

# 第六章 基本的数字调制系统

## 6.1 概述

- 正弦形载波：

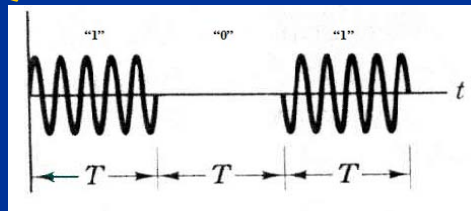
$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad \text{或} \quad s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

式中， $A$  — 振幅 (V)； $f_0$  — 频率 (Hz)；

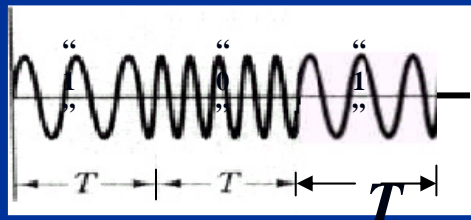
$\omega_0 = 2\pi f_0$  — 角频率 (rad/s)； $\theta$  为初始相位 (rad)。

- 3种基本的调制制度：

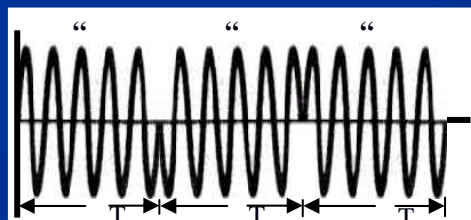
➢ 振幅键控ASK



➢ 频移键控FSK

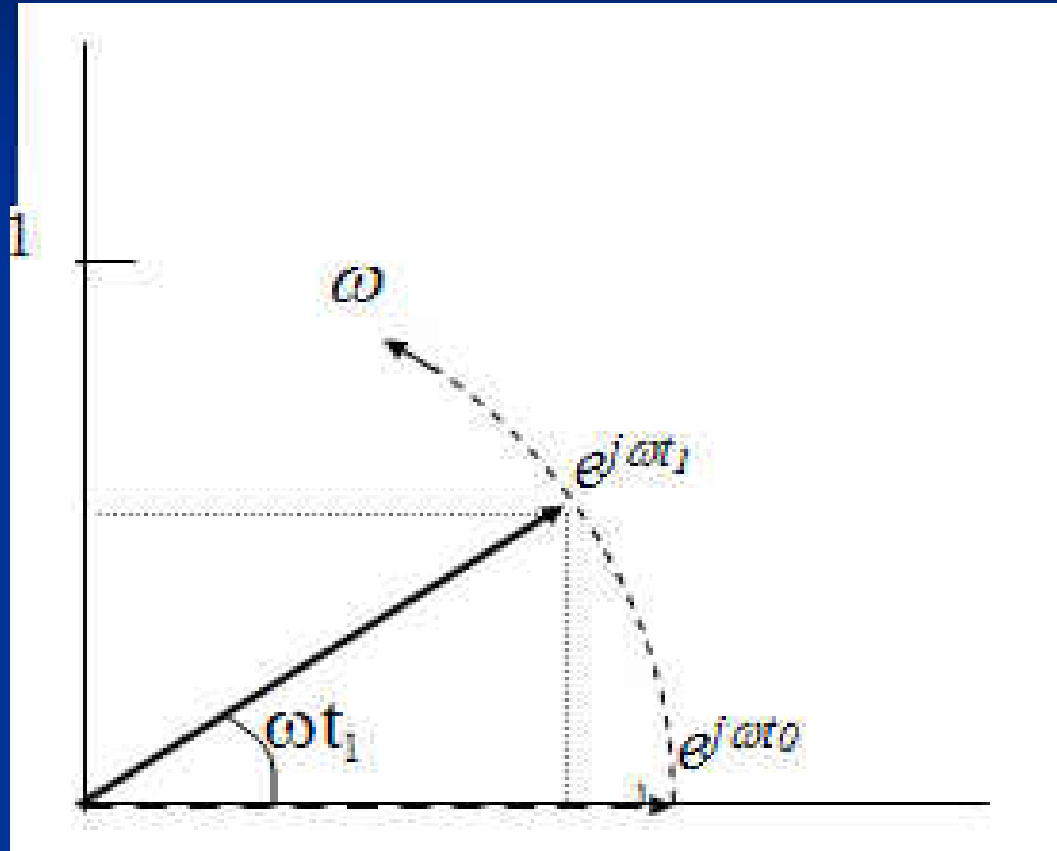


➢ 相移键控PSK



- 向量表示法和向量图

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$



## 6.2 二进制振幅键控(2ASK)

### 6.2.1 基本原理

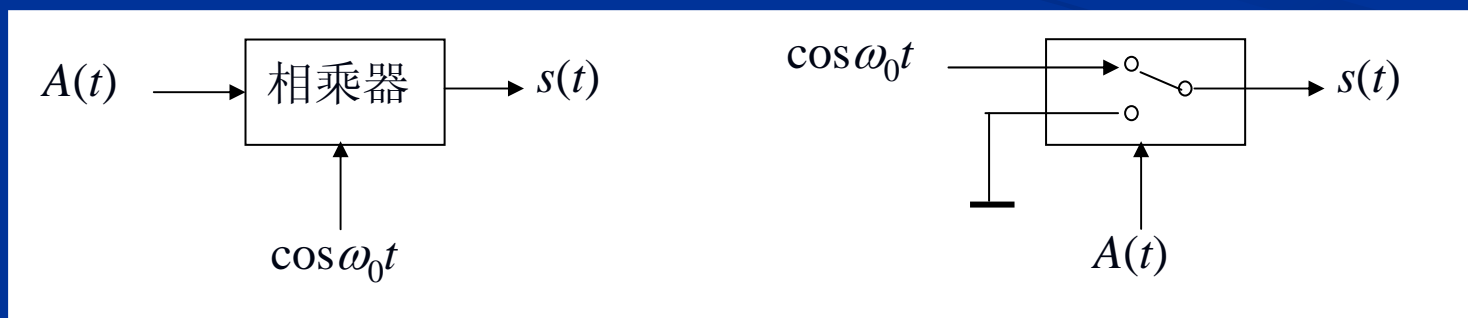
➤ 表示式:  $s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \theta) \quad 0 < t \leq T$

式中,  $\omega_0 = 2\pi f_0$  为载波的角频率;

$$A(t) = \begin{cases} A & \text{当发送 "1" 时} \\ 0 & \text{当发送 "0" 时} \end{cases}$$

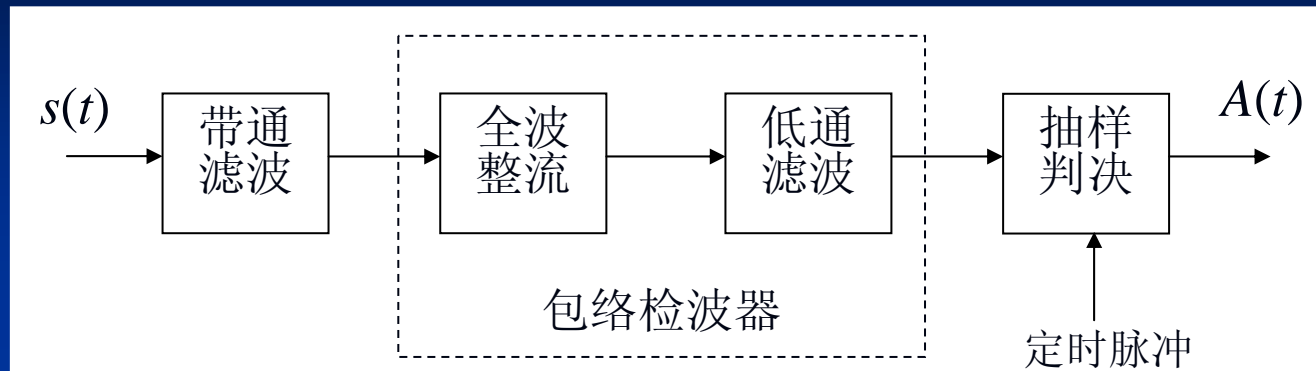
➤ 调制方法:

- 相乘电路: 包络可以是非矩形的
- 开关电路: 包络是矩形的

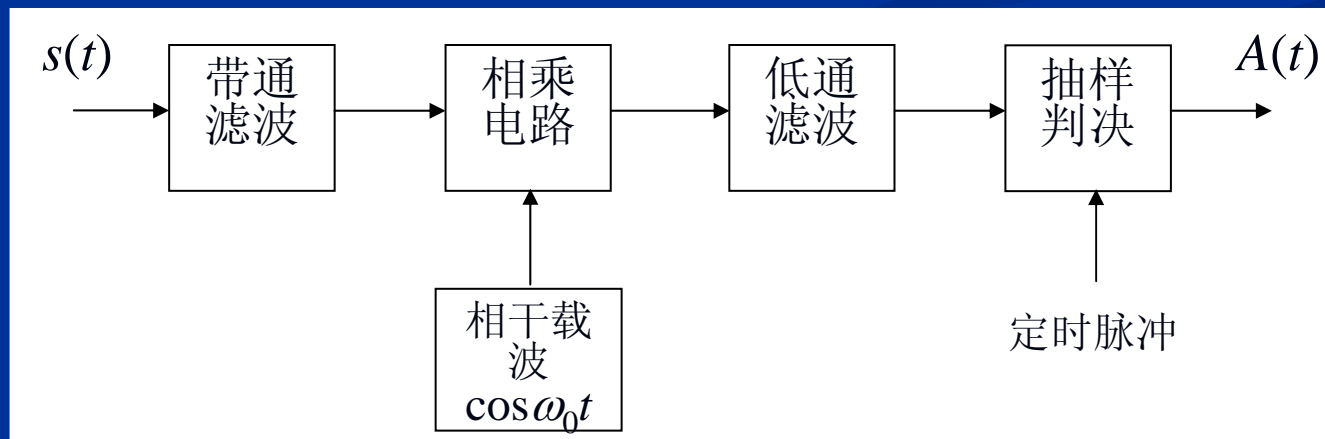


➤ 解调方法:

■ 包络检波法（非相干解调） — 不利用载波相位信息：



■ 相干解调法 — 利用载波相位信息：



## 6.2.2 功率谱密度

设2ASK随机信号序列的一般表示式为：

$$s(t) = A(t) \cos \omega_0 t = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \right] \cos \omega_0 t$$

式中， $a_n$  — 二进制单极性随机振幅；

$g(t)$  — 码元波形；

$T$  — 码元持续时间。

则可以计算出：

$$P_s(f) = \frac{1}{4} [P_A(f + f_0) + P_A(f - f_0)]$$

式中， $P_s(f)$  —  $s(t)$ 的功率谱密度；

$P_A(f)$  —  $A(t)$ 的功率谱密度。

∴若求出了 $P_A(f)$ ，代入上式就可以求出 $P_s(f)$ 。

➤ 求 $P_A(f)$ : 由式(5.5-29):

$$P_A(f) = f_c P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_c [PG_1(mf_c) + (1-P)G_2(mf_c)]|^2 \delta(f - mf_c)$$

式中,  $f_c = 1/T$

$G_1(f)$  — 基带信号码元  $g_1(t)$  的频谱

$G_2(f)$  — 基带信号码元  $g_2(t)$  的频谱

∴ 现在,  $g_1(t) = 0$ , ∴ 上式变成:

$$P_A(f) = f_c P(1-P) |G(f)|^2 + f_c^2 (1-P)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G(nf_c)|^2 \delta(f - nf_c)$$

式中,  $G(f) = G_2(f)$

现在基带信号是矩形脉冲, 故由图2.2.2和式(2.2-9)可知, 对于所有  $n \neq 0$  的整数,  $G(nf_c) = 0$ 。所以上式变成

$$P_A(f) = f_c P(1-P) |G(f)|^2 + f_c^2 (1-P)^2 |G(0)|^2 \delta(f)$$

➤ 将 $P_A(f)$ 代入 $P_s(f)$ 式中, 得到

$$P_s(f) = \frac{1}{4} f_c P(1-P) [|G(f+f_0)|^2 + |G(f-f_0)|^2] + \frac{1}{4} f_c^2 (1-P)^2 |G(0)|^2 [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

➤ 求 $P_s(f)$ : 由上式

$$P_s(f) = \frac{1}{4} f_c P(1-P) \left[ |G(f+f_0)|^2 + |G(f-f_0)|^2 \right] + \frac{1}{4} f_c^2 (1-P)^2 |G(0)|^2 [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

当 $P = 1/2$ 时, 上式变为

$$P_s(f) = \frac{1}{16} f_c \left[ |G(f+f_0)|^2 + |G(f-f_0)|^2 \right] + \frac{1}{16} f_c^2 |G(0)|^2 [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

