第21卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 5
1995 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1995

短 文

随机离散人口系统建模及稳定性分析

倪岳锋
(青岛市科学技术委员会 青岛 266071)

摘 要

建立了随机人口系统生育、死亡、迁移过程的差分方程模型，对随机离散人口系统按龄均值和二阶中心矩的 Lyapunov 稳定性进行了研究，给出了根据我国 1987 年 1% 人口抽查资料进行仿真的结果.

关键词: 随机离散人口系统，稳定性，临界生育率.

1 引言

借助于数学工具对人口系统进行定量描述和分析，已成为人口研究的重要方法.

宋健和于景元[1]认为：确定型人口系统存在临界生育率，当妇女总和生育率分别大于、等于和小于临界生育率时，人口系统在 Lyapunov 意义下分别不稳定、临界稳定和渐近稳定.

Kendall[2] 和 Pollard[3] 等基于确定型人口模型，考察了具正正则性的随机人口系统，Getz[4] 对不分龄的情况进行了分析. 本文在前人工作基础上建立了人口生育、死亡、迁移过程均值和二阶中心矩的发展方程，指出人口均值和二阶中心矩都存在稳定性问题，稳定的临界点以由生育模式、女性概率和死亡概率决定的临界生育率表示.

2 模型的建立

设 m 为人的最高寿命，时刻 t 按龄人口数为随机变量 $n_k(t), k=0,1,\cdots,m$，妇女最低和最高育龄分别为 a_1 和 a_2，按龄女性概率为 $\omega_k(t)$，妇女总和生育率为 $\beta_p(t)$，k 年龄组成员年龄属于 $[k,k+1)$. 在 $[t,t+1)$ 内，系统内 $k(=01,\cdots,m)$ 年龄组的每一个体以概率 $u_k(t)$ 死去，$k(=a_1,a_1+1,\cdots,a_2)$ 年龄组的每一女性以概率 $\beta_p(t)h_{pk}(t)$ 生育一新个体，$h_{pk}(t)$ 为生育模式，满足条件 $\sum_{k=a_1}^{a_2} h_{pk}(t)=1$，婴儿死亡概率为 $u_{00}(t)$，迁入和迁出人口分别形成概率强度为 $w_k(t)$ 和 $v_k(t)$ 的泊松流.

本文于 1993 年 3 月 11 日收到

由上述假设，$t+1$ 时刻 $k(=1,2,\cdots,m)$ 年龄组人口 $n_k(t+1)$ 为

$$n_k(t+1)=n_{l,k-1}(t+1)+W_k(t)-V_k(t),k=1,2,\cdots,m, \tag{1}$$

其中 $n_{l,k-1}(t+1)$ 为 t 时刻 $k-1$ 年龄组在 $t+1$ 时刻的存活数，满足条件二项分布 $B[n_{k-1}(t),1-u_{k-1}(t)],W_k(t),V_k(t)$ 为 $[t,t+1)$ 内 k 年龄组迁入、迁出人口数。

$t+1$ 时刻 0 年龄组人口 $n_0(t+1)$ 为

$$n_0(t+1)=\sum_{k=a_1}^{a_2}n_{0(k)}(t+1)+W_0(t)-V_0(t), \tag{2}$$

其中 $n_{0(k)}(t+1)$ 为 k 年龄组妇女生育并存活的孩子数，满足条件二项分布 $B[n_k(t),\beta_p(t)h_{pk}(t)(1-u_{00}(t))],W_0(t),V_0(t)$ 表示 $(t,t+1)$ 内迁入、迁出的 0 年龄组人口数。

引理 1. 设 X,Y 均为取值非负整数的随机变量，X_1,X_2,Y_1 为具相互独立的条件二项分布 $B(X,P_{x_1}),B(X,P_{x_2}),B(Y,P_{y_1})$ 的随机变量，则 $EX_1=P_{x_1}EX,VarX_1=P_{x_1}^2VarX+P_{x_1}(1-P_{x_1})EX,Cov(X_1,X_2)=P_{x_1}P_{x_2}VarX,Cov(X_1,Y_1)=P_{x_1}P_{y_1}Cov(X,Y)$。

