重离子碰撞的费曼路径积分方法(FPIM)描述

贺 泽 君

(中国科学院原子核研究所)

用FPIM写出了内禀态的传播子，通过它将内禀态用内禀初态表示。在内禀态中求相对运动与内禀运动耦合的平均，得到它们的响应关系。由此依次得到相对运动的作用势、薛定谔方程。取方程的形式解 $\psi=e^{R+i\varphi}$，便从薛定谔方程得到两个方程。从一个方程得到运动方程，从另一个得到输运方程。又由FPIM得到出射重离子的相对运动波函数，取玻恩展开的第一近似，最后定出了碰撞振幅。

关键词 费曼路径积分方法，重离子碰撞的能量耗散，运动方程，输运方程和碰撞振幅。

一、引　　言

FPIM是一种直观的更接近经典力学表述方式的量子力学。它自然地描述了具有宏观自由度与微观自由度耦合的系统，因而它是研究重离子碰撞的有用工具。自七十年代初，已有人用FPIM研究重离子的碰撞。迄今Fujita和Takigawa分别借用Pechukas研究原子碰撞发展起来的路径积分表述形式[1]，讨论了重离子的碰撞[2,3]，Massmunn等人用FPIM计算了重离子的库仑激发[4]，最近Brink等人用这一方法讨论了重离子碰撞的输运系数[5]。诸作者用FPIM讨论了某些重离子碰撞的问题。

本文将从费曼路径积分的普遍形式出发，导出重离子的相对运动与内禀运动的响应关系(耦合在内禀态中的平均)。由此得到重离子相对运动的薛定谔方程，随着导出运动方程、输运方程和碰撞振幅。给具有耗散的重离子碰撞作了一个形式描述。

二、相对运动与内禀运动耦合的平均

令碰撞系统的相对运动为 Q；内禀运动为 q；$\hat{V}(Q,p,q)$ 为 Q 与 q 系统的耦合，p 是 Q 的共轭动量。于是总系统的作用泛函为：

$$S=S(Q)+S(q)-\int_0^t \hat{V}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

$S(Q)$ 是 Q 系统的作用泛函；$S(q)$ 是 q 系统的作用泛函；$\hat{V}=\hat{V}(Q,p,q)$。根据FPIM，由(1)式写出内禀态的传播子[6]：

$$K(q,t;q_0,0)=\int \exp\frac{i}{\hbar}\left[S(q)-\int_0^t \hat{V}\,\mathrm{d}t\right]\mathscr{D}[q(t)].$$

于是重离子在时刻 t 的内禀态 $\chi_t(q)$ 用初态 $\chi(q_0)$ 表示为：

$$\chi_f(q)=\int\left\{\int \exp\frac{i}{\hbar}\left[S(q)-\int_0^t \hat{V}dt\right]\mathscr{D}[q(t)]\right\}\chi(q_0)\mathrm{d}q_0. \qquad (2)$$

t 是重离子碰撞作用的时间。由(2)式写出耦合在内禀态中的平均：

$$\langle\hat{V}\rangle=\int\hat{V}\delta(q-q')\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S(q)-S(q')-\int_0^t(\hat{V}_s-\hat{V}'_s)\mathrm{d}s\right]\right\}$$

$$\times\chi^*(q'_0)\chi(q_0)\mathrm{d}q_0\,\mathrm{d}q'_0\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}q'\mathscr{D}[q(t)]\mathscr{D}[q'(t)]. \qquad (3)$$

这里的 $\hat{V}'=\hat{V}(Q,p,q')$，$\hat{V}_s$ 指 $\hat{V}$ 的时间变量为 s。

考虑弱耦合情况，(3)式的指数展开只保留到一级。又考虑到重离子初态不是唯一确定的，应对初态求平均。在能量表象中初态的权重是对角的密度矩阵，因此初态的平均为：

$$\overline{\chi^*(q'_0)\chi(q_0)}=\sum_{ii}\rho_{ii}\chi_i^*(q'_0)\chi_i(q_0).$$