式中,

$$G(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$

所以, 有

$$|G(0)| = T$$

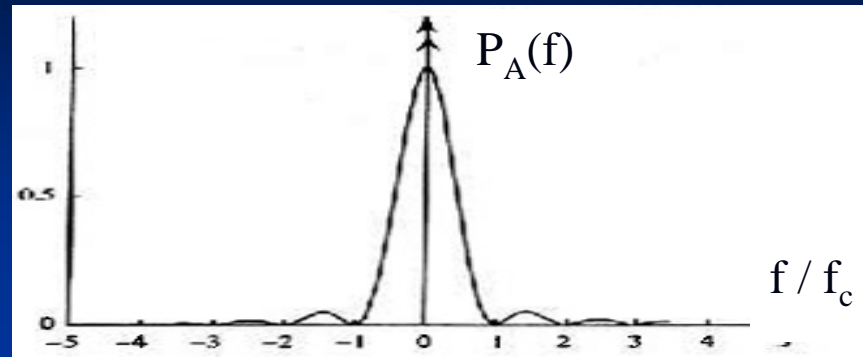
$$|G(f+f_0)| = T \left| \frac{\sin \pi(f+f_0)T}{\pi(f+f_0)T} \right|$$

$$|G(f-f_0)| = T \left| \frac{\sin \pi(f-f_0)T}{\pi(f-f_0)T} \right|$$

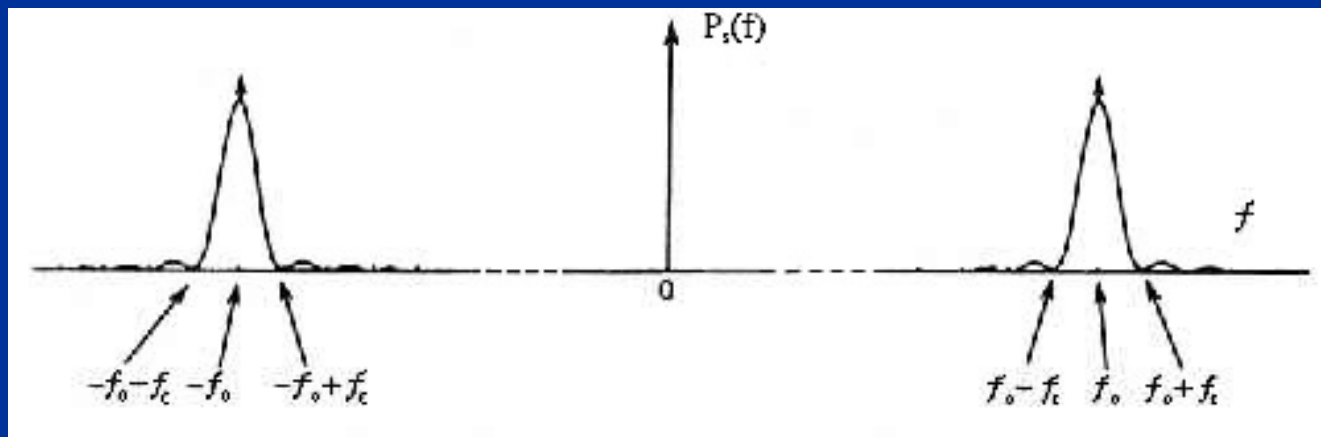
最终得出:

$$P_s(f) = \frac{T}{16} \left[ \left| \frac{\sin \pi(f+f_0)T}{\pi(f+f_0)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f-f_0)T}{\pi(f-f_0)T} \right|^2 \right] + \frac{1}{16} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

## ➤ $P_A(f)$ 和 $P_S(f)$ 的曲线



(a) 功率谱密度 $P_A(f)$ 的曲线



(b) 功率谱密度 $P_S(f)$ 的曲线



### 6.2.3 误码率

设在 $T$ 内，带通滤波后的接收信号和噪声电压等于：

$$y(t) = s(t) + n(t) \quad 0 < t \leq T$$

式中，

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t & \text{当发送“1”时,} \\ 0 & \text{当发送“0”时。} \end{cases}$$

$\because n(t)$ 是一个窄带高斯过程，故有

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t$$

将上两式代入 $y(t)$ 式，得到：

$$y(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t + n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t & \text{发送“1”时} \\ n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

或

$$y(t) = \begin{cases} [A + n_c(t)] \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t & \text{发送“1”时} \\ n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

上式为滤波后的接收电压，下面用它来计算误码率。

- 相干解调法的误码率：  
抽样判决处的电压 $x(t)$  为

$$x(t) = \begin{cases} A + n_c(t) & \text{当发送“1”时} \\ n_c(t) & \text{当发送“0”时} \end{cases}$$

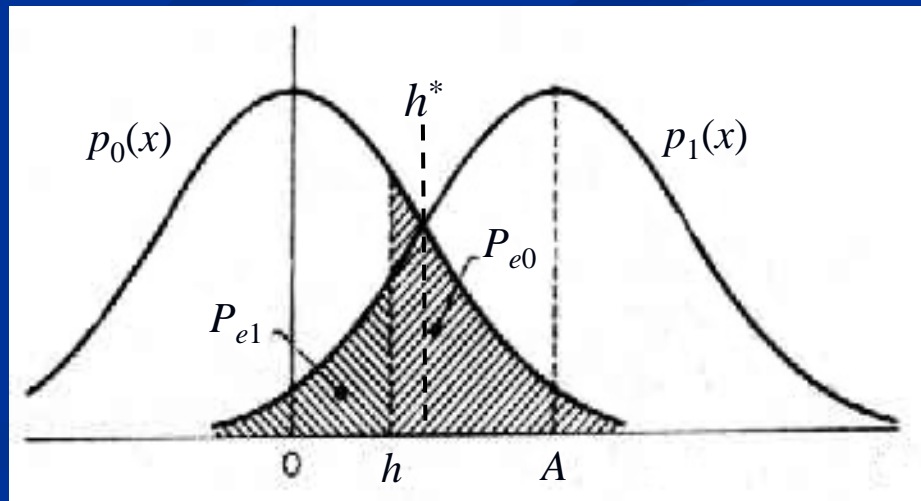
式中， $n_c(t)$  — 高斯过程。

∴当发送“1”时， $x(t)$ 的概率密度等于：

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-(x - A)^2 / 2\sigma_n^2\right]$$

当发送“0”时， $x(t)$ 的概率密度等于：

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-x^2 / 2\sigma_n^2\right)$$

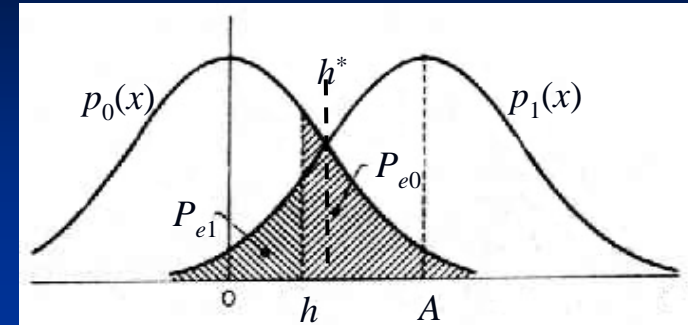


- 令  $h$  为判决门限，则将发送的“1”错判为“0”的概率等于：

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^h p_1(x) dx = 1 - \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{h - A}{\sqrt{2\sigma_n^2}} \right) \right]$$

式中，

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$



将“0”错判为“1”的概率等于：

$$P_{e0} = \int_h^{\infty} p_0(x) dx = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{h}{\sqrt{2\sigma_n^2}} \right) \right]$$

当  $P(1) = P(0)$  时，相干解调的总误码率为：

$$P_e = \frac{1}{2} P_{e1} + \frac{1}{2} P_{e0} = \frac{1}{4} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{h - a}{\sqrt{2\sigma_n^2}} \right) \right] + \frac{1}{4} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{h}{\sqrt{2\sigma_n^2}} \right) \right]$$

当  $h$  值等于最佳门限值  $h^*$  时，  $p_1(x^*) = p_0(x^*)$   $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r}/2)$

当信噪比  $r \gg 1$  时，  $P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r/4}$

- 包络检波法的误码率

∴ 输出是其输入电压 $y(t)$ 的包络，故有

$$V(t) = \begin{cases} \sqrt{[A + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} & \text{发送“1”时} \\ \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

假定判决门限值等于 $h$ ，并规定当 $V > h$ 时，判为收到“1”；当 $V \leq h$ 时，则判为“0”。可以计算出，当大信噪比时，误码率为：

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}$$

**【例6.1】** 设有一个2ASK信号传输系统，其中码元速率 $R_B = 4.8 \times 10^6$  Baud，接收信号的振幅 $A = 1$  mV，高斯噪声的单边功率谱密度 $n_0 = 2 \times 10^{-15}$  W/Hz。试求：1) 用包络检波法时的最佳误码率；2) 用相干解调法时的最佳误码率。

**解：** 基带矩形脉冲的带宽为 $1/T$  Hz。2ASK信号的带宽应该是它的两倍，即 $2/T$  Hz。故接收端带通滤波器的最佳带宽应为：  
 $B \approx 2/T = 2R_B = 9.6 \times 10^6$  Hz

故带通滤波器输出噪声平均功率等于： $\sigma_n^2 = n_0 B = 1.92 \times 10^{-8}$  W

因此其输出信噪比等于：

$$r = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} = \frac{10^{-6}}{2 \times 1.92 \times 10^{-8}} \approx 26 \gg 1$$

$\therefore$  (1) 包络检波法时的误码率为：

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{4}} = \frac{1}{2} e^{-6.5} = 7.5 \times 10^{-4}$$

(2) 相干解调法时的误码率为：

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{r}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3.1416 \times 26}} e^{-6.5} = 1.66 \times 10^{-4}$$

## 6.3 二进制频移键控(2FSK)

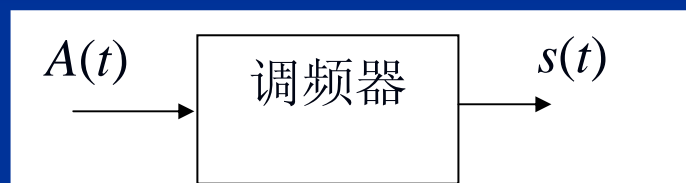
### 6.3.1 基本原理

➤ 表示式:

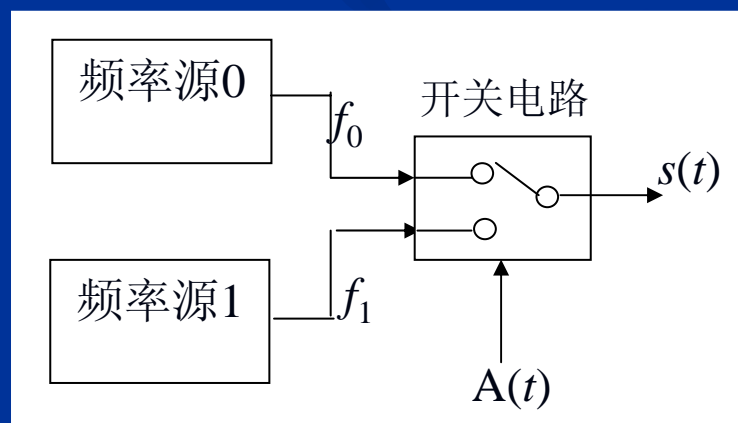
$$s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) & \text{当发送“1”时} \\ A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) & \text{当发送“0”时} \end{cases}$$

➤ 产生方法:

