第18卷 第6期 自动化学报 Vol. 18, No. 6
1992年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1992

同时不变子空间与鲁棒干扰解耦[1)]

贾英民 高为炳 程勉
(北京航空航天大学第七研究室,北京 100083)

摘要

本文主要讨论了同时不变子空间的三种特征:即时域特征、频域特征和几何特征. 特别对包含在给定子空间H中的最大同时不变子空间给出了新的描述. 利用这些结果, 文中首先给出了离散扰动系统鲁棒干扰解耦问题的充要条件, 然后推广到连续扰动系统, 获得了一个Kharitonov 型的结果,使得两种扰动下的鲁棒干扰解耦问题在理论上得到了完整的解决.

关键词: 同时不变子空间,鲁棒干扰解耦,系统综合,几何方法,不确定性.

一、引言

同时不变子空间与鲁棒干扰解耦问题是文献[1]首次引进的两个新概念,是把几何理论应用到鲁棒控制中的一个新尝试. 那里除了给出了两个概念的定义外, 主要研究了同时不变子空间的结构算法并由此得到了离散和连续扰动下鲁棒干扰解耦问题的充分条件. 但就其必要条件来说却不能象单个对象那样简单地给出. 这在一定程度上限制了上述概念的意义. 本文通过对同时不变子空间进行深入的研究, 获得了一些新的特征. 从而对文献[1]提出的鲁棒干扰解耦问题给出了充要条件,使得离散和连续扰动下的鲁棒干扰解耦问题在理论上得到了完整解决.

一般意义下的干扰解耦问题仅仅考虑了系统的输出信号不受外界干扰的影响, 但系统本身的模型被认为是不变的.这样以往的研究忽略了一个重要的事实,任何系统模型都具有无法迴避的不确定性. 例如,由外界干扰信号引起系统参数的变化、未建模误差、系统元件老化、传感器或作用器失效等等. 随着对控制系统的要求越来越高,研究带有不确定性系统的干扰解耦问题已成为必然. 鲁棒干扰解耦问题正是研究系统模型发生变化时系统干扰解耦性质的不变性.

近几年来,系统的鲁棒性研究有了较大的发展. 特别是 1978 年 Kharitonov 定理的发现[2], 使得鲁棒性研究进入了一个新的时期. 该定理的主要内容是一个区间多项式簇是 Hurwitz 稳定的当且仅当四个 Kharitonov 顶点多项式是 Hurwitz 稳定的. 这是个形式简单,结论惊人的结果. 到目前为止有关该定理的扩展、一般化、新证明以及应用文章已发表了许多,其中最具有代表性的结果是 Edge 定理[3]、Box 定理[4]以及小增益定理的一般化[5]等. 这些结果的一个共同特点就是把一簇系统的稳定性检验问题化为有限个

本文于 1991 年 4 月 12 日收到.
1) 国家自然科学基金与航空科研基金资助的课题.

顶点或者一维棱边的检验问题.正是基于这种思想,本文首先考虑了离散扰动系统的鲁棒干扰解耦问题然后对连续扰动系统作了有意义的推广,获得了一个 Kharitonov 型结果.称之为 Kharitonov 定理的干扰解耦形式.

二、(A_i,B_i)- 同时不变子空间

不变子空间的概念已经在文献[6]中系统地研究过并成功地解决了干扰解耦问题.本文为了处理鲁棒干扰解耦问题,同时不变子空间的概念是必需的.

考虑系统

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i,\ i\in \underline{k} \tag{1}$$

其中 A_i: $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, B_i: $\mathscr{U}\to\mathscr{X}$; $\mathscr{X}:=R^n$, $\mathscr{U}:=R^m$.

定义 1. 设 $V\subset\mathscr{X}$. 如果存在同一反馈规律 $u_i=Fx_i$, $i\in\underline{k}$, 使得从每个 $x_0\in V$ 出发的轨迹都有 $x_i(t,x_0)\in V, t\geqslant 0$, $i\in\underline{k}$, 那么 V 被称为系统(1)的 (A_i,B_i)- 同时不变子空间,简称为同时不变子空间.

定理 1. 对系统(1)来说,下面的结论等价

i V 是系统(1)的同时不变子空间

ii 存在变换 $F:\mathscr{X}\to\mathscr{U}$ 使得$(A_i+B_iF)V\subset V$, $i\in\underline{k}$.

iii 存在变换 $F:\mathscr{X}\to\mathscr{U}$ 使得 $\forall x_0\in V$ 都有严格正则的有理函数 $\xi_i(s)$, $\omega_i(s)$, $i\in\underline{k}$满足

a $\omega_i(s)=F\xi_i(s)$,

b $\xi_i(s)\in V$ 对所有 s 成立,

c $x_0=(sI-A_i)\xi_i(s)-B_i\omega_i(s)$.