代回(3)式，利用公式：

$$\int_a^b\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[Q(t)]\right\}\hat{V}[Q(t),t]\mathscr{D}[Q(t)]=\int K(b,c)\hat{V}(Q_c,t_c)K(c,a)\mathrm{d}Q_c,$$

和能量表象中的传播子公式

$$K(p_t,p'_t)=\sum_a\phi_a(p_t)\phi_a^*(p'_t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_a(t-t')},$$

$$\omega_{fi}=\frac{E_f-E_i}{\hbar},\quad \hat{V}_{fi}=\langle\phi_f|\hat{V}|\phi_i\rangle,$$

最后(3)式化成：

$$\langle\hat{V}\rangle=\sum_i\rho_{ii}\hat{V}_{ii}+\sum_{if}\rho_{ii}\left(\frac{i}{\hbar}\right)\hat{V}_{if}\int_0^t\hat{V}_{fi}\exp[-i\omega_{fi}(t-s)]\mathrm{d}s$$

$$-\sum_{if}\rho_{ii}\left(\frac{i}{\hbar}\right)\hat{V}_{if}\int_0^t\hat{V}_{fi}\exp[i\omega_{fi}(t-s)]\mathrm{d}s$$

$$=\sum_i\rho_{ii}\hat{V}_{ii}-\sum_{if}2\rho_{ii}\hat{V}_{if}\int_t^0\hat{V}_{fit-s}\sin\omega_{fi}s\frac{\mathrm{d}s}{\hbar}. \qquad (4)$$

讨论具有耗散的重离子碰撞，弹性散射矩阵元应取为零，$\hat{V}_{ii}=0$，则(4)式变为：

$$\langle\hat{V}\rangle=-\sum_{if}2\rho_{ii}\hat{V}_{if}\int_t^0\hat{V}_{fit-s}\sin\omega_{fi}s\frac{\mathrm{d}s}{\hbar}. \qquad (5)$$

(4)，(5)式是我们用 FPIM 求得的耦合平均值，实际上它们就是相对运动与内禀运动的响应关系。当相对运动 Q 出现一种扰动，内禀系统 q 就会给出一个不为零的力学量平均值。且时刻 t 给出的平均值只依赖于以前诸时刻相对运动的扰动。由此揭示了在重离子碰撞过程中相对运动能量转变为内禀激发能的物理事实。因而(4)，(5)式是阐明具有耗散的重离子碰撞过程极为重要的关系式。我们曾用(5)式导出了重离子碰撞时的摩擦系数 γ_{kl}[7]，下面我们又将从(4)，(5)式导出具有耗散的重离子碰撞的其它关系式。

三、Q 系统中运动方程与输运方程

重离子的 Q 系统中的运动方程和输运方程在描述重离子的碰撞方面是十分重要的，在此我们用一种简单的方法把它们导出来。

我们已在某一确定的 Q 下得到了耦合的平均值 $\langle\hat{V}\rangle$，于是我们就能写出这一确定 Q 时的作用势。

$$\hat{V}(Q)=\hat{U}(Q)+\sum_{i}\rho_{ii}\left\{\hat{V}_{ii}-\sum_{f}2\hat{V}_{if}\int_{t}^{0}\hat{V}_{fit-s}\sin\omega_{fi}s\frac{\mathrm{d}s}{\hbar}\right\}. \tag{6}$$

这里的 $\hat{U}(Q)$ 是纯粹的相对运动系统中的作用势。于是 Q 系统相应的薛定谔方程写为：

$$-\frac{\hbar}{i}\partial\psi(Q,t)/\partial t=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_Q^2\psi(Q,t)+\left\{\hat{U}(Q)\right.$$

$$\left.+\sum_{i}\rho_{ii}\hat{V}_{ii}-\sum_{f}2\rho_{ii}\hat{V}_{if}\int_{t}^{0}\hat{V}_{fis-t}\sin\omega_{fi}s\frac{\mathrm{d}s}{\hbar}\right\}\psi(Q,t). \tag{7}$$