■ 调频法:  
相位连续

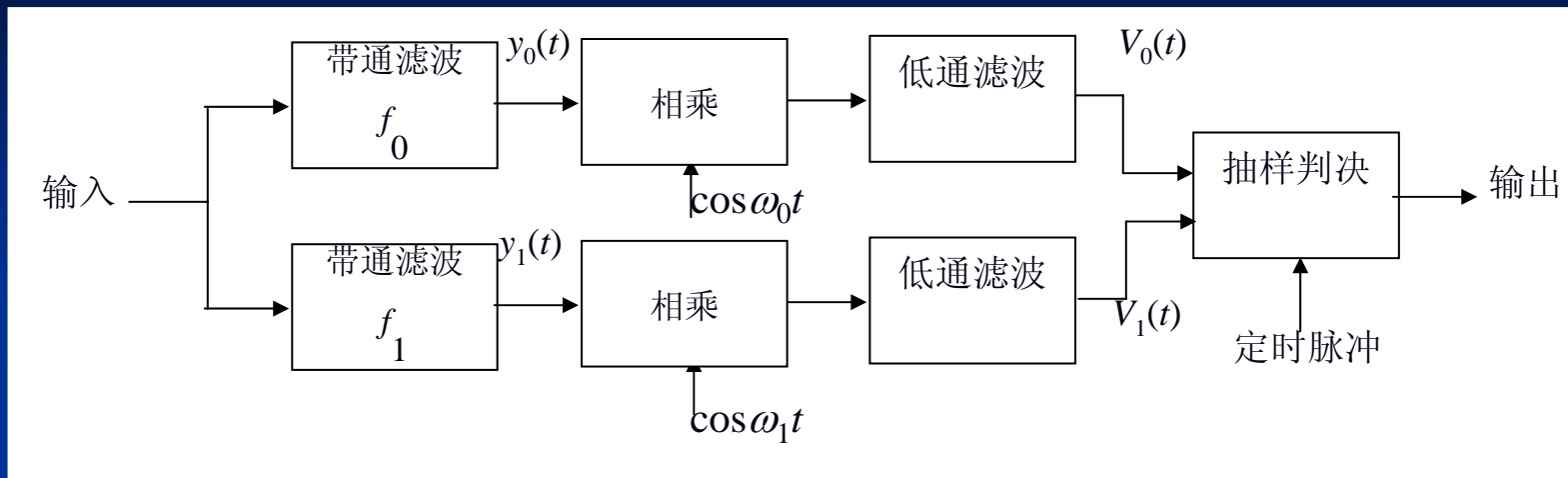


■ 开关法:  
相位不连续



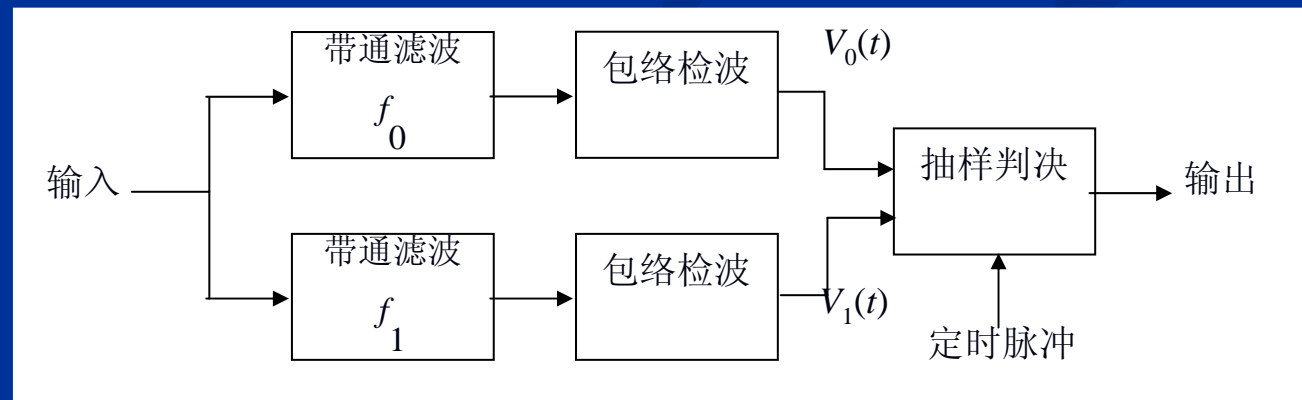
➤ 接收方法:

■ 相干接收:

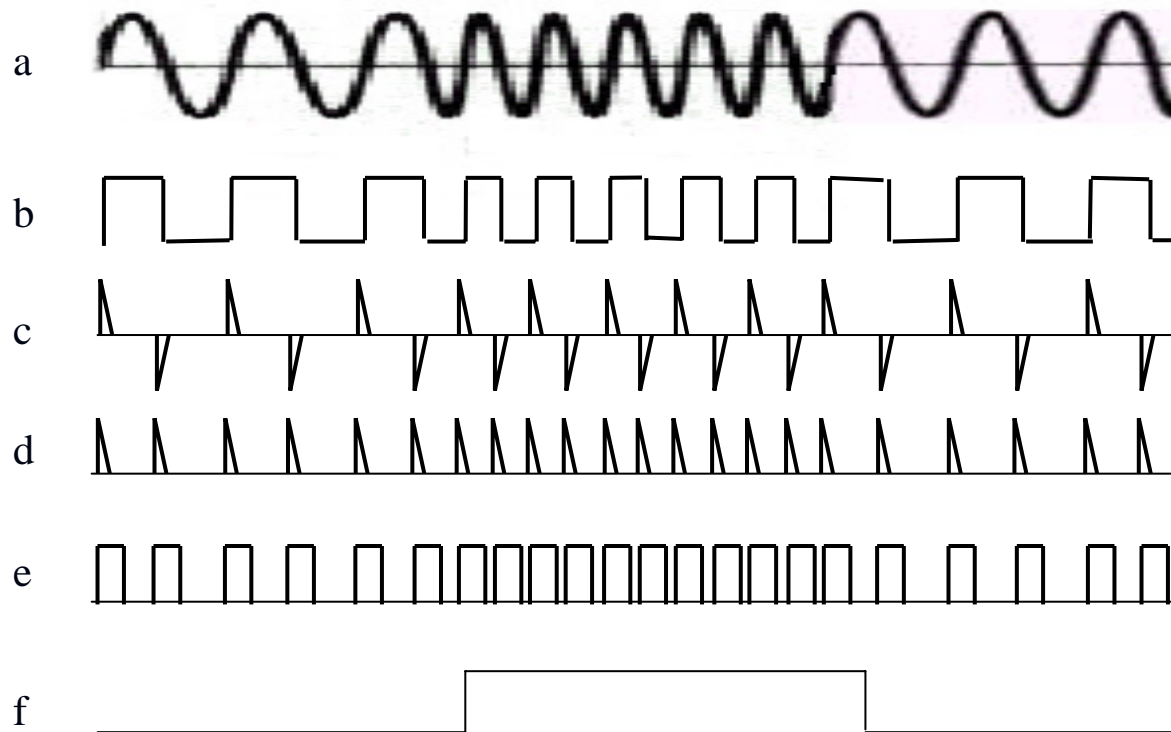
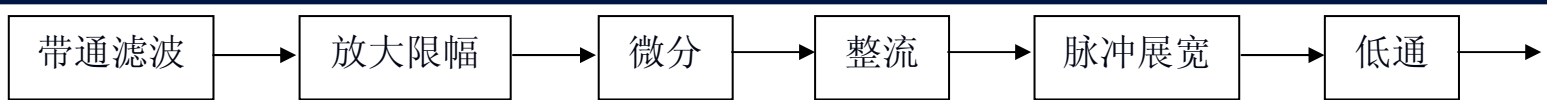


■ 非相干接收:

□ 包络检波法:



## 过零点检测法





### 6.3.2 功率谱密度

开关法产生的2FSK信号可以看作是两个不同频率2ASK信号的叠加:

$$s(t) = A_1(t) \cos \omega_1 t + A_0(t) \cos \omega_0 t$$

式中,

$$A_1(t) = \sum_n a_n$$

$$A_0(t) = \sum_n \overline{a_n}$$

$$\overline{a_n} = a_n \oplus 1$$

∴ 2ASK信号的功率谱密度可以表示为:

$$P_s(f) = \frac{1}{4} [P_A(f + f_0) + P_A(f - f_0)]$$

∴ 2FSK信号的功率谱密度是两个不同频率2ASK信号的功率谱密度之和:

$$P_s(f) = \frac{1}{4} [P_{A1}(f + f_1) + P_{A1}(f - f_1)] + \frac{1}{4} [P_{A0}(f + f_0) + P_{A0}(f - f_0)]$$

∴ 已知2ASK信号功率谱密度为:

$$P_A(f) = f_c P(1 - P) |G(f)|^2 + f_c^2 (1 - P)^2 |G(0)|^2 \delta(f)$$

将其代入上式, 得到2FSK信号的功率谱密度为:

$$P_s(f) = \frac{1}{4} f_c P(1-P) \left[ |G(f+f_1)|^2 + |G(f-f_1)|^2 \right] + \frac{1}{4} f_c P(1-P) \left[ |G(f+f_0)|^2 + |G(f-f_0)|^2 \right] + \frac{1}{4} f_c^2 (1-P)^2 |G(0)|^2 [\delta(f+f_1) + \delta(f-f_1)] + \frac{1}{4} f_c^2 P^2 |G(0)|^2 [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

当发送“1”和发送“0”的概率相等时，概率  $P = 1/2$ ，上式可以化简为：

$$P_s(f) = \frac{1}{16} f_c \left[ |G(f+f_1)|^2 + |G(f-f_1)|^2 + |G(f+f_0)|^2 + |G(f-f_0)|^2 \right] + \frac{1}{16} f_c^2 |G(0)|^2 [\delta(f+f_1) + \delta(f-f_1) + \delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

式中， $G(f)$ 为基带脉冲的频谱：

$$G(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \quad \text{及} \quad G(0) = T$$

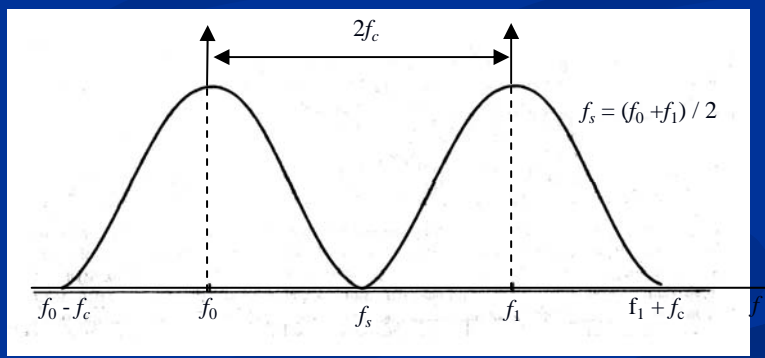
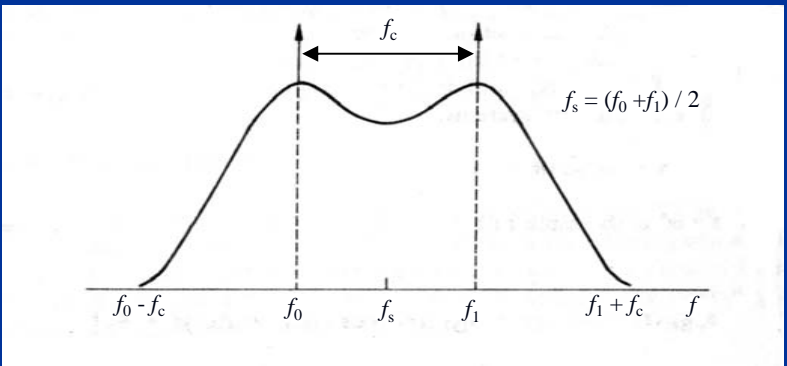
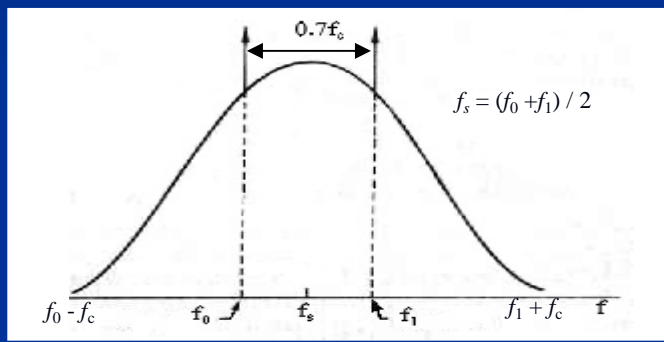
将 $G(f)$ 代入上式，得到2FSK信号功率谱密度最终表示式为：

$$P_s(f) = \frac{1}{16} \left[ \left| \frac{\sin \pi(f+f_1)T}{\pi(f+f_1)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f-f_1)T}{\pi(f-f_1)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f+f_0)T}{\pi(f+f_0)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f-f_0)T}{\pi(f-f_0)T} \right|^2 \right] + \frac{1}{16} [\delta(f+f_1) + \delta(f-f_1) + \delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

$$P_s(f) = \frac{1}{16} \left[ \left| \frac{\sin \pi(f + f_1)T}{\pi(f + f_1)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f - f_1)T}{\pi(f - f_1)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f + f_0)T}{\pi(f + f_0)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f - f_0)T}{\pi(f - f_0)T} \right|^2 \right] + \frac{1}{16} [\delta(f + f_1) + \delta(f - f_1) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

由上式可以看出，前4项是连续谱部分，后4项是离散谱。

➤ 曲线：



➤ 带宽： $\Delta f = |f_1 - f_0| + 2f_c$

### 6.3.3 最小频率间隔

在原理上，若两个信号互相正交，就可以把它完全分离。

➤ 对于非相干接收：设：2FSK信号为

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) & \text{当发送“1”时} \\ A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) & \text{当发送“0”时} \end{cases}$$