证明可直接根据定义进行，从略。

以 $\bar{n}_k(t)$，$\sigma_{kk}(t)$ 分别表示随机变量 $n_k(t)$ 的均值和方差，$\sigma_{kj}(t)$ 表示 $n_k(t)$ 与 $n_j(t)(k\neq j)$ 间协方差。由式(1)，(2)及引理 1 得

$$\bar{n}_{k+1}(t+1)=(1-u_k(t))\bar{n}_k(t)+w_k(t)-v_k(t),k=0,1,\cdots,m-1. \tag{3}$$

$$\bar{n}_0(t+1)=\beta_p(t)\sum_{k=a_1}^{a_2}\omega_k(t)h_{pk}(t)(1-u_{00}(t))\bar{n}_k(t)+\omega_0(t)-v_0(t). \tag{4}$$

根据引理 1 和式(1)得

$$\sigma_{k+1,k+1}(t+1)=(1-u_k(t))^2\sigma_{kk}(t)+u_k(t)(1-u_k(t))\bar{n}_k(t)+w_k(t)+v_k(t),$$
$$k=0,1,\cdots,m-1. \tag{5}$$

$$\sigma_{k+1,j+1}(t+1)=(1-u_k(t))(1-u_j(t))\sigma_{kj}(t),k,j=0,1,\cdots,m-1,k\neq j. \tag{6}$$

由引理 1 和式(1)，(2)得

$$\sigma_{0k}(t+1)=\sum_{j=a_1}^{a_2}(1-u_k(t))(1-u_{00}(t))\beta_p(t)\omega_j(t)h_{pj}(t)\sigma_{kj}(t), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{00}(t+1)=&\sum_{k,j=a_1}^{a_2}\beta_p^2(t)\omega_k(t)\omega_j(t)h_{pk}(t)h_{pj}(t)(1-u_{00}(t))^2\sigma_{kj}(t)\\&+\sum_{k=a_1}^{a_2}\beta_p(t)\omega_k(t)h_{pk}(t)(1-u_{00}(t))[1-\beta_p(t)\omega_k(t)h_{pk}(t)(1\\&-u_{00}(t))]\bar{n}_k(t)+\omega_0(t)+v_0(t).\end{aligned} \tag{8}$$

式(3)—(8)联立可得

$$\begin{bmatrix}\bar{n}(t+1)\\ \sigma(t+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(A_p(t)+\beta_p(t)B_p(t)) & \\ D(t) & (A_p(t)+\beta_p(t)B_p(t))\otimes(A_p(t)+\beta_p(t)B_p(t))\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\bar{n}(t)\\ \sigma(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F(t)\\ E(t)\end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中⊗表示 Kronecker 积[5]。

$$\bar{n}(t)=[\bar{n}_0(t),\bar{n}_1(t),\bar{n}_2(t),\cdots,\bar{n}_m(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$\sigma(t)=[\sigma_{00}(t),\sigma_{01}(t),\cdots,\sigma_{0m}(t),\sigma_{10}(t),\sigma_{11}(t),\cdots,\sigma_{1m}(t),\cdots,\sigma_{m0}(t),\sigma_{m1}(t),\cdots,\sigma_{mm}(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$A_p(t)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ (1-u_0(t)) & & 0 & & \vdots \\ & (1-u_1(t)) & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & (1-u_{m-1}(t)) & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_p(t)=\begin{bmatrix} 0 \cdots 0\ b_{a_1}(t)\cdots b_{a_2}(t)\ 0 \cdots 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)},$$

$$b_k(t)=(1-u_{00}(t))\omega_k(t)h_{pk}(t),k=a_1,a_1+1,\cdots,a_2,$$

$$D(t)=[D_0(t),D_1(t),\cdots,D_m(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$D_0(t)=\begin{bmatrix} 0 \cdots 0\ d_{0a_1}(t)\cdots d_{0a_2}(t)\ 0 \cdots 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)},$$

$$d_{0k}(t)=\beta_p(t)\omega_k(t)h_{pk}(t)(1-u_{00}(t))[1-\beta_p(t)\omega_k(t)h_{pk}(t)(1-u_{00}(t))],$$
$$k=a_1,a_1+1,\cdots,a_2,$$

$$D_i(t)=\mathrm{diag}[0,\cdots,0,(u_i(t)-u_i^2(t)),0,\cdots,0],i=1,2,\cdots m,$$

$$E(t)=\mathrm{diag}[(w_0(t)+v_0(t)),(w_1(t)+v_1(t)),\cdots,(w_m(t)+v_m(t))],$$

$$F(t)=[(w_0(t)-v_0(t)),(w_1(t)-v_1(t)),\cdots,(w_m(t)-v_m(t))]^{\mathrm{T}}.$$

3 稳定性分析

为简化起见，讨论常系数情况.