我们可以求解方程(7)得到重离子碰撞的各种信息。但是真正求解(7)式有很多困难。人们又熟知，重离子的相对运动在重离子碰撞理论中多半用半经典近似处理的，因此我们取方程(7)的一个形式解：

$$\psi(Q,t)=\exp\{R(Q,t)+i\varphi(Q,t)\}. \tag{8}$$

这里的 $R(Q,t)$，$\varphi(Q,t)$ 皆为实函数。若取 $S=\hbar\varphi$ 为作用泛函，则(8)式就成为半经典形式解[8]。将(8)式代入(7)式，最后得方程：

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{\hbar}{2\mu}\nabla_Q^2\varphi-\frac{\hbar}{\mu}\nabla_Q R\nabla_Q\varphi, \tag{9}$$

$$-\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2\mu}[(\nabla_Q\varphi)^2-(\nabla_Q R)^2-\nabla_Q^2 R]+[\hat{U}(Q)+\langle\hat{V}\rangle]. \tag{10}$$

因此也可以通过求解联立方程(9)、(10)式得到 R、φ，从而得到 $\psi(Q,t)$。下面我们将从(10)、(9)式导出 Q 系统的运动方程和输运方程。

1. Q 系统中的运动方程

因为(10)式中的

$$S=\hbar\varphi=S(Q)-\int_0^t\langle\hat{V}\rangle\mathrm{d}t \tag{11}$$

为 Q 系统的作用泛函，显然这时的(10)式就是 Q 系统的哈密顿-雅可比方程。

由经典力学知：

$$V=\frac{1}{\mu}\nabla_Q S,\quad u=\frac{\hbar}{\mu}\nabla_Q R,$$

V 是重离子的相对运动速度，u 也是一种速度量。

于是(10)式变成：

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=\left[\frac{1}{2}\mu V^2+\hat{U}(Q)+\langle\hat{V}\rangle\right]-\frac{1}{2}\mu u^2-\frac{1}{2}\hbar\,\mathrm{div}\,u, \tag{12}$$

因为 $$-\nabla_Q \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla_Q S}{\partial t} = -\mu \frac{\partial V}{\partial t}, \tag{13}$$

又 $$\mu \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\mu \nabla_Q V^2 = \mu\left[\frac{\partial V}{\partial t} + V\nabla_Q V\right] = \mu \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2}, \tag{14}$$

于是由(12)、(13)，(14)式得：

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla_Q \hat{U}(Q) - \nabla_Q \langle \hat{V} \rangle + \nabla_Q \left[\frac{1}{2}\mu u^2 + \frac{1}{2}\hbar \operatorname{div} u\right]. \tag{15}$$

在(15)式中代入耦合项的平均值之前，对耦合项平均值中的$(\hat{V}_\nu)_{fit-s}$作如下展开：

$$(\hat{V}_\nu)_{fit-s} = (\hat{V}_\nu)_{fi} - S[\dot{Q}\nabla_Q(\hat{V}_\nu)_{fi} + \dot{P}\nabla_P(\hat{V}_\nu)_{fi}] + \cdots\cdots.$$

于是耦合的平均值可写为：

$$\begin{aligned}\langle \hat{V} \rangle = &\sum_i \rho_{ii}\hat{V}_{ii} - \sum_{if} 2\rho_{ii}\hat{V}_{if}\hat{V}_{fi}\int_t^0 \sin\omega_{fi}s\frac{\mathrm{d}s}{\hbar} \\ &+ \sum_{if} 2\rho_{ii}\hat{V}_{if}\nabla_Q\hat{V}_{fi}\dot{Q}\int_t^0 \sin\omega_{fi}s\frac{s\mathrm{d}s}{\hbar} \\ &+ \sum_{if} 2\rho_{ii}\hat{V}_{if}\nabla_P\hat{V}_{fi}\dot{P}\int_t^0 \sin\omega_{fi}s\frac{s\mathrm{d}s}{\hbar} \\ &+ \cdots\cdots.\end{aligned} \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式得：

$$\begin{aligned}\mu \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} = &-\nabla_Q \hat{U}(Q) - \hat{\alpha}(Q) + \hat{\beta}(Q) + \hat{\delta}(Q) - \hat{\Gamma}(Q) - \hat{\eta}(Q) \\ &+ \nabla_Q\left[\frac{1}{2}\mu u^2 + \frac{1}{2}\hbar \operatorname{div} u\right] + \cdots.\end{aligned}$$