为了满足正交条件，要求：

$$\int_0^T [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] dt = 0$$

即要求：

$$\frac{1}{2} \int_0^T \{ \cos[(\omega_1 + \omega_0)t + \varphi_1 + \varphi_0] + \cos[(\omega_1 - \omega_0)t + \varphi_1 - \varphi_0] \} dt = 0$$

上式积分结果为：

$$\frac{\sin[(\omega_1 + \omega_0)T + \varphi_1 + \varphi_0]}{\omega_1 + \omega_0} + \frac{\sin[(\omega_1 - \omega_0)T + \varphi_1 - \varphi_0]}{\omega_1 - \omega_0} - \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{(\omega_1 + \omega_0)} - \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{(\omega_1 - \omega_0)} = 0$$

假设，上式左端第1和3项近似等于零，则它可以化简为

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_0) \sin(\omega_1 - \omega_0)T + \sin(\varphi_1 - \varphi_0) [\cos(\omega_1 - \omega_0)T - 1] = 0$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_0) \sin(\omega_1 - \omega_0)T + \sin(\varphi_1 - \varphi_0) [\cos(\omega_1 - \omega_0)T - 1] = 0$$

由于 $\varphi_1$ 和 $\varphi_0$ 是任意常数，故必须同时有

$$\sin(\omega_1 - \omega_0)T = 0 \quad \text{和} \quad \cos(\omega_1 - \omega_0)T = 1$$

上式才等于0。即要求：

$$(\omega_1 - \omega_0)T = n\pi \quad \text{和} \quad (\omega_1 - \omega_0)T = 2m\pi$$

式中， $n$ 和 $m$ 均为整数。

为了同时满足这两个要求，应当令

$$(\omega_1 - \omega_0)T = 2m\pi \quad \text{即令} \quad f_1 - f_0 = m/T$$

所以，当取 $m = 1$ 时是最小频率间隔，它等于 $1/T$ 。

➤ 对于相干接收：可以令  $\varphi_1 - \varphi_0 = 0$

于是，式  $\cos(\varphi_1 - \varphi_0) \sin(\omega_1 - \omega_0)T + \sin(\varphi_1 - \varphi_0) [\cos(\omega_1 - \omega_0)T - 1] = 0$

化简为：  $\sin(\omega_1 - \omega_0)T = 0$

因此，要求满足：  $f_1 - f_0 = n/2T$

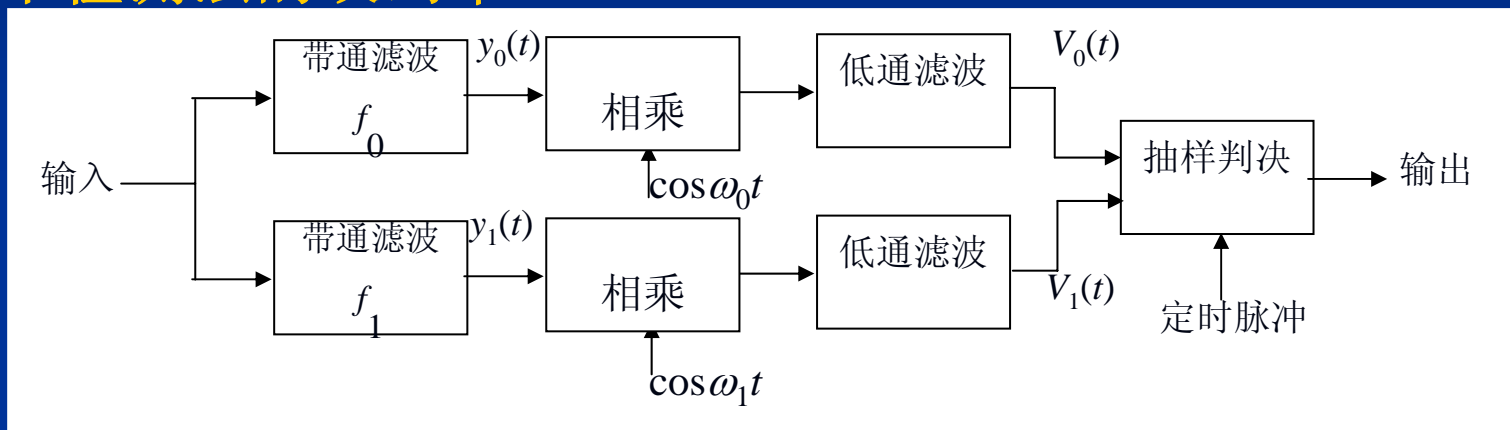
即，最小频率间隔等于 $1/2T$ 。

### 6.3.3 误码率

设：接收滤波器输出电压波形为：

$$y(t) = \begin{cases} A \cos \omega_1 t + n(t) & \text{当发送“1”时} \\ A \cos \omega_0 t + n(t) & \text{当发送“0”时} \end{cases}$$

- 相干检测法的误码率



当发送码元“1”时，通过两个带通滤波器后的两个接收电压

分别为：

$$y_1(t) = [A + n_{1c}(t)] \cos \omega_1 t - n_{1s}(t) \sin \omega_1 t$$

$$y_0(t) = n_{0c}(t) \cos \omega_0 t - n_{0s}(t) \sin \omega_0 t$$

它们和本地载波相乘，并经过低通滤波后，得出

$$V_1(t) = A + n_{1c}(t) \quad \text{和} \quad V_0(t) = n_{0c}(t)$$

$$V_1(t) = A + n_{1c}(t) \quad \text{和} \quad V_0(t) = n_{0c}(t)$$

$n_{1c}(t)$ 和 $n_{0c}(t)$ 都是高斯过程，故在抽样时刻其抽样值 $V_1$ 和 $V_0$ 都是正态随机变量。而且， $V_1$ 的均值为 $A$ ，方差为 $\sigma_n^2$ ； $V_0$ 的均值为 $0$ ，方差也为 $\sigma_n^2$ 。

当 $V_1 < V_0$ 时，将发生误码，故误码率为

$$P_{e1} = P(V_1 < V_0) = P[(A + n_{1c}) < n_{0c}] = P(A + n_{1c} - n_{0c} < 0)$$

令 $(A + n_{1c} - n_{0c}) = z$ ，则 $z$ 也是正态随机变量，其均值等于 $A$ ，方差为

$$\sigma_z^2 = \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{(n_{1c} - n_{0c})^2} = 2\sigma_n^2$$

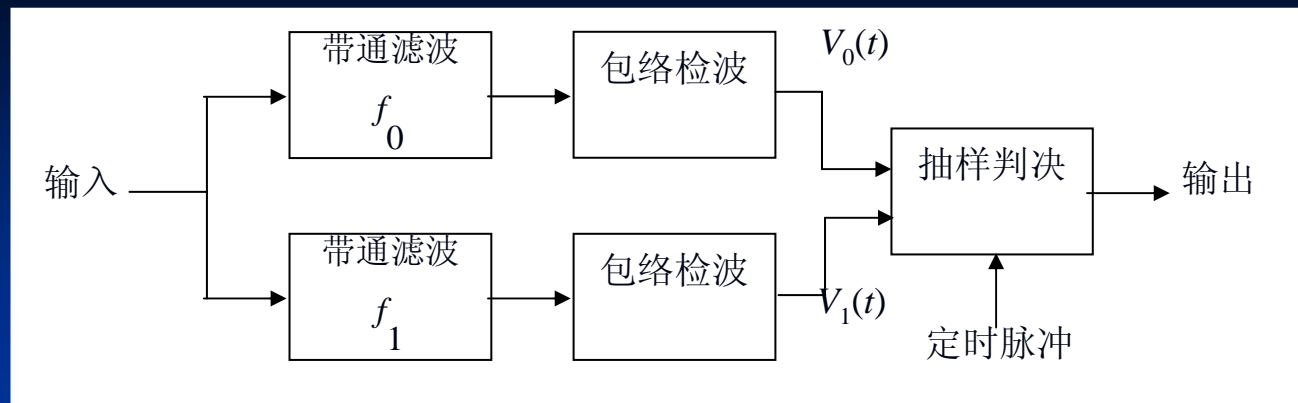
于是，有

$$P_{e1} = P(z < 0) = \int_{-\infty}^0 f(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{-\infty}^0 e^{-(z-A)^2/2\sigma_z^2} dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$$

式中， $r = A^2 / 2\sigma_n^2$

$\because P_{e0}$ 和 $P_{e1}$ 相等，故总误码率为： $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$

## ● 包络检波法的误码率



当发送码元“1”时，抽样判决器的两个输入电压分别为

$$V_1(t) = \sqrt{[A + n_{c1}(t)]^2 + n_{s1}^2(t)} \quad \text{和} \quad V_0(t) = \sqrt{n_{c0}^2(t) + n_{s0}^2(t)}$$

式中， $V_1(t)$  — 频率 $f_1$ 的码元通路信号包络（广义瑞利分布）

$V_0(t)$  — 频率 $f_0$ 的码元通路信号包络（瑞利分布）。

这时误码率为：

$$P_{e1} = P(V_1 < V_0) = \int_0^{\infty} f_1(V_1) \left[ \int_{V_0=V_1}^{\infty} f_0(V_0) dV_0 \right] dV_1 = \int_0^{\infty} \frac{V_1}{\sigma_n^2} I_0 \left( \frac{AV_1}{\sigma_n^2} \right) \exp \left[ \frac{-2V_1^2 - A^2}{2\sigma_n^2} \right] dV_1$$



$$P_{e1} = P(V_1 < V_0) = \int_0^\infty f_1(V_1) \left[ \int_{V_0=V_1}^\infty f_0(V_0) dV_0 \right] dV_1 = \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma_n^2} I_0 \left( \frac{AV_1}{\sigma_n^2} \right) \exp \left[ \frac{-2V_1^2 - A^2}{2\sigma_n^2} \right] dV_1$$

令

$$t = \frac{\sqrt{2}V_1}{\sigma_n}, \quad z = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}$$

代入上式，并简化后，得到：

$$P_{e1} = \frac{1}{2} e^{-z^2/2} \int_0^\infty t I_0(zt) e^{-(t^2+z^2)/2} dt$$

将

$$Q(z,0) = \int_0^\infty t I_0(zt) e^{-(t^2+z^2)/2} dt = 1$$

代入上式，得到：

$$P_{e1} = \frac{1}{2} e^{-z^2/2} = \frac{1}{2} e^{-r/2}$$

式中，

$$r = z^2 = A^2 / 2\sigma_n^2 \quad \text{— 信噪比}$$

当发送码元“0”时，情况一样，故2FSK的总误码率为：

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2}$$

- 相干检测法和包络检波法的误码率比较：
  - 在大信噪比条件下两者相差不很大。
  - 实际应用中，多采用包络检波法。
- 2FSK与2ASK信号的误码率比较：

- 包络检波

- 2ASK:

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}$$

- 2FSK:

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2}$$

} 差 3 dB

- 相干检测

- 2ASK:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r}/2)$$

- 2FSK:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$$

} 差 3 dB

- **【例6.2】** 设有一2FSK传输系统，其传输带宽等于2400 Hz。2FSK信号的频率分别等于 $f_0 = 980$  Hz， $f_1 = 1580$  Hz。码元速率 $R_B = 300$  Baud。接收端输入的信噪比等于6 dB。试求：
  1. 此2FSK信号的带宽；
  2. 用包络检波法时的误码率；
  3. 用相干检测法时的误码率。

**【解】**

1. 信号带宽： $\Delta f = |f_1 - f_0| + 2f_c = 1580 - 980 + 2 \times 300 = 1200$

2. 包络检波法的误码率：

带通滤波器的带宽应等于： $B = 2R_B = 600$  Hz

带通滤波器输入端和输出端的带宽比： $2400/600 = 4$

带通滤波器输出端的信噪功率比： $r = 4 \times 4 = 16$

$$\therefore P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2} = \frac{1}{2} e^{-8} = 1.7 \times 10^{-4}$$

### 3. 相干检测法的误码率

➤ 用查表法得出：

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{r}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{r}{2}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} (\sqrt{8}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} (2.8284) \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - 0.99993 \right] = 3.5 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

➤ 用近似式得出：

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-r/2} = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{-8} = 3.39 \times 10^{-5}$$

