$. 定理证明完成.

以 $N(t)$ 表示时刻 t 之前完成加工的批数, 则系统稳态生产率可表为 $\lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) N(t)$. 稳态下, 机器 M_i 的利用率 μ_i , 即单位时间当中 M_i 完成有效加工时间所占比例, 可表为 $\mu_i = \lim_{k \rightarrow \infty} T(k)^{-1} \prod_{d=1}^k \prod_{j \in J} p_{ij}^d$.

定理 2. 在定理 1 的条件下

$$\underline{\lambda}^{-1} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} N(t) \geq (\bar{\lambda})^{-1} \quad \text{a. s.} \quad (6)$$

定理 3. 在定理 1 的条件下

$$\underline{\lambda}^{-1} \prod_{j \in J} \mathbf{E}p_{ij}^1 \geq \mu_i \geq (\bar{\lambda})^{-1} \prod_{j \in J} \mathbf{E}p_{ij}^1 \quad \text{a. s.} \quad (7)$$

定理 4. 加工周期的估界至少有如下的精度

$$\left| \lambda - \frac{1}{2}(\underline{\lambda} + \bar{\lambda}) \right| \leq \frac{1}{2} \prod_{s=0}^{n-1} \mathbf{E} \sum_{\substack{\langle i+j \rangle_n = s \\ i \in I, j \in J}} |p_{ij}^1 - \mathbf{E}p_{ij}^1|.$$

附注 1. 按照极大代数计算矩阵特征值的方法, 容易定出加工周期的下界. 其上界的计算, 则可归结为计算 n 个独立随机变量最大值的期望值的问题.

附注 2. 定理 4 表明加工参数分散性较小时, 给出的界可以较好地逼近真实的稳态加工周期. 对于分散性为零的情形, 也即加工为确定性的, 定理 1 中给出的加工周期的上下界相等就是实际的加工周期. 所以, 如果能采用可行的控制手段使加工参数保持在标称值下进行生产, 则可达到可能的最大生产率(输出率).

3 数值例子

考虑由五台机器刚性连接组成的串行生产线(表 1).

表 1 加工参数的分布

P_{ij}	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
J_0	$U(0.5, 1.5)$	$U(1.5, 2.5)$	$U(1.5, 2.5)$	$U(0.5, 1.5)$	$U(0.5, 1.5)$
J_1	$U(1.5, 2.5)$	$U(0.5, 1.5)$	$U(2.5, 3.5)$	$U(1.5, 2.5)$	$U(0.5, 1.5)$
J_2	$U(2.5, 3.5)$	$U(0.5, 1.5)$	$U(0.5, 1.5)$	$U(1.5, 2.5)$	$U(1.5, 2.5)$

这里 $U(a, b)$ 表示 $[a, b]$ 上的均匀分布. 假定各个工件在各机器上的加工都相互独立.

对 10000 批工件的仿真结果表明加工周期渐近于数值 $\lambda = 7.29267$. 计算估计的界可得 $\underline{\lambda} = 7.0, \bar{\lambda} = \min(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = \min(8.875, 8.25) = 8.25$, 易见 $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ 成立. 以上下界平均数 7.625 作为实际稳态周期的估计, 其相对误差为 $|7.29267 - 7.625| / 7.29267 = 0.04558$, 在 5% 以内, 这就为预见及合理安排生产提供了依据.

参 考 文 献

- [1] Baccelli F, Liu Z. Comparison properties of stochastic decision free petri Nets. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **AC-37**: 1905—1920.
- [2] Baccelli F. Ergodic Theory of Stochastic Petri Networks. *Annal. Prob.*, 1992, **20**: 375—396.
- [3] 宋东平, 涂奉生. 随机串行生产线稳态性能分析. *自动化学报*, 1993, **19**: 753—755.
- [4] 贾春福, 涂奉生. 随机串行生产线稳态性质的研究. *中国控制会议论文集*, 北京: 中国科学技术出版社, 1995: 937—941.
- [5] 涂奉生, 乞敬换. 具有存储器的生产线的状态方程描述及其性能分析. *系统科学与数学*, 1991, **11**: 177—186.

PERFORMANCE ESTIMATIONS OF PRODUCTION LINES WITH STOCHASTIC PROCESSING PARAMETERS

ZHAO QIANCHUAN ZHENG DAZHONG

(Department of automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract In this paper, we study the stochastic production lines with n types of different parts in a batch and with processing parameters obeying general distributions. A condition under which the stationary cycle time exists is given. The upper and lower bounds of steady-state cycle time, throughput of production lines and utilization of machines are obtained.

Key words Production lines, max-algebra.

中国自动化学会第十二届青年学术年会(YAC'97) 征 文 通 知

一、征文范围

(1) 线性与非线性系统控制;(2)自适应控制和预测控制;(3) H_∞ 控制和鲁棒控制;(4)智能控制、模糊控制;(5)系统辨识与建模;(6)故障诊断与容错控制;(7)神经网络及其应用;(8)自动化仪表与过程控制;(9)软件工程、并行处理;(10)人工智能与专家系统;(11)图象处理与模式识别;(12)机器人学与机器人控制;(13)大系统;(14)电力系统及其自动化;(15)电机驱动及运动控制;(16)传感器与检测技术;(17)离散事件动态系统;(18)计算机集成制造系统;(19)系统工程理论、方法及其应用;(20)企业改革、发展战略与管理决策;(21)工业工程与生产管理;(22)其它。

二、征文要求

(1) 论文应反映国内外先进水平或有一定的实用价值,未在国内外正式刊物或全国性学术会议上发表过;(2)论文全文一般不超过 5000 字;(3)论文第一作者的年龄不超过 40 岁。(4)投稿时请注明文章所属的研究方向(见上述征文范围)。

三、论文截稿时间:1997 年 3 月 1 日

1997 年 4 月 15 日前向作者发出论文录用通知;1997 年 5 月 15 日以前要求作者返回正式论文打印稿;1997 年 7 月 1 日以前发出会议通知。

四、投稿地址

杭州市(310014)浙江工业大学信息工程学院 YAC'97 组委会

联系电话:(0571)8320200,(0571)8058026 联系人:俞立,陈国定