方程中的各个系数为：

$$\hat{\alpha} = \sum_k \sum_\mu \sum_i \rho_{ii}\nabla_{Qk}(\hat{V}_\mu)_{ii},$$

$$\hat{\beta} = \sum_k \sum_{\mu\nu} \sum_{if} \frac{2\rho_{ii}}{\hbar}(\nabla_{Qk}(\hat{V}_\mu)_{if})(\hat{V}_\nu)_{fi}\int_t^0 \sin\omega_{fi}s\mathrm{d}s,$$

$$\hat{\delta} = \sum_l \sum_{\mu\nu} \sum_{if} \frac{2\rho_{ii}}{\hbar}(\hat{V}_\mu)_{if}(\nabla_{Ql}(\hat{V}_\nu)_{fi})\int_t^0 \sin\omega_{fi}s\cdot\mathrm{d}s,$$

$$\hat{\Gamma} = \sum_{kl} \sum_{\mu\nu} \sum_{if} \frac{2\rho_{ii}}{\hbar}(\nabla_{Qk}(\hat{V}_\mu)_{if})(\nabla_{Ql}(\hat{V}_\nu)_{fi})\dot{Q}_l\int_t^0 \sin\omega_{fi}s\cdot s\mathrm{d}s,$$

$$\hat{\eta} = \sum_{kl} \sum_{\mu\nu} \sum_{if} \frac{2\rho_{ii}}{\hbar}(\nabla_{Qk}(\hat{V}_\mu)_{if})(\nabla_{Pl}(\hat{V}_\nu)_{fi})\dot{P}_l\int_t^0 \sin\omega_{fi}s\cdot s\mathrm{d}s.$$

于是在略去小项后相对运动第 k 分量的方程为：

$$\begin{aligned}\mu \frac{\mathrm{d}^2 Q_k}{\mathrm{d}t^2} = &-\frac{\partial}{\partial Q_k}\hat{U}(Q) - \hat{\alpha}_k(Q) + \hat{\beta}_k(Q) - \sum_l \gamma_{kl}(Q)\dot{Q}_l - \sum_l \eta_{kl}(Q)\dot{P}_l \\ &+ \mu u\frac{\partial}{\partial Q_k}u + \frac{1}{2}\hbar\frac{\partial}{\partial Q_k}(\operatorname{div} u).\end{aligned} \tag{17}$$

式中的 γ_{kl} 是摩擦系数，它在[7]中已给出。η_{kl} 是耦合与动量有关的力系数。方程右边第一项是外力，第二、三项是耦合项的梯度力，第四、五项依次为摩擦力和动量依赖力，后者由耦合项的相对运动座标的梯度和动量的梯度同时给出的贡献。方程的最后两项是量子力学效应力，它们来自薛定谔方程(7)。运动方程中存有量子效应是本文导出的运动方程的一个特点。