➤ 两者基本一样。

## 6.4 二进制相移键控(2PSK)

### 6.4.1 基本原理

➤ 表示式:  $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$

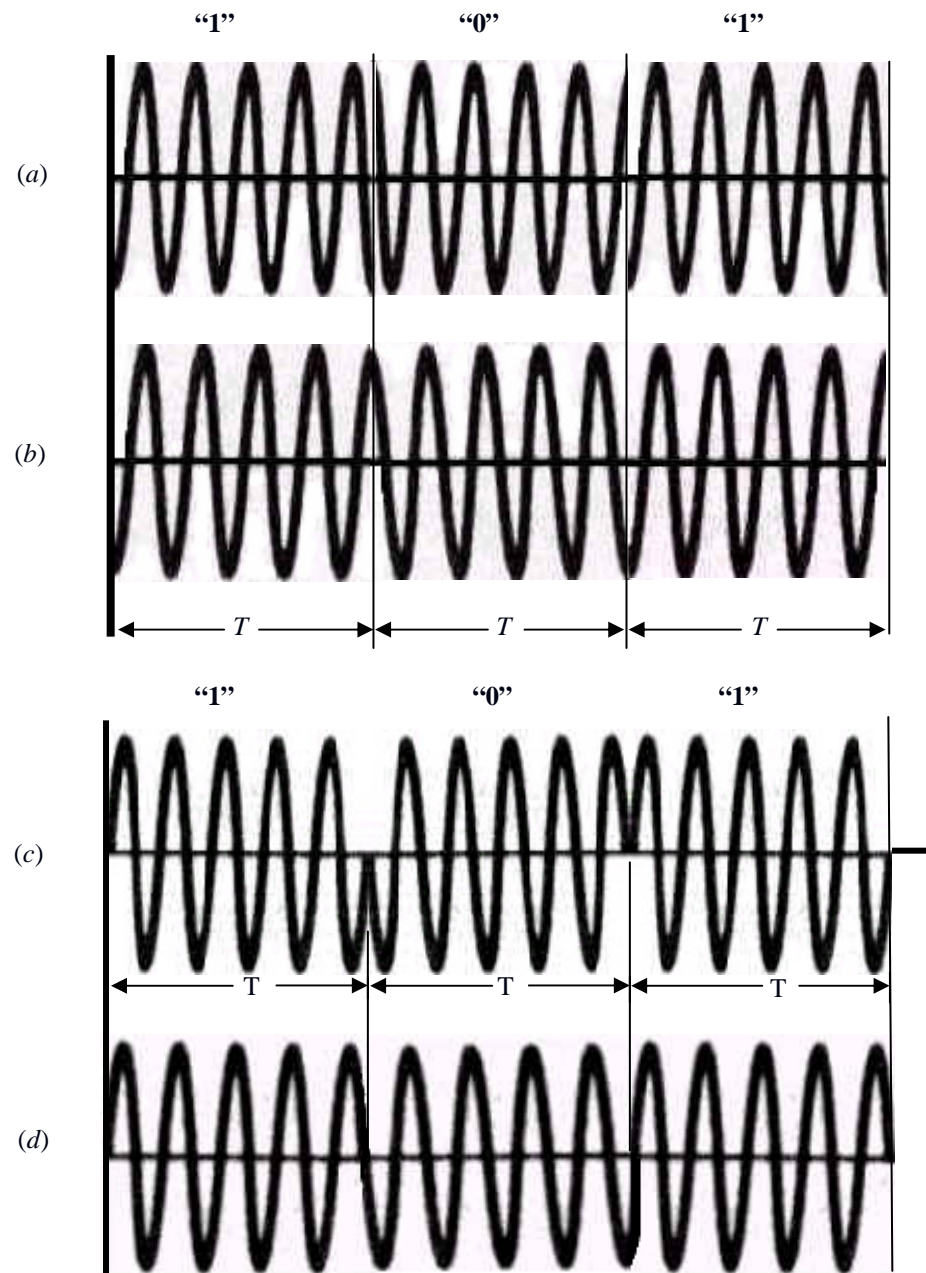
式中,  $\theta = \begin{cases} 0 & \text{当发送“0”时} \\ \pi & \text{当发送“1”时} \end{cases}$

或  $s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t) & \text{当发送“0”时} \\ A \cos(\omega_0 t + \pi) & \text{当发送“1”时} \end{cases}$   
 $s(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t & \text{当发送“0”时} \\ -A \cos \omega_0 t & \text{当发送“1”时} \end{cases}$

## ➤ 波形 — “1 0 1”

- 整数个周期：图a和c  
相位不连续
- 多半个周期：图b和d  
相位连续
- 上述例子说明，相邻码元的相位是否连续与相邻码元的初始相位是否相同不可混为一谈。

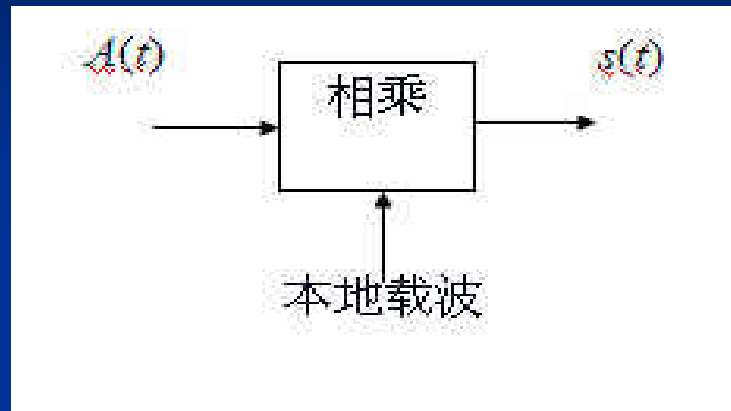
只有当一个码元中包含有整数个载波周期时，相邻码元边界处的相位跳变才是由调制引起的相位变化。



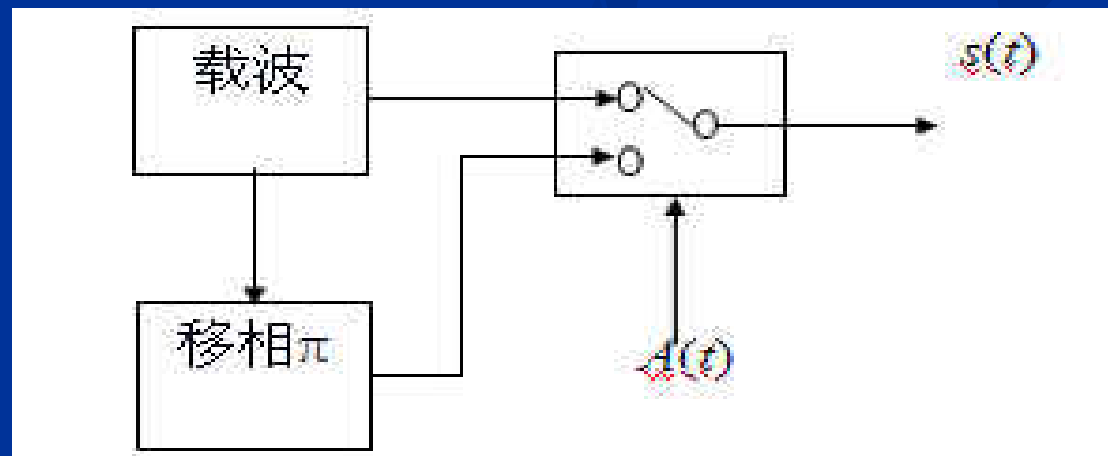
➤ 产生方法：

■ 相乘法：

用二进制基带不归零矩形脉冲信号 $A(t)$ 去和载波相乘。

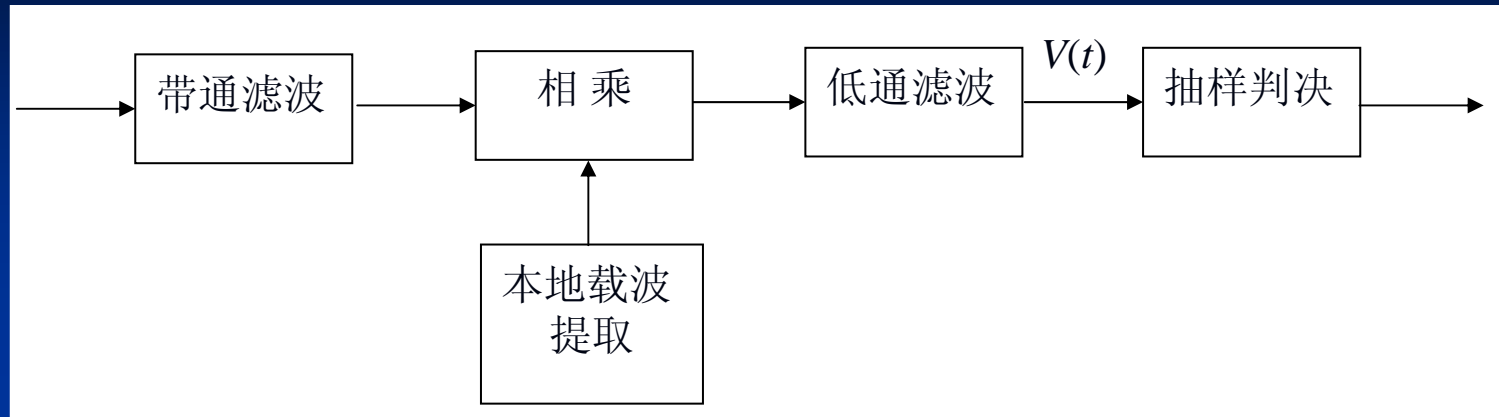


■ 选择法：用开关电路去选择相位相差 $\pi$ 的同频载波。



➤ 解调方法:

■ 必须采用相干接收法。



■ 难点: 第一, 难于确定本地载波的相位 — 因有分频器的相位不确定性、信道不稳定性。

第二, 信号波形长时间地为连续的正(余)弦波形时, 使在接收端无法辨认码元的起止时刻。

■ 解决办法:

采用差分相移键控(DPSK)体制。



## 6.4.2 功率谱密度

### 由2PSK信号码元的表示式

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t & \text{当发送“0”时} \\ -A \cos \omega_0 t & \text{当发送“1”时} \end{cases}$$

可知，它是一个特殊的2ASK信号，其振幅分别取 $A$ 和 $-A$ 。

∴信号码元随机序列仍可以用2ASK信号的表示式表示：

$$s(t) = A(t) \cos \omega_0 t = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \right] \cos \omega_0 t$$

式中，

$$a_n = \begin{cases} A & \text{概率为 } P \\ -A & \text{概率为 } (1-P) \end{cases}$$

为了简化公式书写，不失一般性，下面令 $A = 1$ 。

直接由2ASK信号功率谱密度计算公式：

$$P_s(f) = \frac{1}{4} [P_A(f + f_0) + P_A(f - f_0)]$$

式中，

$$P_A(f) = f_c P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_c [PG_1(mf_c) + (1-P)G_2(mf_c)]|^2 \delta(f - mf_c)$$

对于2PSK信号， $g(t) = -g(t)$ ， $G_1(f) = -G_2(f)$ ，因此上式变为

$$P_A(f) = 4f_c P(1-P) |G_1(f)|^2 + |f_c [PG_1(0) + (1-P)G_2(0)]|^2 \delta(f)$$

当“1”和“0”出现概率相等时， $P = 1/2$ ，上式变为

$$P_A(f) = f_c |G_1(f)|^2$$
，代入上面 $P_s(f)$ 式，得到

$$P_s(f) = \frac{1}{4} f_c [|G_1(f + f_0)|^2 + |G_1(f - f_0)|^2]$$

上式中没有离散频率分量。——不能直接从接收信号中用滤波方法提取载波频率。

∴ 矩形脉冲的频谱为

$$G(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$

代入上式: 
$$P_s(f) = \frac{1}{4} f_c \left[ |G_1(f + f_0)|^2 + |G_1(f - f_0)|^2 \right]$$

得到2PSK信号功率谱密度的最终表示式

$$P_s(f) = \frac{T}{4} \left[ \left| \frac{\sin \pi(f + f_0)T}{\pi(f + f_0)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f - f_0)T}{\pi(f - f_0)T} \right|^2 \right]$$