$$\begin{bmatrix}\bar{n}(t+1)\\ \sigma(t+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(A_p+\beta_pB_p) & 0\\ D & (A_p+\beta_pB_p)\otimes(A_p+\beta_pB_p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{n}(t)\\ \sigma(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F\\ E\end{bmatrix}. \tag{10}$$

矩阵 $(A_p+\beta_pB_p)$ 的特征多项式为

$$\Delta(s)=s^{m+1}-\beta_p\sum_{i=a_1}^{a_2}\omega_ih_{pi}(1-u_{00})(1-u_0)\cdots(1-u_{i-1})s^{m-i}. \tag{11}$$

定义妇女临界生育率 β_{pcr}

$$\beta_{pcr}=\left[\sum_{i=a_1}^{a_2}\omega_ih_{pi}(1-u_{00})(1-u_0)\cdots(1-u_{i-1})\right]^{-1}. \tag{12}$$

引理 2[5]. 设矩阵 $(A_p+\beta_pB_p)$ 为 $m+1$ 阶方阵，其特征值为 $s_i,i=1,2,\cdots,m+1$，则 $s_{ij}=s_is_j,i,j=1,2,\cdots,m+1$，是矩阵 $(A_p+\beta_pB_p)\otimes(A_p+\beta_pB_p)$ 的特征值.

引理 3[1]. 当 $0<\beta_p<\beta_{pcr}$ 时，$(A_p+\beta_pB_p)$ 的特征值均在单位圆内；$(A_p+\beta_{pcr}B_p)$ 有代数单特征值 1，其它特征值均在单位圆内；当 $\beta_p>\beta_{pcr}$ 时，$(A_p+\beta_pB_p)$ 有特征值在单位圆外.

定理 1. 在 Lyapunov 意义下，(1)当 $\beta_p>\beta_{pcr}$ 时，按龄人口均值和二阶中心矩均不稳定；(2)当 $\beta_p=\beta_{pcr}$ 时，按龄人口均值临界稳定，二阶中心矩不稳定；(3)当 $0<\beta_p<\beta_{cpr}$

时，按龄人口均值和二阶中心矩渐近稳定。

证明. 式(1)，(3)根据引理2,3直接可得. 当 $\beta_p = \beta_{pcr}$ 时，由引理3知，$(A_p + \beta_{pcr}B_p)$ 有代数单特征值1，其余的特征值均在单位圆内，故按龄人口均值临界稳定. 由引理2知，$(A_p + \beta_{pcr}B_p)\otimes(A_p + \beta_{pcr}B_p)$ 也有特征值1，对于系统(10)，1为二重特征值，系统在 Lyapunov 意义下不稳定，即按龄人口二阶中心矩不稳定.　　证毕.

4 仿真

以1987年为时间零点，以该年我国1%人口抽查的按龄人口数为初始人口均值，死亡概率、女性概率、生育模式均以该年的统计数据为参考[6]，初始人口统计误差按2.5‰估计. 按(12)式计算得妇女临界生育率为 $\beta_{pcr} = 2.129$.

不考虑迁移，按(10)式进行仿真，结果表明各年龄组均值、方差、协方差的变化趋势相同，选均值 $\bar{n}_0(t)$、方差 $\sigma_{00}(t)$ 和协方差 $\sigma_{13,27}(t)$ 示例如图1—3所示.