2. Q 系统的输运方程

过去不少作者从不同物理图象和方法入手导出了相对运动系统的 Fokker-Planck 方程[9,10]。现在我们沿着前面的做法求 Q 系统的输运方程。

从(8)式得到重离子的相对运动的几率分布：

$$\rho(Q,t)=\Psi^*(Q,t)\Psi(Q,t)=\exp\{2R(Q,t)\}, \tag{18}$$

由(9)，(18)式直接得到 $\rho(Q,t)$ 满足的微分方程：

$$\begin{aligned}\partial\rho/\partial t&=-\hbar/\mu[2\,\mathrm{div}\,R\nabla_Q\varphi+\nabla_Q{}^2\varphi]\rho\\&=-\hbar/\mu\{2\,\mathrm{div}\,R[\nabla_Q(\varphi+R)-\nabla_Q R]+[\nabla_Q^2(\varphi+R)-\nabla_Q^2 R]\}\rho\\&=-\mathrm{div}\left[\frac{\hbar}{\mu}\nabla_Q(\varphi+R)\rho\right]+\frac{\hbar}{2\mu}\nabla_Q^2\rho.\end{aligned} \tag{19}$$

由(11)式知这时的作用泛函为：

$$S=\hbar\varphi=S(Q)-\int_0^t\langle\hat{V}\rangle\mathrm{d}t. \tag{20}$$

将关系(16)代入(20)式中，得关系：

$$\begin{aligned}\nabla_Q S=&-\int_0^t\Big\{\nabla_Q\hat{U}(Q)+\sum_i\rho_{ii}\nabla_Q\hat{V}_{ii}-\sum_{if}2\rho_{ii}\hat{V}_{if}\nabla_Q\hat{V}_{fi}\int_t^0\sin\omega_{fi}s\frac{\mathrm{d}s}{\hbar}\\&-\sum_{if}2\rho_{ii}\nabla_Q\hat{V}_{if}\hat{V}_{fi}\int_t^0\sin\omega_{fi}s\frac{\mathrm{d}s}{\hbar}+\sum_{if}2\rho_{ii}\nabla_Q\hat{V}_{if}\nabla_Q\hat{V}_{fi}\dot{Q}\int_t^0\sin\omega_{fi}s\cdot\frac{s\mathrm{d}s}{\hbar}\\&+\sum_{if}2\rho_{ii}\nabla_Q\hat{V}_{if}\nabla_P\hat{V}_{fi}\dot{P}\int_t^0\sin\omega_{fi}s\cdot\frac{s\mathrm{d}s}{\hbar}+\cdots.\end{aligned} \tag{21}$$

最后将(21)式代入(19)式得到 $\rho(Q,t)$ 满足的方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t}=&D\sum_k\frac{\partial^2\rho}{\partial Q_k^2}-\frac{1}{\mu}\sum_k\frac{\partial}{\partial Q_k}(A_k\rho)-\frac{1}{\mu}\sum_k\frac{\partial}{\partial Q_k}(B_k\rho)+\frac{1}{\mu}\sum_k\frac{\partial}{\partial Q_k}(C_k\rho)\\&+\frac{1}{\mu}\sum_k\frac{\partial\rho}{\partial Q_k}(D_k\rho)+\frac{1}{\mu}\sum_k\frac{\partial}{\partial Q_k}(\Gamma_{kl}\rho)+\frac{1}{\mu}\sum_{kl}\frac{\partial}{\partial Q_k}(\eta_{kl}\rho).\end{aligned} \tag{22}$$

(22)式中的各个系数分别为：

$$A_k=\nabla_{Qk}\left[\hbar R-\int_0^t\hat{U}(Q)\mathrm{d}s\right],$$

$$B_k=\sum_\mu\sum_i\rho_{ii}\int_0^t\nabla_{Qk}(\hat{V}_\mu)_{iis'}\mathrm{d}s',$$

$$C_k=\sum_{\mu\nu}\sum_{if}\frac{2\rho_{ii}}{\hbar}\int_0^t(\nabla_{Qk}(\hat{V}_\mu)_{ifs'})(\hat{V}_\nu)_{fis'}\int_t^0\sin\omega_{fi}s\cdot s\mathrm{d}s\mathrm{d}s',$$

$$D_k=\sum_{\mu\nu}\sum_{if}\frac{2\rho_{ii}}{\hbar}\int_0^t((\hat{V}_\mu)_{ifs'})(\nabla_{Qk}(\hat{V}_\nu)_{fis'})\int_t^0\sin\omega_{fi}s\cdot s\mathrm{d}s\mathrm{d}s',$$