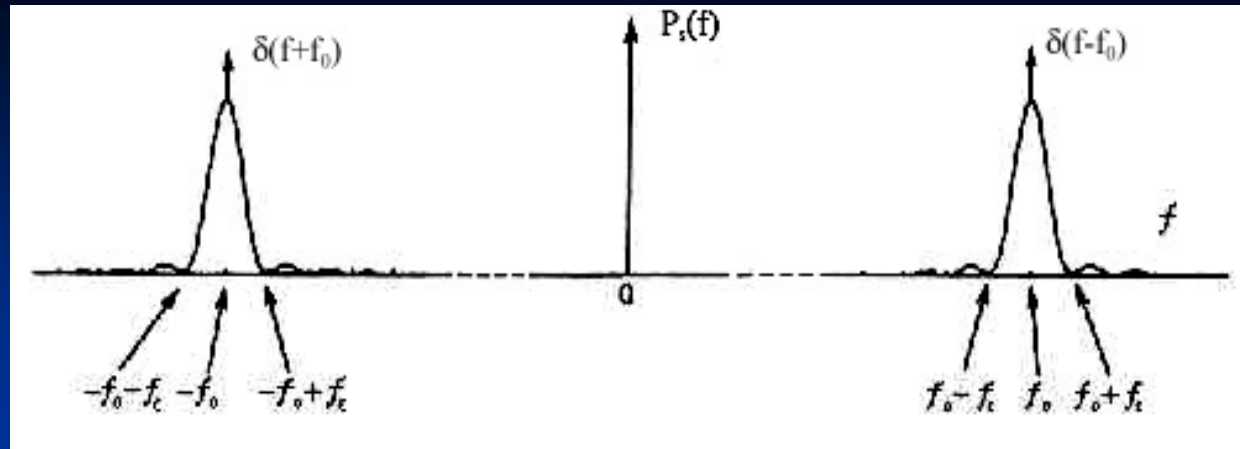
➤ 2PSK和2ASK信号功率谱密度比较

2ASK信号的功率谱密度:

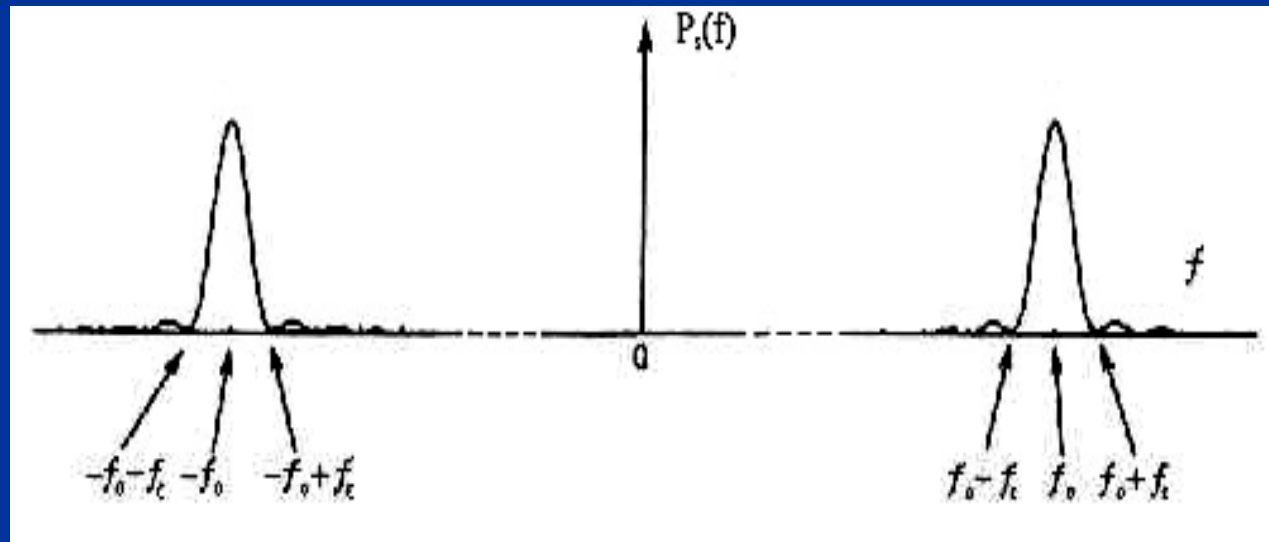
$$P_s(f) = \frac{T}{16} \left[ \left| \frac{\sin \pi(f + f_0)T}{\pi(f + f_0)T} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi(f - f_0)T}{\pi(f - f_0)T} \right|^2 \right] + \frac{1}{16} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

■ 两者带宽相同

■ 2PSK信号没有离散分量  $\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)$

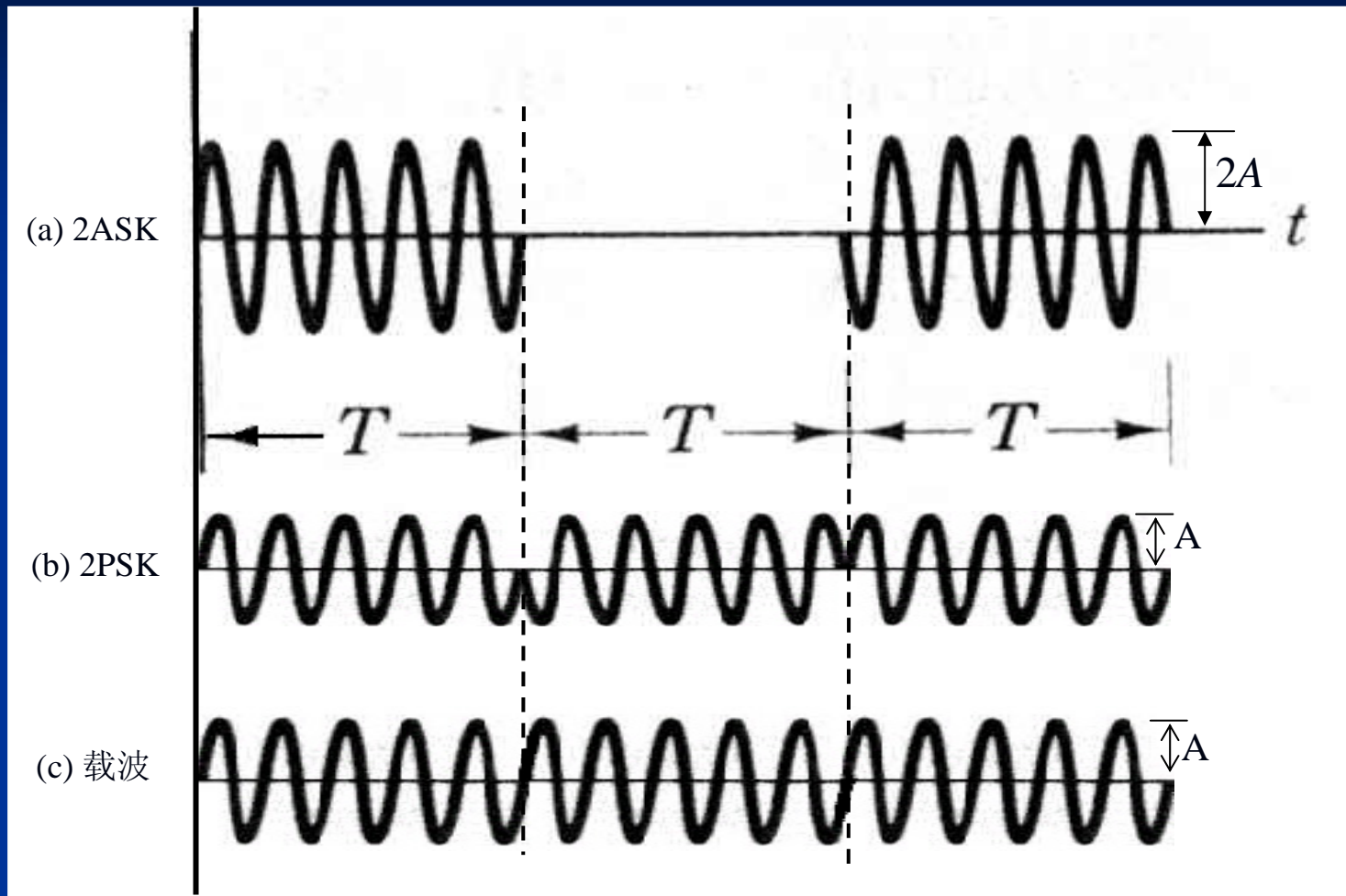


(a) 2ASK信号的功率谱密度



(b) 2PSK信号的功率谱密度

## ➤ 2PSK和2ASK信号波形关系



### 6.4.3 误码率

抽样判决电压为

$$V(t) = \begin{cases} A + n_c(t) & \text{当发送“0”时} \\ -A + n_c(t) & \text{当发送“1”时} \end{cases}$$

将“0”错判为“1”的概率等于

$$P_{e0} = P(V < 0 / \text{发送“0”时})$$

将“1”错判为“0”的概率等于

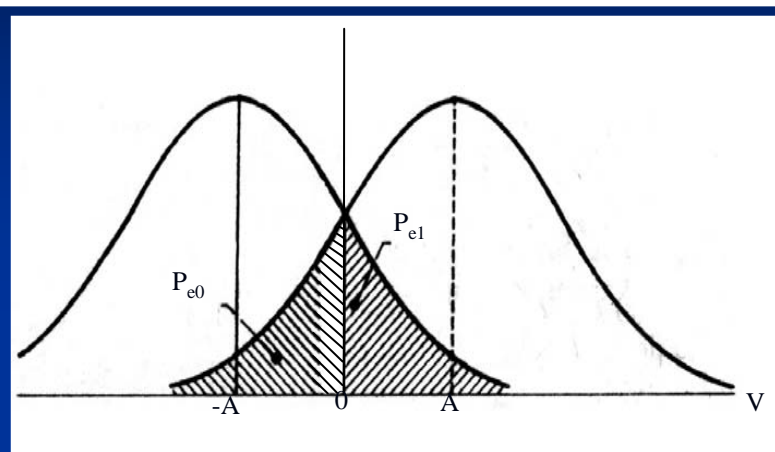
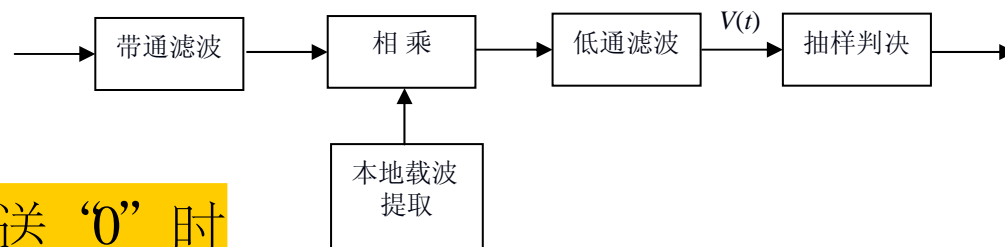
$$P_{e1} = P(V > 0 / \text{发送“1”时})$$

由于现在  $P_{e0} = P_{e1}$ ,  $\therefore$  总误码率为  $P_e = P_{e0} / 2 + P_{e1} / 2 = P_{e0} = P_{e1}$

图中左部阴影的面积等于: 
$$P_{e0} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(x-A)^2/2\sigma_n^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r})$$

因此, 总误码率等于: 
$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r}) \quad \text{或} \quad P_e \approx \frac{1}{2r\sqrt{\pi}} e^{-r}$$

在相干检测条件下, 为了得到相同的误码率, 2FSK的功率需要比2PSK的功率大3 dB; 而2ASK则需大6 dB。



## 6.5 二进制差分相移键控(2DPSK)

### 6.5.1 基本原理

➤ 表示式:

设 $\Delta\theta$ 为当前码元和前一码元的相位之差:

$$\begin{cases} \Delta\theta = 0 & \text{当发送“0”时} \\ \Delta\theta = \pi & \text{当发送“1”时} \end{cases}$$