证明. i $\Rightarrow$ ii. 设结论 i 成立,则存在 F 使得 $\forall x_0\in V$ 有 $x_i(t,x_0)=e^{(A_i+B_iF)t}x_0\in V$, $t\geqslant 0$, $i\in\underline{k}$. 对 $x_i(t,x_0)$ 求导并令 $t=0$ 得 $(A_i+B_iF)x_0\in V$, $i\in\underline{k}$. 故从 x_0 的任意性知结论 ii 成立. ii $\Rightarrow$ iii. 设结论 ii 成立, 则 $\forall x_0\in V$ 可令 $\xi_i(s)=(sI-A_i-B_iF)^{-1}x_0$, $\omega_i(s)=F\xi_i(s)$, $i\in\underline{k}$. 通过级数展开及 V 对 A_i+B_iF 的不变性得 $\xi_i(s)\in V$ 对所有 s 成立. iii $\Rightarrow$ i. 为叙述方便, 用 $\xi_i(t)$, $\omega_i(t)$, 表示 $\xi_i(s)$, $\omega_i(s)$ 的拉氏反变换. 因此当结论 iii 成立时有 $\dot{\xi}_i(t)=A_i\xi_i(t)+B_i\omega_i(t)$, $u_i=\omega_i(t)=F\xi_i(t)$, $\xi_i(t)\in V$, $\xi_i(0)=x_0$, $i\in\underline{k}$. 从定义 1 知结论 i 成立.

注 1. 在定理 1 中,结论 i 是同时不变子空间的时域特征,结论 ii 是其几何特征,结论 iii 是其频域特征.

显然,从定义 1 可知零空间和整个状态空间 $\mathscr{X}$ 都是同时不变子空间. 事实上还可容易地证明同时不变子空间对加法运算封闭. 因此任意给定子空间 $\mathrm{H}\subset\mathscr{X}$, 一定有一个包含在H中最大的同时不变子空间. 以下用符号 $V^*(\mathrm{H})$ 表示. 此外类似于文献 [7] 定义 $V_\Sigma(\mathrm{H})$ 表示所有存在同一反馈阵 F 使得系统 (1) 之解 $x_i(t,x_0)\in\mathrm{H}$, $t\geqslant 0$, $i\in\underline{k}$ 成立的初始值 x_0 组成的集合, 显然 $V_\Sigma(\mathrm{H})\subset\mathrm{H}$. 按照定理 1, $V_\Sigma(\mathrm{H})$ 的其它等价陈述也可容易地给出.

定义 2. $\forall x_0\in V_\Sigma(\mathrm{H})$, 如果存在反馈阵 F 和子空间 $H_1\subset\mathrm{H}$, 使得对每个 i 都有 H

是包含系统(1)之解 $x_i(t,x_0)$ 的最小维子空间，则称系统 (1) 相对子空间H是非降维的(简称非降维的)，否则称系统(1)相对子空间H是降维的(简称降维的)。

对非降维系统有如下重要结论:

定理 2. 设系统(1)相对子空间H是非降维的，则有 $V^*(\mathrm{H}) = V_\Sigma(\mathrm{H})$.

证明. 从定理 1 结论 iii, $V^*(\mathrm{H}) \subset V_\Sigma(\mathrm{H})$ 是显然的. 为证其逆包含关系，只需证明 $\forall x_0 \in V_\Sigma(\mathrm{H})$, 那么 x_0 一定含在H中的某个同时不变子空间内即可. 事实上，由系统(1)相对H的非降维性，如果 $x_0 \in V_\Sigma(\mathrm{H})$, 那么必存在反馈阵 F 和子空间 $H_1 \subset \mathrm{H}$, 使得系统(1)之解 $x_i(t,x_0) \in H_1$, $i \in \underline{k}$. 当然也有 $\dot{x}_i(t,x_0) \in H_1$, $i \in \underline{k}$. 现证 H_1 为一同时不变子空间. 设 $\dim(H_1)=l$, 故对每个 i 可类似文献[8]取 l 个线性独立的向量 $x_{ij} = x_i(t_{ij},x_0)$, $j \in \underline{l}$. 让 $x'_{ij} = \dot{x}_{ij}$, $i \in \underline{k}$, $j \in \underline{l}$, 以及 $u_{ij} = u_i(t_{ij})$, $i \in \underline{k}$, $j \in \underline{l}$, 为其对应的控制. 则它们应满足方程 $x'_{ij} = A_i x_{ij} + B_i u_{ij}$, $i \in \underline{k}$, $j \in \underline{l}$. 从 $V_\Sigma(\mathrm{H})$ 的定义知 $u_{ij} = F x_{ij}$ $i \in \underline{k}$, $j \in \underline{l}$. 因此 $x'_{ij} = (A_i + B_i F) x_{ij}$, $i \in \underline{k}$, $j \in \underline{l}$. 注意到对所有的 i 和 j 有 $x'_{ij} \in H_1$ 以及对每个 i 有 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{il}$ 为 H_1 的基可立即得到 $(A_i + B_i F) H_1 \subset H_1$, $i \in \underline{k}$. 即 H_1 是一个同时不变子空间. 综上定理证毕.

