短 文

随机系统的变结构控制[1)]

邓飞其 冯昭枢 刘永清
（华南理工大学自动控制工程系 广州 510641）

摘 要 研究一般连续型 Itô 随机系统的变结构控制，构造了滑动流形，给出了变结构控制律，并用算例示范了文中结果的应用方法.

关键词 随机系统，滑动流形，变结构控制，均方稳定性.

1 引理

引理1. 若 $X,Y\in R^n,r>0,P\in R^{n\times n}$为正定或半正定，则$(rX-Y)^{\mathrm{T}}(rX-Y)\geqslant 0$，即有不等式

$$2X^{\mathrm{T}}PY\leqslant rX^{\mathrm{T}}PX+\frac{1}{r}Y^{\mathrm{T}}PY.$$

用 $\otimes$表示 Kronecker 积[1]，定义 $A\oplus A=I\otimes A+A\otimes I$，定义 $\Omega_n=\{P\mid P\in R^{n\times n},P^{\mathrm{T}}=P\geqslant 0\}$. 易验证：在 Frobenius 范数诱导的距离之下，Ω_n是一个完备度量空间.

引理2. 若 $A\in R^{n\times n}$稳定，矩阵函数 $r(\cdot):\Omega_n\to\Omega_n$满足 $\forall P_1,P_2\in\Omega_n$，

$$\|r(P_2)-r(P_1)\|_F\leqslant\beta\|P_2-P_1\|_F,\qquad\beta=\text{const.},\tag{1}$$

$$\beta<\|(A\oplus A)^{-1}\|_F^{-1},\tag{2}$$

则 $\forall Q\in\Omega_n$，Lyapunov 型矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+r(P)=-Q\tag{3}$$

有对称正定解 P.

引理3[2]. 若随机系统

$$\mathrm{d}x=f(t,x)\mathrm{d}t+\sigma(t,x)\mathrm{d}W\tag{4}$$

之解过程 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$，向量 Lyapunov 函数 $V=\mathrm{col}(V_1,V_2,\cdots,V_s)$满足

$$LV\leqslant MV,\tag{5}$$

其中 $M\in R^{s\times s}$，L 是(4)式生成的 Kolmogorov 向后偏微分算子[3]，则有均值不等式

$$EV\leqslant\mathrm{e}^{M(t-t_0)}EV(t_0),\quad t\geqslant t_0.\tag{6}$$

---

1)国家自然科学基金与广东省自然科学基金资助的项目.
收稿日期：1994-12-06

2 变结构控制律设计

考虑线性时不变 Itô 随机系统

$$dx = (Ax + Bu)dt + \sum_{i=1}^{r}\sigma_i F_i x\, dW_i(t), \tag{7}$$

其中 $x\in R^n, u\in R^m, A, F_i\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}, \sigma_i\in R, W(t)=[W_1(t), W_2(t), \cdots, W_r(t)]^T$是定义在完全概率空间$(\Omega, F, P)$上具有独立分量的 r 维标准 Wiener 过程.

作如下基本假设 $A_1)-A_3)$:

$A_1)$ (A, B)可控.

$A_2)$ B 是列满秩的.

由文献[4],在假设 $A_1), A_2)$之下,存在 $n\times n$ 非奇异阵 T 使

$$TB = [0, I_m]^T, \tag{8}$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad TF_iT^{-1} = \begin{bmatrix} F_{i11} & F_{i12} \\ F_{i21} & F_{i22} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

而(A_{11}, A_{12})亦可控,其中 $A_{22}, F_{i22}\in R^{m\times m}$.