$$\Gamma_{kl}=\sum_{\mu\nu}\sum_{if}\frac{2\rho_{ii}}{\hbar}\int_0^t(\nabla_{Qk}(\hat{V}_\mu)_{ifs'})(\nabla_{Ql}(\hat{V}_\nu)_{fis'})\int_t^0\sin\omega_{fi}s\cdot s\mathrm{d}s\mathrm{d}s',$$

$$\eta_{kl}=\sum_{\mu\nu}\sum_{if}\frac{2\rho_{ii}}{\hbar}\int_0^t(\nabla_{Qk}(\hat{V}_\mu)_{ifs'})(\nabla_{pl}(\hat{V}_\nu)_{fis'})\int_t^0\sin\omega_{fi}s\cdot s\mathrm{d}s\mathrm{d}s'. \tag{23}$$

(22)式是相对运动几率分布满足的输运方程。它的右边的第一项是扩散项，扩散系数 $D=\frac{\hbar}{2\mu}$。从(22)式的各个系数（如(23)式所示）可知其余项均为漂移项。它们是各种力(势场梯度)给出的。其中第一项是势散射漂移，以下三项是耦合的梯度力漂移。依次为弹性散射漂移，和非弹性散射漂移。方程的最后两项依次为能量耗散力和耦合的动量依赖力引起的漂移。从(7)，(9)式又可以看到，方程(22)中的扩散系数来自于量子效应。输运方程保留着量子效应也是本文导出的输运方程的一个特点。

四、碰 撞 振 幅

由(1)式知 Q 系统的作用泛函又可写为：

$$S=S_0(Q)-\int_{t_1}^{t_2}[\hat{U}(Q)+\hat{V}]\mathrm{d}t.$$

这里的 $\hat{V}=\hat{V}(Q,p,q)$；$S_0(Q)$是相对运动的自由作用泛函。于是，在某一确定内禀态 q 下相应的传播子由 FPIM 得到：

$$K^q(Q_2,t_2;Q_1,t_1)=\int\exp\frac{i}{\hbar}\left\{S_0(Q)-\int_{t_1}^{t_2}[\hat{U}(Q)+\hat{V}]\mathrm{d}t\right\}\mathscr{D}[Q(t)].$$

在这里我们首先考虑作用势 $\hat{U}(Q)+\hat{V}$ 是小量，可作微扰处理的情况。于是可将传播子指数展开，并考虑到在碰撞过程中，t 时刻重离子可进到各种内禀态，则传播子 K^q 应对时刻 t 的内禀态求平均。上式则变为：

$$\begin{aligned}K(Q_2,t_2;Q_1,t_1)&=\int\chi^*(q_t)K^q(Q_2,t_2;Q_1,t_1)\chi(q_t)\mathrm{d}q_t\\&=\int\exp\frac{i}{\hbar}S_0(Q)\left\{1-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2}\left[\hat{U}(Q)+\langle\hat{V}\rangle\right]\mathrm{d}t+\cdots\right\}\mathscr{D}[Q(t)].\end{aligned} \tag{24}$$

用下述公式将重离子的路径积分换为对重离子路径通过的势场作用范围的积分[6]：

$$\int_a^b\exp\frac{i}{\hbar}S[Q(t)]\hat{V}[Q(t),t]\mathscr{D}[Q(t)]=\int K^0(b,c)\hat{V}(Q_c,t_c)K^0(c,a)\mathrm{d}Q_c. \tag{25}$$

则(24)式最后变为：

$$K(Q_2,t_2;Q_1t_1)=\left\{K^0(Q_2,t_2;Q_1,t_1)-\frac{i}{\hbar}\int K^0(Q_2,t_2;Q_c,t_c)[\hat{U}_c(Q)+\langle\hat{V}_c\rangle]\times\right.$$
$$\left.\times K^0(Q_c,t_c;Q_1,t_1)\mathrm{d}\,Q_c\,\mathrm{d}\,t_c+\cdots\right\},$$