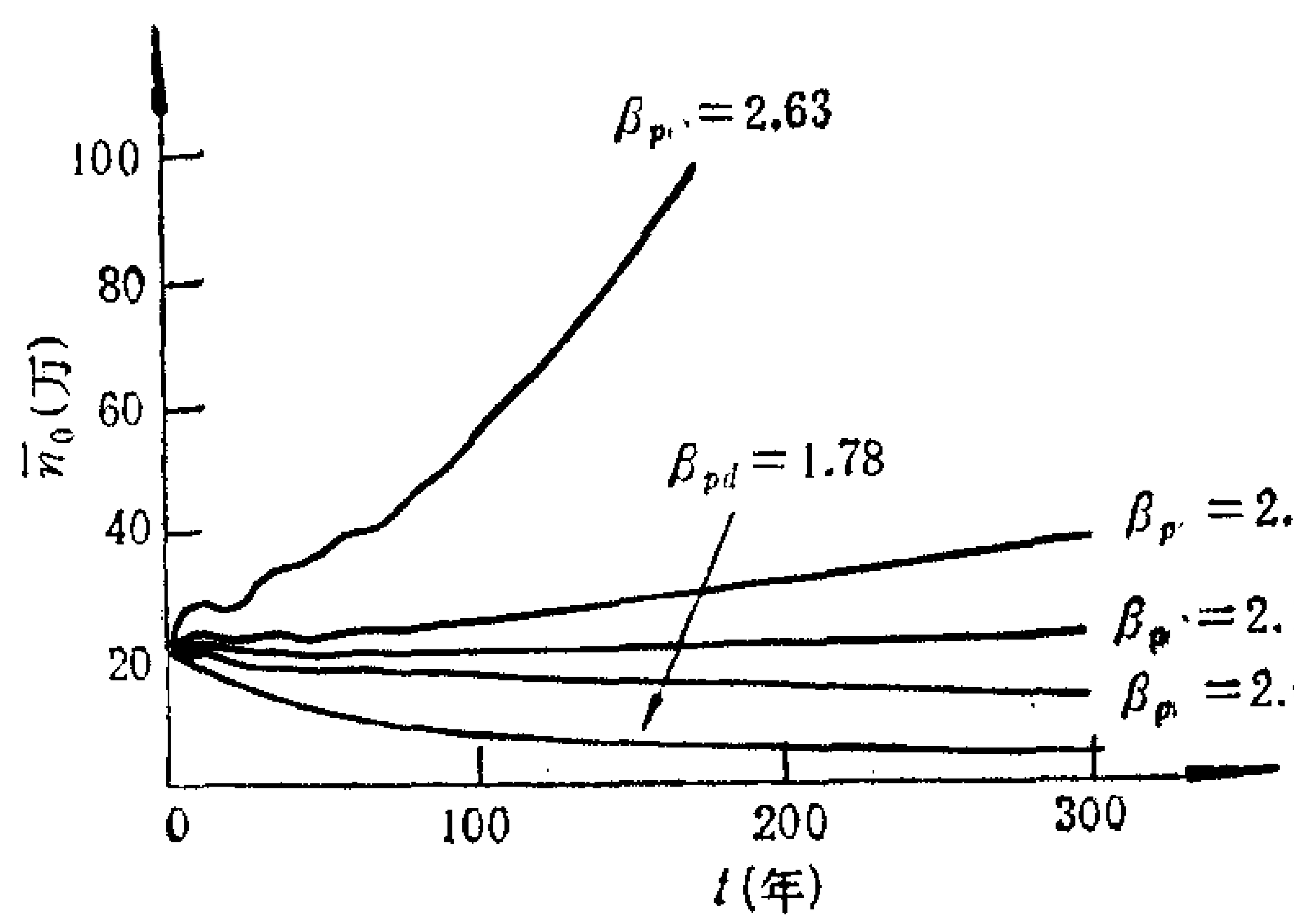

图1　0年龄组均值变化曲线