则, 信号可以表示为

$$s(t) = \cos(\omega_0 t + \theta + \Delta\theta), \quad 0 < t \leq T$$

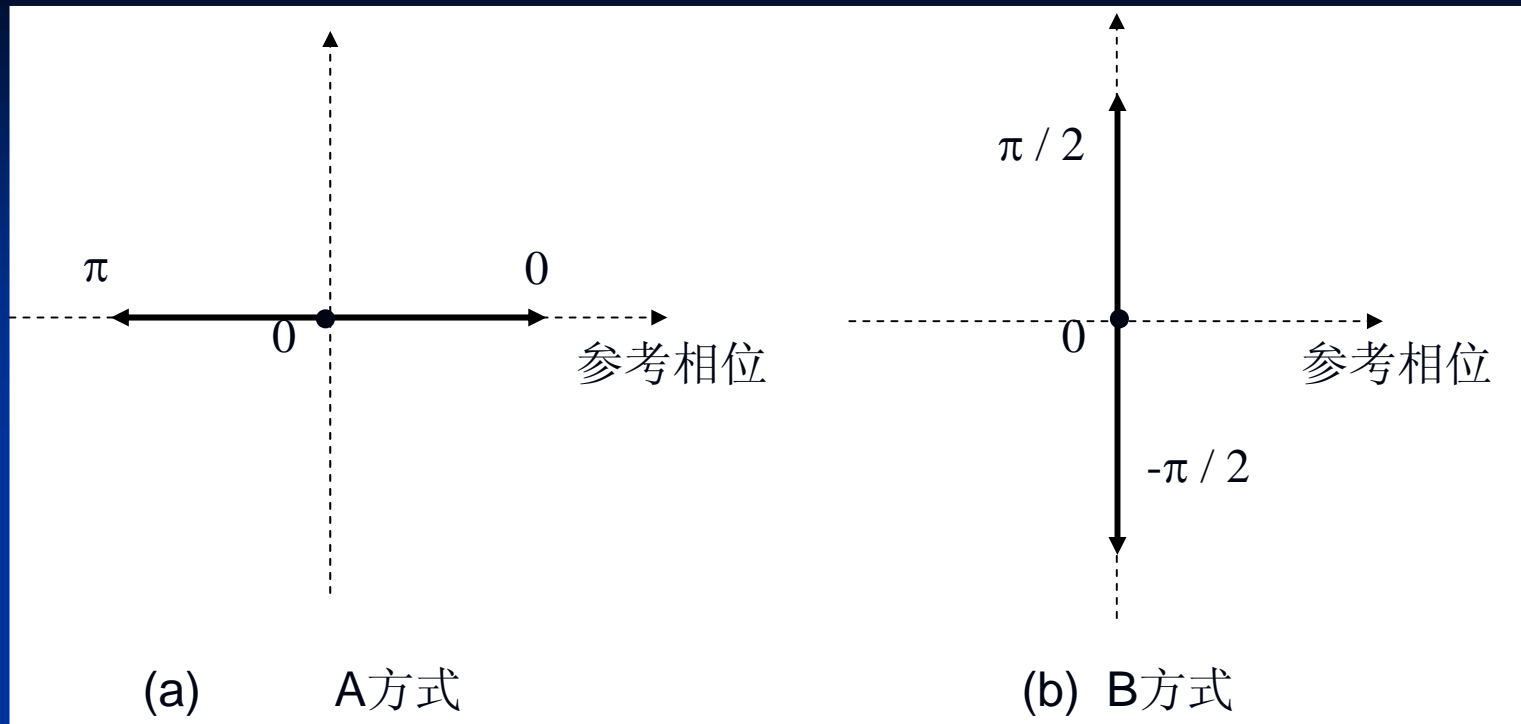
式中,  $\omega_0 = 2\pi f_0$ 为载波的角频率;

$\theta$ 为前一码元的相位。

例:

基带信号	1 1 1 0 0 1 1 0 1	1 1 1 0 0 1 1 0 1
$\Delta\theta$	$\pi \pi \pi 0 0 \pi \pi 0 \pi$	$\pi \pi \pi 0 0 \pi \pi 0 \pi$
初始相位 $\theta$	0	$\pi$
2DPSK码元相位( $\theta + \Delta\theta$ )	$\pi 0 \pi \pi \pi 0 \pi \pi 0$	$0 \pi 0 0 0 \pi 0 0 \pi$

# 矢量图



- **A方式**: 可能长时间无相位突跳点
- **B方式**: 相邻码元之间必定有相位突跳。



## ➤ 间接法产生2DPSK信号

- 从接收码元观察：不能区分2DPSK和2PSK信号

若码元相位为： $\pi \ 0 \ \pi \ \pi \ \pi \ 0 \ \pi \ \pi \ 0$

发2DPSK信号时： $\mathbf{A} = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$ （初相 $0^\circ$ ）

发2PSK信号时： $\mathbf{B} = 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$ （ $1 \rightarrow \pi$ ）

- 若将待发送的序列 $\mathbf{A}$ ，先变成序列 $\mathbf{B}$ ，再对载波进行2PSK调制，结果和用 $\mathbf{A}$ 直接进行2DPSK调制一样：

基带序列： $\mathbf{A} = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$ （绝对码）

变换后序列： $\mathbf{B} = (0)1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$ （相对码）

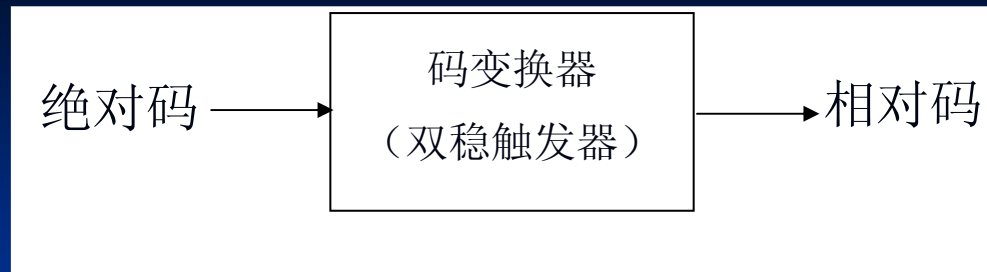
2PSK调制后的相位： $(0)\pi \ 0 \ \pi \ \pi \ \pi \ 0 \ \pi \ \pi \ 0$

- 变换规律：

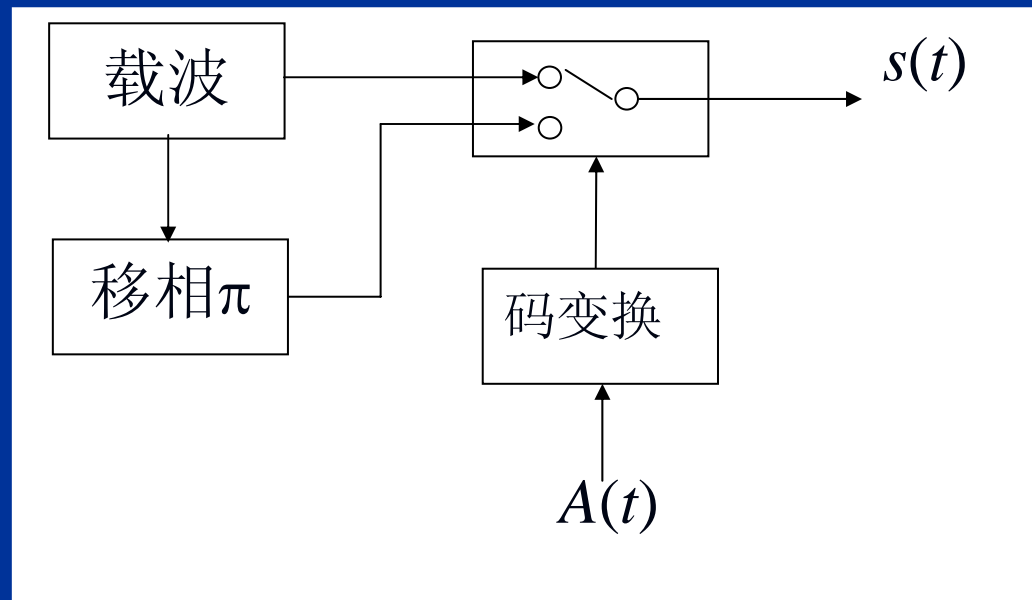
绝对码元“1” → 使相对码元改变；

绝对码元“0” → 使相对码元不变。

## ■ 变换方法：用一个双稳态触发器

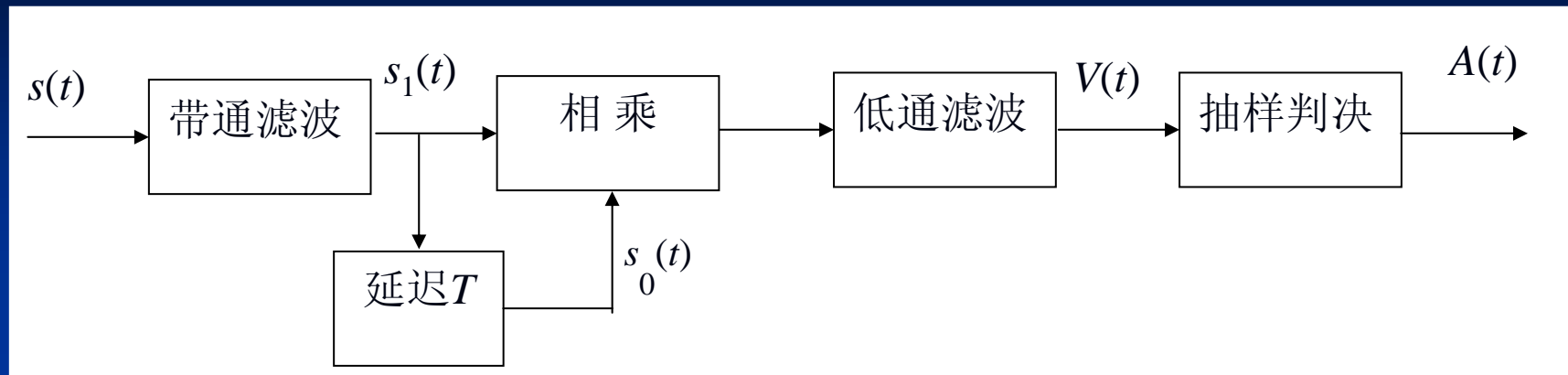


## ■ 间接法2DPSK信号调制器原理方框图



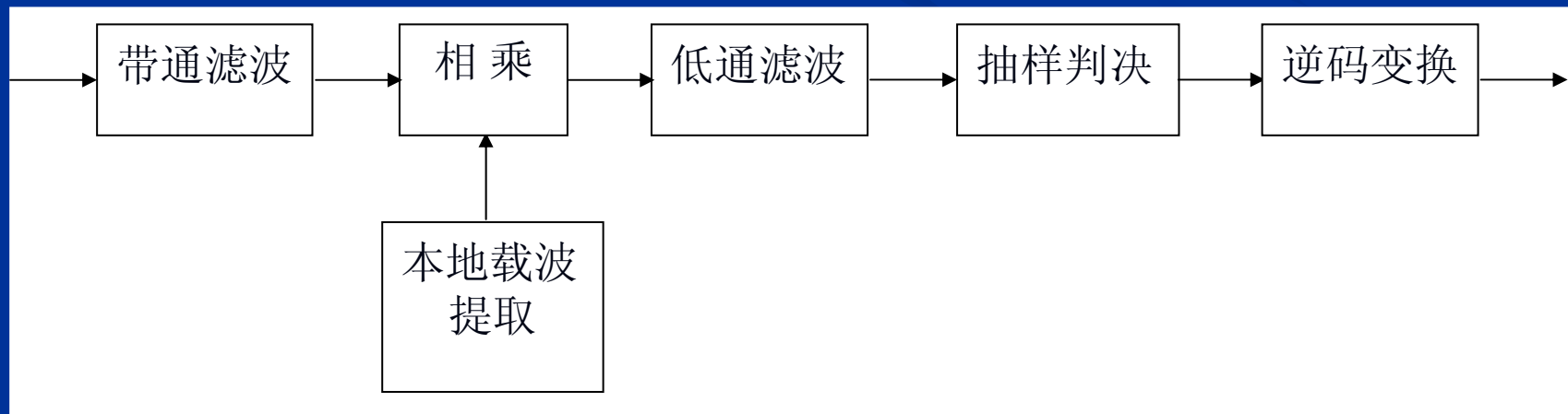
## ➤ 2DPSK信号的解调

### ■ 相位比较法：

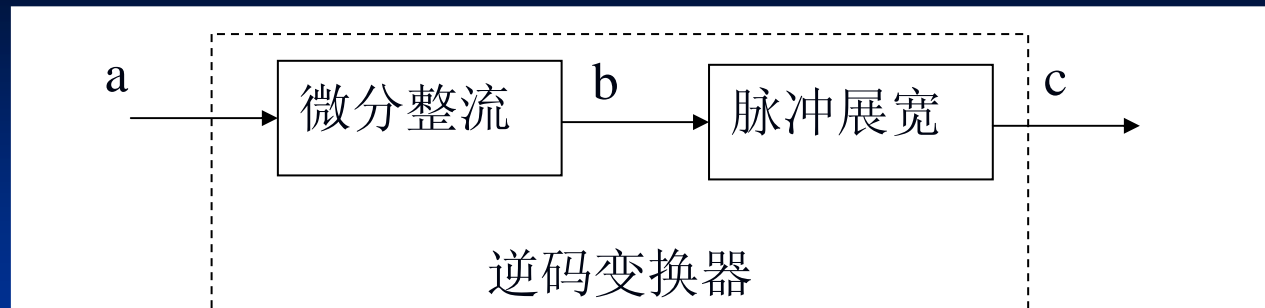


缺点：对于延迟单元的延时精度要求很高，较难作到。

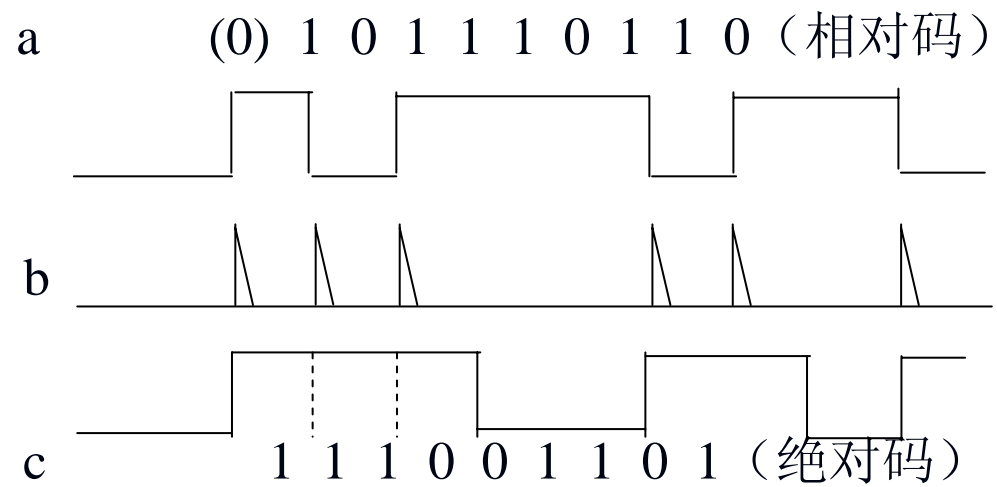
■ 相干解调法：先把接收信号当作绝对相移信号进行相干解调，解调后是相对码，再将此相对码作逆码变换，还原成绝对码。