其中 $\hat{V}_c=\hat{V}(Q_c,p_c,q)$。因为势场很弱，上面的展开式只取一级近似，即得相对运动传播子展开的第一近似式：

$$K(Q_2,t_2;Q_1,t_1)=K^0(Q_2,t_2;\ Q_1,t_1)-\frac{i}{\hbar}\int K^0(Q_2,t_2;Q_c,t_c)[\hat{U}_c(Q)+\langle\hat{V}_c\rangle]\times$$
$$\times K^0(Q_c,t_c;Q_1,t_1)\mathrm{d}\,Q_c\mathrm{d}\,t_c. \tag{26}$$

如果已知入射重离子的动量为 $\boldsymbol{P}_1$，动能为 E_1，则重离子入射波在无穷远处为：

$$\psi(Q_1,t_1)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\right)\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{Q}_1\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\right)E_1t_1. \tag{27}$$

于是由传播子(26)式和入射波(27)式，可写出出射重离子的波为：

$$\psi(Q_2,t_2)=\int K(Q_2,t_2;Q_1,t_1)\psi(Q_1,t_1)\mathrm{d}\,Q_1$$
$$=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\right)\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{Q}_2\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\right)E_1t_2$$
$$+\left(\frac{i}{\hbar}\right)\int_0^{t_2}\int^{Q_c}K^0(Q_2,t_2;Q_c,t_c)[\hat{U}_c(Q)+\langle\hat{V}_c\rangle]K^0(Q_c,t_c;Q_1,t_1)$$
$$\times\exp\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{Q}_1\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\right)E_1t_1\,\mathrm{d}\,Q_c\mathrm{d}\,t_c\mathrm{d}\,Q_1$$
$$=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\right)\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{Q}_2\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\right)E_1t_2-\frac{i}{\hbar}\int_0^{t_2}\int^{Q_c}K^0(Q_2,t_2;Q_c,t_c)$$
$$\times[\hat{U}_c(Q)+\langle\hat{V}_c\rangle]\exp\left(\frac{i}{\hbar}\right)\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{Q}_c\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\right)E_1t_c\mathrm{d}\,Q_c\mathrm{d}t_c. \tag{28}$$

上式的第一项是自由重离子通过势场没有被散射的波函数。第二项是散射波函数。(28)式是出射重离子波的玻恩展开的第一近似。将自由传播子 K^0 代入上式，对 t_c 积分，直接用文献[6]的公式得：

$$\psi(Q_2,t_2)=\exp\frac{i}{\hbar}E_2t_2\left\{\exp\left(\frac{i}{\hbar}\right)\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{Q}_2+\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int^{Q_c}\frac{1}{Q_{2c}}\exp\frac{i}{\hbar}PQ_{2c}\right.$$
$$\left.\times[\hat{U}_c(Q_c)+\langle\hat{V}_c\rangle]\exp\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{Q}_c\mathrm{d}\,Q_c.\right. \tag{29}$$

这里，Q_{2c} 是出射重离子到达的终点 2 至作用势的 c 点的距离。P是出射重离子的动量。如果重离子的作用势在远小于 Q_1、Q_2 的范围内才不为零，即有近似关系 $PQ_{2c}\simeq\boldsymbol{P}_2\cdot(\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{Q}_c)=P_2Q_2-\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{Q}_c$，于是(29)式可重写为：

$$\psi(Q_2,t_2)=\exp\frac{i}{\hbar}E_2t_2\exp\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{Q}_2+f\,\frac{\exp\frac{i}{\hbar}P_2Q_2}{Q_2}.$$

其中 f 是所求的碰撞振幅，将(4)式耦合在内禀态中的平均值$\langle\hat{V}_c\rangle$代入后得：

$$f=\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int^{Q_c}\exp\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{Q}_c\left\{\hat{U}_c(Q_c)+\sum_i\rho_{ii}\left(\hat{V}_{cii}-\sum_f 2\hat{V}_{cif}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\int_t^0\hat{V}_{fit-s}\sin\omega_{fi}s\,\frac{\mathrm{d}s}{\hbar}\right\}\mathrm{d}Q_c.\right. \tag{30}$$