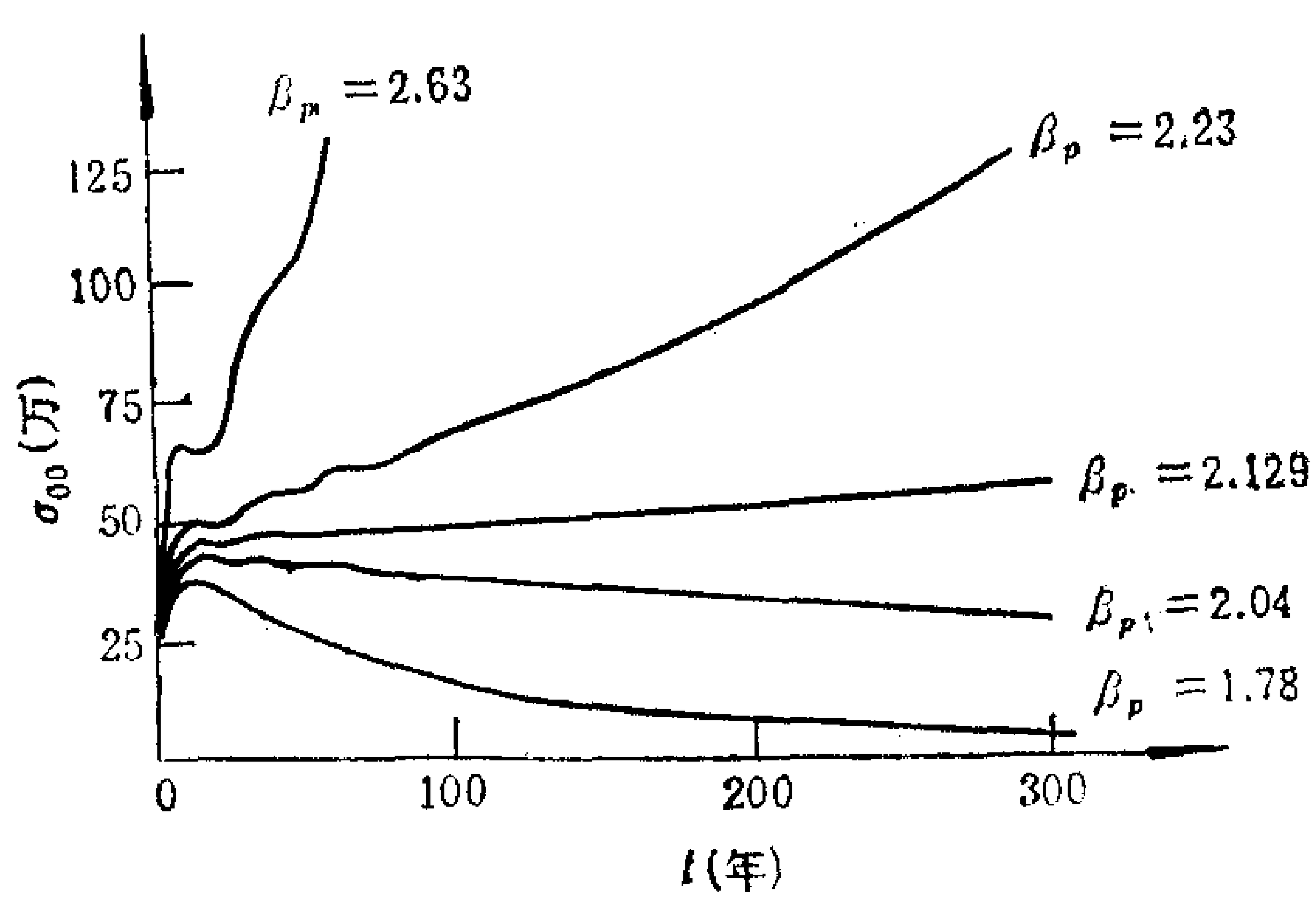

图2　0年龄组方差变化曲线

图1—3表明仿真结果与定理1结论一致.