注1. 若令 $y=Tx, y=(y_1^T, y_2^T)^T, y_1\in R^{n-m}, y_2\in R^m$,则有

$$\begin{cases} dy_1 = (A_{11}y_1 + A_{12}y_2)dt + \sum_{i=1}^{r}\sigma_i(F_{i11}y_1 + F_{i12}y_2)dW_i(t), & (10) \\ dy_2 = (A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + u)dt + \sum_{i=1}^{r}\sigma_i(F_{i21}y_1 + F_{i22}y_2)dW_i(t), & (11) \end{cases}$$

$A_3)$增益阵 $K\in R^{m\times n}$使 $\hat{A}_1=:A_{11}-A_{12}K$ 稳定,方程

$$\hat{A}_1^TP + P\hat{A}_1 + \sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2(F_{i11} - F_{i12}K)^TP(F_{i11} - F_{i12}K) = -Q \tag{12}$$

有正定解 P,其中 $Q>0$.

在假设 $A_3)$之下,反馈律 $y_2=-Ky_1$使(10)式镇定,其闭系统之平衡点均方渐近稳定[3].

注2. 由引理2,矩阵方程(12)有正定矩阵解的一个充分条件是噪声强度 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ 满足

$$\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\|F_{i11} - F_{i12}K\|_F^2 < \|(\hat{A}_1 \oplus \hat{A}_1)^{-1}\|_F^{-1}. \tag{13}$$

关于系统(10)的反馈镇定,参考文献[5].

给出(7)式的变结构控制律如下:

$$u = -[K, I_m]TAx - (kS + \varepsilon\, \mathrm{sgn}S), \tag{14}$$

其中

$$\begin{cases} S = [K, I_m]Tx, & (15) \\ \varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) > 0, & (16) \\ \mathrm{sgn}S = [\mathrm{sgn}(S)_1, \mathrm{sgn}(S)_2, \cdots, \mathrm{sgn}(S)_m]^T. & (17) \end{cases}$$

k 满足

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}\end{bmatrix}>0, \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases}\Lambda_{11}=2kI_m-\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2(G_{i22}+F_{i12}^{\mathrm{T}}PF_{i12}),\\ \Lambda_{12}=\Lambda_{21}^{\mathrm{T}}=-A_{12}^{\mathrm{T}}P-\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2((F_{i11}-F_{i12}K)^{\mathrm{T}}PF_{i12}+G_{i21}-G_{i22}K),\\ \Lambda_{22}=Q-\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2(G_{i11}-K^{\mathrm{T}}G_{i21}-KG_{i12}+K^{\mathrm{T}}G_{i22}),\\ \begin{bmatrix}G_{i11} & G_{i12}\\ G_{i21} & G_{i22}\end{bmatrix}=[KF_{i11}+F_{i21},KF_{i12}+F_{i22}]^{\mathrm{T}}[KF_{i11}+F_{i21},KF_{i12}+F_{i22}],\end{cases} \tag{19}$$

或者满足

$$\begin{cases}k>\frac{\rho}{2}+\frac{\nu\gamma}{\lambda}, & (20)\\ \lambda=\lambda_m(Q)/\|P\|, & (21)\\ \gamma=\frac{4}{\lambda}(\|P\|\|A_{12}\|^2+r\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^4\|P\|^2\|P^{-1}\|\|F_{i11}-F_{i12}K\|^2)\\ \qquad+\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\|P\|\|F_{i12}\|^2, & (22)\\ \nu=(1+2\|K\|^2)\|T\|^2\|T^{-1}\|^2(m+\|K\|_F^2)\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\|F_i\|^2/\lambda_m(P), & (23)\end{cases}$$

其中 $\|\cdot\|$为矩阵的谱范数.

在反馈律(14)作用下,(7)式之闭环系统是

$$\mathrm{d}x=[I-B[K,I_m]T]Ax\mathrm{d}t-B(kS+\varepsilon\ \mathrm{sgn}S)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{r}\sigma_i F_i x\,\mathrm{d}W_i(t). \tag{24}$$