三、鲁棒干扰解耦问题

在一般意义下的干扰解耦问题中，主要考虑下系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + S\mathrm{d}(t), \tag{2a}$$

$$y = Cx, \tag{2b}$$

其中 $A: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $B: \mathscr{U} \to \mathscr{X}$, $C: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, $S: \mathscr{D} \to \mathscr{X}$,

$$\mathscr{X} := R^n, \quad \mathscr{U} := R^m, \quad \mathscr{Y} := R^p, \quad \mathscr{D} := R^q.$$

并假定外界干扰信号 $\mathrm{d}(t)$ 是可用控制器直接测量的且属于相当丰富的函数类. 显然这样的选择在某种意义上反映了人们对干扰信号特征的未知.

设系统(2)的 A, B 阵具有有限的离散扰动，故考虑下面系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + S\mathrm{d}(t), & (3a)\\ y_i &= C x_i, & (3b) \end{aligned}\right\} i \in \underline{k}$$

其中 A_i, B_i, $i \in \underline{k}$ 和 C, S 的意义分别同系统(2).

定义 3. 系统(3)称之为非降维的(降维的)当且仅当式 (3a) 中的无扰动方程 $\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$ 相对子空间 $\mathrm{Ker}C$ 是非降维的(降维的).

令 $\phi = \mathrm{Im}S$, $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}C$, 那么系统(3)的鲁棒干扰解耦问题可严格表述如下:

定义 4. 给定系统(3)，如果求得反馈阵 F 使得

$$\langle A_i + B_i F \mid \phi \rangle \subset \mathrm{H}, \quad i \in \underline{k}$$

那么系统(3)则称为是鲁棒干扰解耦的. 这里 $\langle A \mid B \rangle = B + AB + A^2B + \cdots + A^{n-1}B$.

定理 3. 如果系统(3)是非降维的，则它是鲁棒干扰解耦的充要条件为: $\phi \subset V^*(\mathrm{H})$.

证明. 必要性. 设系统(3)是鲁棒干扰解耦的. 则存在反馈阵 F 使得 $\langle A_i + B_i F \mid \phi \rangle \subset \mathrm{H}$, $i \in \underline{k}$. 当然 $\forall x_0 \in \phi$, 有 $\langle A_i + B_i F \mid x_0 \rangle \subset \mathrm{H}$, $i \in \underline{k}$. 这等价于 $e^{(A_i + B_i F)t} x_0 \in \mathrm{H}$, $i \in \underline{k}$. 由 $V_\Sigma(\mathrm{H})$ 的定义及定理 2 知 $\phi \subset V_\Sigma(H) = V^*(\mathrm{H})$.

充分性. 因为 $V^*(\mathrm{H})$ 是含在H中的最大同时不变子空间. 故可取 F 满足

$$(A_i+B_iF)V^*(\mathrm{H})\subset V^*(\mathrm{H}),\ i\in \underline{k}.$$

因此从 $\phi\subset V^*(\mathrm{H})$ 可得 $(A_i+B_iF)^j\phi\subset V^*(\mathrm{H})$, $i\in\underline{k}$, $j\in\underline{n-1}$. 即

$$\langle A_i+B_iF\,|\,\phi\rangle\subset V^*(\mathrm{H})\subset \mathrm{H},\ i\in\underline{k}.$$

定理证毕.

为讨论方便,把系统(2)看作矩阵对 (A,B,C,S). 当 A,B,C,S 的元素按某种规则排列时,又可看作空间 R^e, $e=n(n+m+p+q)$ 中的一个点 P. 类似地系统(3)可看作 R^e 中的 k 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_k$. 设 $\lambda_i\geqslant 0, i\in\underline{k}$, 则

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iP_i,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,$$

构成 R^e 空间中的一个多面体 $\boldsymbol{U}$, 显然对 $\boldsymbol{U}$ 中的任一点, C、S 都是相同的,变化的仅是 A,B 阵. 考虑系统(2)的 A, B 阵在 $\boldsymbol{U}$ 中连续变化时的干扰解耦问题称之为连续扰动系统的鲁棒干扰解耦问题.