对总和生育率大于或等于临界生育率的人口系统，由于方差发散，进行人口预报时必

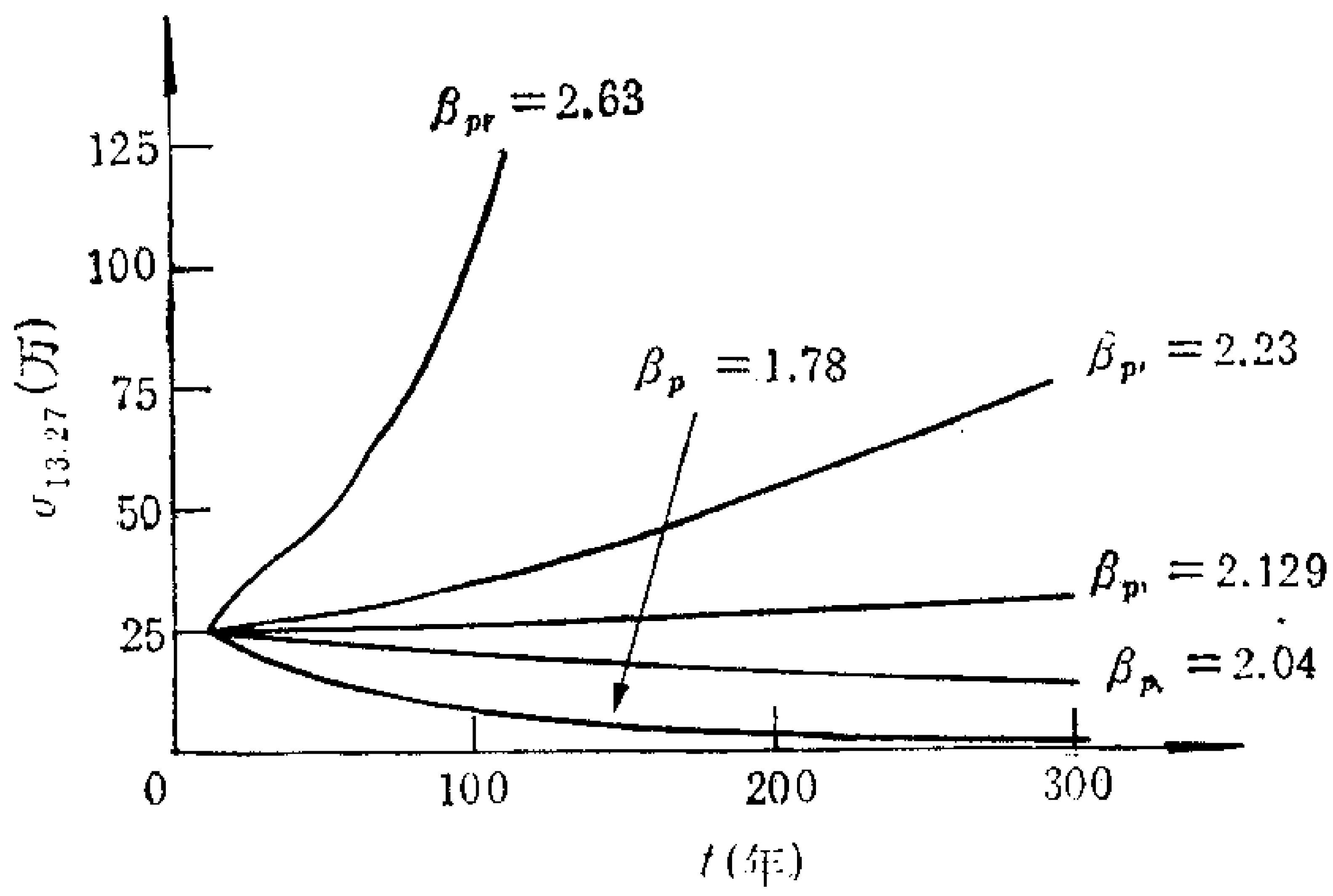

图 3 13 和 27 年龄组协方差变化曲线

须注意可能的偏差. 若要保证人口不会无限增长，应调整政策使总和生育率稍低于临界生育率.

致谢. 本文是在导师宋健教授、副导师于景元研究员、夏绍玮教授指导下完成的，朱广田研究员和韩京清研究员给予了帮助，作者在此深表感谢.

参 考 文 献

[1] 宋健，于景元. 人口控制论. 北京: 科学出版社，1985. 1—214.
[2] Kendall D G. Stochastic processes and population growth, J. Roy. Stat. Soc., Series B, 1949, **11**:230—264.
[3] Pollard J H. Mathematical models for the growth of human populations.Cambridge Universiyt Press, London, 1975. 1—135.
[4] Getz W M. Optimal control of a birth-and-death process population model, *Math. Biosci.*, 1975, **23**:87—111.
[5] 韩京清，何关钰，许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳: 辽宁科学技术出版社，1985. 313—396.
[6] 国家统计局人口统计司. 中国 1987 年 1% 人口抽样调查资料（全国分册）. 北京: 中国统计出版社. 1988.

MODEL BUILDING AND STABILITY ANALYZING OF STOCHASTIC DISCRETE POPULATION SYSTEMS

NI YUEFENG
(*Qingdao Science & Technology Commission Qingdao* 266071)

ABSTRACT

This paper uses difference equations to model the stochastic population birth-death and migration processes, analyzes the Lyapunov stability of the age-dependent first and second moment of the stochastic discrete population systems, gives the simulation results by using the data of 1987's 1% population census of PRC.

Key words: Stochastic discrete population system, stability, critical fertility rate.