五、结　　束　　语

本文从 FPIM 出发自然地建立起了内禀系统与相对运动系统间的响应关系。在此基础

上我们得到的相对运动系统的薛定谔方程、输运方程、运动方程及其碰撞振幅，都自然地将重离子在碰撞过程中因内禀激发而导致相对运动能量耗散的这一物理事实包含在其中了。由此表明 FPIM 是描述具有相对运动能量耗散的重离子碰撞的有用工具。

FPIM 是量子力学的一种表述形式，因此本文的描述本质上是量子力学的。由于计算路径积分很麻烦，或者有的根本不能计算。对此必须采用稳相近似，只计及贡献最大的路径。在本文中我们采用了另一种更为简便地避免计算路径积分的方法。在推导耦合平均值和碰撞振幅时，我们用在势场作用处将路径分成两段自由路径处理的办法，将路径积分换成对路径经历的势场作用范围的积分。这样导出的结果不再包含路径积分，其形式简单、每一项具有明确的物理意义，更接近数值计算形式。此外在推导输运方程和运动方程时，我们取了薛定谔方程的解 $\psi=e^{R+i\varphi}$，这不但使问题的处理得以简化，使我们能同时从一点出发得到输运方程和运动方程，比较方便地建立起了重离子碰撞的描述系统。而且特别当我们取 $S=\hbar\varphi$ 为作用泛函后，就把问题经典化了。因而不必采用经典泊松括号与量子泊松括号的对应关系来得到经典形式的运动方程和输运方程[9]。这种对应关系没有严格证明，因而引入这种关系有损于理论的严格性。最后由 FPIM 的固有性质，为本文的描述带来了一些优点。因为用 FPIM 计算跃迁振幅时，不强烈依赖力的可分性，因而本文的处理也是不依赖力的可分性的。因为 FPIM 易将振动激发自由度包括在讨论的问题之中[11]，因而为进一步研究振动激发在重离子碰撞中的效应提供了一种可能的途径。

本文结果中的各个系数均与摩擦系数在形式上相近[7]，类似于文献[7]形式的摩擦系数已有作者作过数值计算[12]。因而本文各个结果的系数同样也可以计算，于是本文的各个方程和公式在数值计算上也是可能的。

王力红同志核对了本文的数学推导，赵玄同志对本工作给予了热情支持和讨论，在此一并感谢。

参 考 文 献

[1] P. Pechukas, *Phys. Rev.*, **181**, 174(1969).
[2] J. I. Fujita et al., *Prog. Theor. Phys.*, **55**, 734(1976).
[3] N. Takigawa, *Nucl. Phys.*, **A315**, 186(1979).
[4] Herbert Massmunn et al., *Nucl. Phys.*, **A243**, 155(1975).
[5] D. M. Brink et al., *Phys. Lett.*, **80B**, 170(1979).
[6] R. P. Feynman et al., Guantum Mechanics and Path Integrals. McGraw Hill, 1965, Ch. 4, 6; R. P. Feynman et al., *Ann. Phys.*, **24**, 118(1963).
[7] 贺泽君，自然，**3**，794(1980).
[8] Д. И. 布洛欣采夫著，叶蕴理、金星南译，量子力学原理，人民教育出版社，1961 年，132—136 页。
[9] H. Hofmann et al., *Nucl. Phys.*, **A257**, 165(1976); **A275**, 464(1977).
[10] W. Nörenberg, *Phys. Lett.*, **52B**, 289(1974).
[11] P. Pechukas et al., *J. Chem. Phys.*, **56**, 4970(1972).
[12] 冯仁发等，高能物理与核物理，**5**，346(1981)；S. C. Phatak et al., *Z. Physik*. **A290**, 185(1979).

（编辑部收到日期：1980 年 9 月 6 日）