定义 5. 记 $\boldsymbol{U}=\mathrm{conv}\{(A_i,B_i,C,S),\ i\in\underline{k}\}$. 那么系统 (A_i,B_i,C,S), $i\in\underline{k}$, 称为 $\boldsymbol{U}$ 的顶点系统.

考虑连续扰动系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\bar{A}\boldsymbol{x}+\bar{B}\boldsymbol{u}+S\mathrm{d}(t),\\ \boldsymbol{y}&=C\boldsymbol{x}.\end{aligned}\quad (\bar{A},\bar{B},C,S)\in\boldsymbol{U}\qquad \begin{matrix}(4a)\\(4b)\end{matrix}$$

定义 6. 系统(4)称为鲁棒干扰解耦的当且仅当存在反馈阵 F 使得

$$\langle\bar{A}+\bar{B}F\,|\,\phi\rangle\subset \mathrm{H},\ \forall(\bar{A},\bar{B},C,S)\in\boldsymbol{U}$$

定理 4. 设 $\boldsymbol{U}$ 的顶点系统是非降维的, 则系统(4)是鲁棒干扰解耦的当且仅当 $\boldsymbol{U}$ 的顶点系统是鲁棒干扰解耦的.

证明. 由于 $\boldsymbol{U}$ 的顶点系统属于 $\boldsymbol{U}$, 因此必要性是显然的. 为证其充分性, 首先证明这样的事实: 给定子空间 V, 如果 F 满足 $(A_i+B_iF)V\subset V$, $i\in\underline{k}$, 那么 F 也一定满足 $(\bar{A}+\bar{B}F)V\subset V$, $\forall(\bar{A},\bar{B},C,S)\in\boldsymbol{U}$. 从 $\boldsymbol{U}$ 的定义, $\forall(\bar{A},\bar{B},C,S)\in\boldsymbol{U}$, 必存在 $\lambda_i\geqslant 0$, $i\in\underline{k}$, 使得

$$\bar{A}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i,\ \bar{B}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iB_i.$$

因此当 $(A_i+B_iF)V\subset V$, $i\in\underline{k}$ 时,有

$$(\bar{A}+\bar{B}F)V=\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A_i+B_i)\right)V\subset V.$$

根据 $\boldsymbol{U}$ 的顶点系统是鲁棒干扰解耦的, 故从定理 3 知 $\phi\subset V^*(\mathrm{H})$. 取 F 满足 $(A_i+B_iF)V^*(\mathrm{H})\subset V^*(\mathrm{H})$, $i\in\underline{k}$, 则 $(\bar{A}+\bar{B}F)\phi\subset(\bar{A}+\bar{B}F)V^*(\mathrm{H})\subset V^*(\mathrm{H})$. 当然 $\langle\bar{A}+\bar{B}F\,|\,\phi\rangle\subset V^*(\mathrm{H})\subset\mathrm{H}$, $\forall(\bar{A},\bar{B},C,S)\in\boldsymbol{U}$. 即系统(4)是鲁棒干扰解耦的.

注 2. 从形式上看定理 4 是非常相似于 Kharitonov 定理的. 只不过现在不是关于鲁棒稳定性分析而是关于综合问题: 鲁棒干扰解耦. 因此有理由称定理 4 为鲁棒干扰解耦中的 Kharitonov 定理. 它表明当系统(2)的 A,B 阵在 $\boldsymbol{U}$ 中连续变化时鲁棒干扰解耦问题可以看作与 $\boldsymbol{U}$ 的顶点系统的鲁棒干扰解耦问题等价. 也就是说系统的鲁棒干扰

解耦性在凸组合运算之下保持不变，这是鲁棒控制中非常期望的结果.

四、结　论

本文从实际出发研究了扰动系统的干扰解耦问题. 由于利用了同时不变子空间的新的几何概念，使问题简单明了. 众所周知，对一般意义下的干扰解耦问题的研究，自然引出了 (A,B)-不变子空间的重要几何概念，除了使问题本身得到完整的解决外，还推动了整个线性系统理论的巨大发展. 通过对鲁棒干扰解耦问题的研究，又建立了同时不变子空间的新概念，这是 (A,B)-不变子空间的一般化与推广，它的作用会在今后的研究中显示出来.

本文在写作过程中，与夏小华同志进行了有益的讨论，特表感谢.

参　考　文　献

[1] 贾英民、高为炳、程　勉，鲁棒干扰解耦问题的几何方法，控制与决策，**6**(1991),(6),401—406.