注3. 在对确定型系统作 VSC 时,滑动流形的形式是 $\dot{S}=0$,因此一般设在滑动流形上还有 $\dot{S}=0$,由此得出等效控制,构造出变结构控制律;但是,对于随机系统(7),令 $\mathrm{d}S=0$ 求出的等效控制含有随机噪声,不适合于实际应用,另外,令$(ES^{\mathrm{T}}S)'=0$也难以求得用显式表达的等效控制,所以,在构造 (7)的变结构控制律时,取滑动流形为 $E\|S\|^2=ES^{\mathrm{T}}S=0$,将想当然的假设$(ES^{\mathrm{T}}S)'=0$改为$(ES^{\mathrm{T}}S)'\to 0$. 由(15),(24)式,在滑动流形上有

$$(ES^{\mathrm{T}}S)'=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2Ex^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}K^{\mathrm{T}}\\ I_m\end{bmatrix}[K,I_m]TF_ix. \tag{25}$$

因本文中 k 与 K 的选择使系统得到镇定,所以 $Ex^{\mathrm{T}}x\to 0$,于是由(25)式,在 SM 上确有 $ES^{\mathrm{T}}S\to 0$.

注4. 在 SM 上,$E\|S\|^2=0$,但 $S=0$ 不成立,所以滑动模运动方程仍具有形式(24),只是含 S 的项不影响滑动的稳定性.

注5. 当 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_r=0$ 时,(7)式成为确定型系统 $\dot{x}=Ax+Bu$,而(14)式就是 $\dot{x}=Ax+Bu$ 的常见的变结构控制. 所以,本文结果以确定型系统 $\dot{x}=Ax+Bu$ 的经典 VSC 方案为特例.

利用大系统理论中的向量 Lyapunov 函数法可以证得如下的定理：

定理1. 若基本条件 A_1)$-A_3$)满足，k 之选择如(18)式或(20)式，则在变结构控制律(14)作用下，(7)式之闭环系统(24)之平衡点均方渐近稳定.

3 设计举例

本文条件 A_1)$-A_3$)是基本的，为确定变结构控制律(14)，关键是确定参数 k,K.

设在(7)式中，$n=4,m=2,r=1,\sigma_1=0.5,T=I_4$，

$$A=\begin{bmatrix}1&1&4&0\\0&0&4&4\\0&0&1&0\\0&-1&0&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad F_1=\begin{bmatrix}1&0&1&-2\\0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}.$$

可以验证条件 A_1)$-A_3$)满足. 取 $R=4I_2,Q=\begin{bmatrix}1.75&3.00\\3.00&7.75\end{bmatrix},K=R^{-1}A_{12}^{\mathrm{T}}P$，则(12)式有正定解 $P=I_2$，于是算出 $K=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$. 由(18)式确定出的 k 的范围：$k>11.05068$. 取 $k=11.1,\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$. 由(14)式得到系统的变结构控制律

$$u=-\begin{bmatrix}12.1&12.1&20.1&4\\0&10.1&4&14.1\end{bmatrix}x-\begin{bmatrix}\mathrm{sgn}(x_1+x_2+x_3)\\\mathrm{sgn}(x_2+x_4)\end{bmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] 陈公宁. 矩阵理论与应用. 北京：高等教育出版社，1990，47－52.

[2] Deng Feiqi, Feng Zhaoshu, Liu Yongqing. Stability and decentralized stabilization of large-scale delay stochastic systems(Ⅰ): Vector differential inequalities and basic theorems. *Advances in Modelling and Analysis*C. 1994, **43** (1): 33－39.

[3] 刘永清，冯昭枢. 大型动力系统的理论与应用(卷4)：随机、稳定与控制. 广州：华南理工大学出版社，1992，65－68.

[4] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京：科学出版社，1996，92－94.

[5] Willems J L *et al*. Feedback stabilizability for stochastic systems with state and control dependent noise. *Automatica*, 1976, **12**: 277－283.

VARIABLE STRUCTURE CONTROL OF STOCHASTIC SYSTEMS

DENG FEIQI FENG ZHAOSHU LIU YONGQING

(*Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technlolgy, Guangzhou* 510641)

Abstract Variable structure control of general continuous Itô stochastic systems is investigated, a sliding manifold is constructed and a variable structuve control law is given. An example is given at the end of the paper to illustrate the application method of the results of this paper.

Key words Stochastic system, sliding manifold, variable structure control, mean-square stability.