[2] Barmish, B. R., New Tools for Robustness Analysis, Proc. of the 27th CDC, Ausitin, Texas, December, (1988), 1—6.

[3] Bartlett, A. C., Hollot, C. V. and Huang, L., Root Locations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edge, *Mathematics of Control Singnal and Systems*, **1**(1988), 61—71.

[4] Chapellat, H. and Bhattacharyya, S. P., A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **34**(1989), (3), 306—311.

[5] Chapellat, H., Dahleh, M. A. and Bhattacharyya, S. P., Robust Stability under Structured and Unstructured Perturbations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **35**(1990), (10), 1100—1108.

[6] Wonham, W. M, Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, 2nd. ed. New York, Springer-Verlag, 1979.

[7] Hautus, M. L. J., (A, B)-Invariant and Stabilizability Subspaces: A Frequency Domaim Description, *Automatica*, **16**(1980), 703—707.

[8] Basile, G. and Marro, G., Controlled and Conditioned Invariant Subspaces in Linear System Theorey, *Optimization Theory and Applications*, **3**(1969), (5), 306—315.

SIMULTANEOUS INVARIANT SUBSPACES AND ROBUST DISTURBANCE DECOUPLING

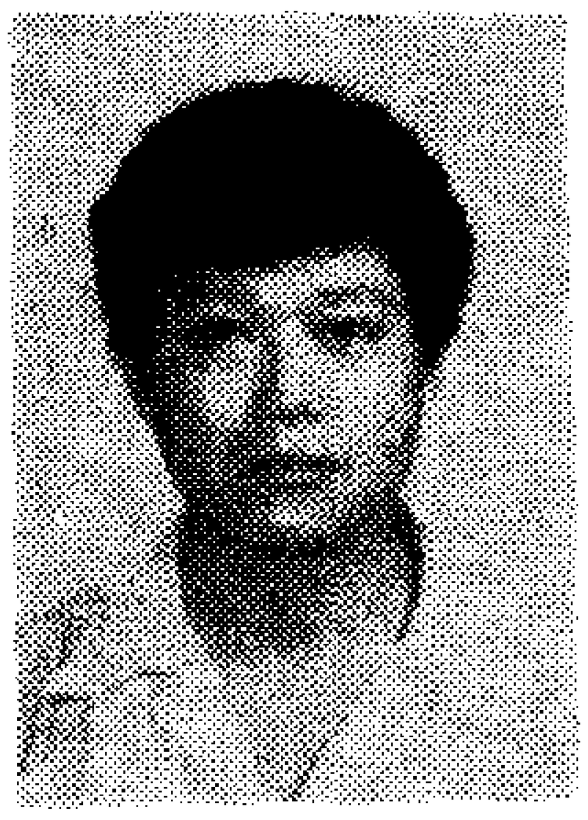
JIA YINGMIN　GAO WEIBING　CHENG MIAN

(The 7th Research Division, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT

This peper is mainly devoted to the study of three kinds of characterizations of simultaneous invariant subspaces, i.e., time domain characterization, frequency domain characterization, and geometric characterization. In particular, the paper gives a new description of the largest simultaneous invariant subspace contained in a given subspace H. Based on these results, a necessary and suffcient condition for robust disturbance decoupling problem of discrete perturbation systems is first given. Then, by extending the discuss to the continuous perturbation case. a Kharitonov-like result is derived. Thus, robust disturbance decoupling problems under two kinds of perturbations are entirely solved in theory.

Key words: Simultaneous invariant subspace; robust disturbance decoupling; system synthesis; geometric approach; uncertainty.



贾英民 1982年毕业于山东大学数学系控制理论专业。毕业后在河南省焦作矿业学院电气工程系工作，1987年入北京航空航天大学第七研究室攻读硕士学位，现为该室博士生。目前的研究兴趣为不确定系统、鲁棒控制。

高为炳 1948年西北工学院航空系毕业留校任助教，1951年清华大学航空系讲师，1956年北京航空学院副教授，1978年教授，1981年控制理论与应用学科博士生导师。1992年当选为中国科学院学部委员。研究兴趣有：非线性控制系统、机械系统（机器人，自主车等）、动力学与控制、大系统、不确定动力学系统控制、智能控制（学习控制、循环控制及神经元网络控制）以及航空航天飞行器控制。

程 勉 1953年毕业于北京航空学院。1958年任该院讲师，1980年任该院副教授，1986年任教授，1990年控制理论与应用学科博士生导师。学术兴趣为一般力学、非线性振动、非线性控制系统、机器人动力学与控制、智能控制等。