## □ 逆码变换器



(a) 原理方框图



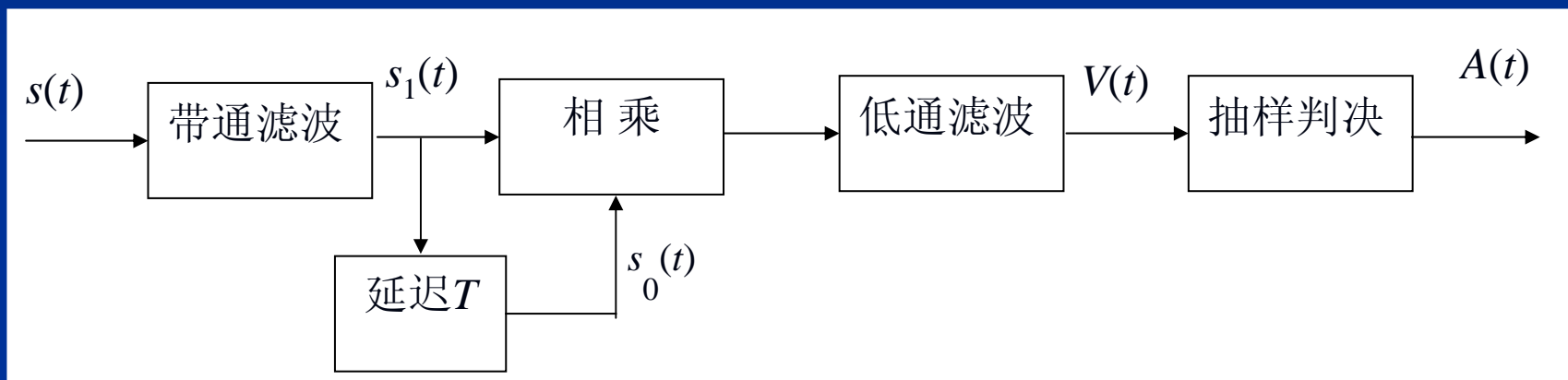
(b) 波形图

## 6.5.2 功率谱密度

2DPSK信号的功率谱密度和2PSK信号的功率谱密度完全一样。

## 6.5.3 误码率

➤ 相位比较法的误码率：相比较的相邻码元都含有噪声。



设连续接收两个码元“00”，则有

$$s_0(t) = [A + n_{0c}(t)] \cos \omega_0 t - n_{0s}(t) \sin \omega_0 t$$

$$s_1(t) = [A + n_{1c}(t)] \cos \omega_0 t - n_{1s}(t) \sin \omega_0 t$$

式中， $s_0(t)$  — 前一接收码元经延迟后的波形；

$s_1(t)$  — 当前接收码元波形。

这两个码元，经过相乘和低通滤波后，得到

$$V(t) = \frac{1}{2} \{ [A + n_{0c}(t)][A + n_{1c}(t)] + n_{0s}(t)n_{1s}(t) \}$$

规则判决：

若  $V > 0$ ，则判为“0”，即接收正确；

若  $V < 0$ ，则判为“1”，即接收错误。

所以，在当前发送码元为“0”时，错误接收概率等于

$$P_{e0} = P(V < 0) = P \{ [(A + n_{0c})(A + n_{1c}) + n_{0s}n_{1s}] < 0 \}$$

利用恒等式

$$a_1a_2 + b_1b_2 = \frac{1}{4} \{ [(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2] - [(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2] \}$$

上式可以改写为

$$P_{e0} = P \left\{ \left[ (2A + n_{0c} + n_{1c})^2 + (n_{0s} + n_{1s})^2 - (n_{0c} - n_{1c})^2 - (n_{0s} - n_{1s})^2 \right] < 0 \right\}$$

或者写为： $P_{e0} = P(R_1 < R_2)$

式中， $R_1 = \sqrt{(2A + n_{0c} + n_{1c})^2 + (n_{0s} + n_{1s})^2}$        $R_2 = \sqrt{(n_{0c} - n_{1c})^2 + (n_{0s} - n_{1s})^2}$

$$R_1 = \sqrt{(2A + n_{0c} + n_{1c})^2 + (n_{0s} + n_{1s})^2}$$

— 服从广义瑞利分布：

$$f(R_1) = \frac{R_1}{2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{AR_1}{\sigma_n^2}\right) e^{-(R_1^2 + 4A^2)/4\sigma_n^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(n_{0c} - n_{1c})^2 + (n_{0s} - n_{1s})^2}$$

— 服从瑞利分布：

$$f(R_2) = \frac{R_2}{2\sigma_n^2} e^{-R_2^2/4\sigma_n^2}$$

将 $f(R_1)$ 式和 $f(R_2)$ 式代入  $P_{e0} = P(R_1 < R_2)$

得出

$$P_{e0} = \int_0^\infty f(R_1) \left[ \int_{R_2=R_1}^\infty f(R_2) dR_2 \right] dR_1 = \int_0^\infty \frac{R_1}{2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{AR_1}{\sigma_n^2}\right) e^{-(2R_1^2 + 4A^2)/4\sigma_n^2} dR_1$$

积分结果等于：

$$P_{e0} = \frac{1}{2} e^{-r}$$

式中，  $r = A^2/2\sigma_n^2$

当发送码元“1”时，误码率相同，故有

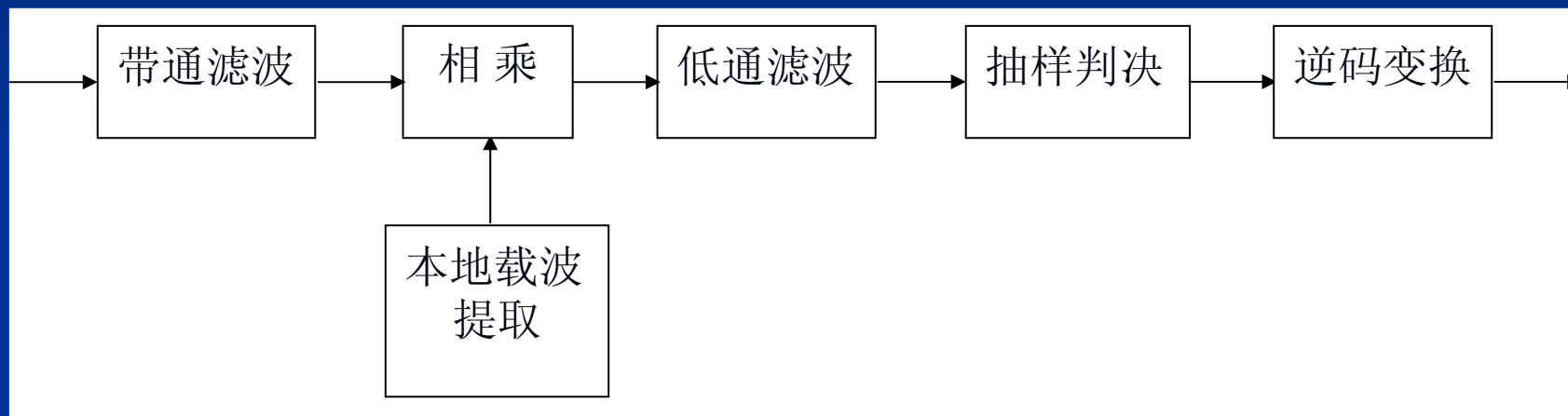
$$P_{e1} = \frac{1}{2} e^{-r}$$

∴当发送“0”和“1”的概率相等时，总误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r}$$



➤ 相干解调（极性比较）法的误码率：



由上图可见，解调过程的前半部分和相干解调方法的完全一样，故现在只需考虑由逆码变换器引入的误码率。

■ 逆码变换规律:

□ 无误码时:

输出绝对码元是相邻两个相对码元取值的模“2”和。

□ 有1个误码时:

将产生两个误码

□ 有2个误码时:

仍将产生两个误码

□ 有一串误码时:

仍将产生两个误码



(a) 无误码时



(b) 有1个误码时



(c) 有2个误码时



(d) 有一串误码时

## ■ 由逆码变换器引入的误码率

设： $P_n$  — 逆码变换器输入 $n$ 个连续错码的概率，

$P_e'$  — 逆码变换器输出端的误码率，则有

$$P_e' = 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + \dots + 2P_n + \dots$$

$\because P_n$ 是刚好连续 $n$ 个码元出错的概率。这意味着，在这出错码元串外两端的相邻码元必须是不错的码元， $\therefore$

$$P_n = (1 - P_e)^2 P_e^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

式中， $P_e$ 为逆码变换器输入信号的误码率。将上式代入 $P_e'$ 表示式，得到：

$$P_e' = 2(1 - P_e)^2 (P_e^1 + P_e^2 + \dots + P_e^n + \dots) = 2(1 - P_e)^2 P_e (1 + P_e + P_e^2 + \dots)$$

将等比级数公式  $1 + P_e + P_e^2 + \dots = \frac{1}{1 - P_e}$  代入上式，  
得到：

$$P_e' = 2(1 - P_e)P_e$$

当 $P_e$ 很小时，  $P_e' / P_e \approx 2$

当 $P_e$ 很大时，即 $P_e \approx 1/2$ 时，  $P_e' / P_e \approx 1$

- 相干解调（极性比较）法的最终误码率  
将2PSK信号相干解调时的误码率公式

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r})$$

代入

$$P_e' = 2(1 - P_e)P_e$$

得到

$$P_e' = \operatorname{erfc} \sqrt{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r} \right)$$

或

$$P_e' = \frac{1}{2} \left[ 1 - (\operatorname{erf} \sqrt{r})^2 \right]$$

当 $P_e$ 很小时，有

$$P_e' = 2P_e = \operatorname{erfc} \sqrt{r} = 1 - \operatorname{erf} \sqrt{r}$$

**【例6.3】** 假设要求以1 Mb/s的速率用2DPSK信号传输数据，误码率不超过 $10^{-4}$ ，且在接收设备输入端的白色高斯噪声的单边功率谱密度 $n_0$ 等于 $1 \times 10^{-12} \text{ W/Hz}$ 。试求：（1）采用相位比较法时所需接收信号功率；（2）采用极性比较法时所需接收信号功率。

**解：** 现在码元速率为1 MB。2DPSK信号的带宽和2ASK信号的带宽一样，所以接收带通滤波器的带宽等于

$$B \approx 2/T = 2 \times 10^6 \text{ Hz}$$

带通滤波器输出噪声功率等于

$$\sigma_n^2 = n_0 B = 2 \times 1 \times 10^{-12} \times 10^6 = 2 \times 10^{-6}$$

■ 采用相位比较法时：按照要求  $P_e = \frac{1}{2} e^{-r} \leq 10^{-4}$

从而得到要求信噪比： $r = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} \geq \ln 5000 = 8.52$

及要求信号功率：

$$P_s = \frac{A^2}{2} \geq 8.52 \times \sigma_n^2 = 8.52 \times 2 \times 10^{-6} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ W} = -17.7 \text{ dBm}$$

- 采用极性比较法时：按照同样要求

$$P_e' = 1 - \text{erf}\sqrt{r} \leq 10^{-4}$$

即

$$\text{erf}\sqrt{r} \geq 1 - 10^{-4} = 0.9999$$

由误差函数表查出要求：

$$\sqrt{r} \geq 2.75$$

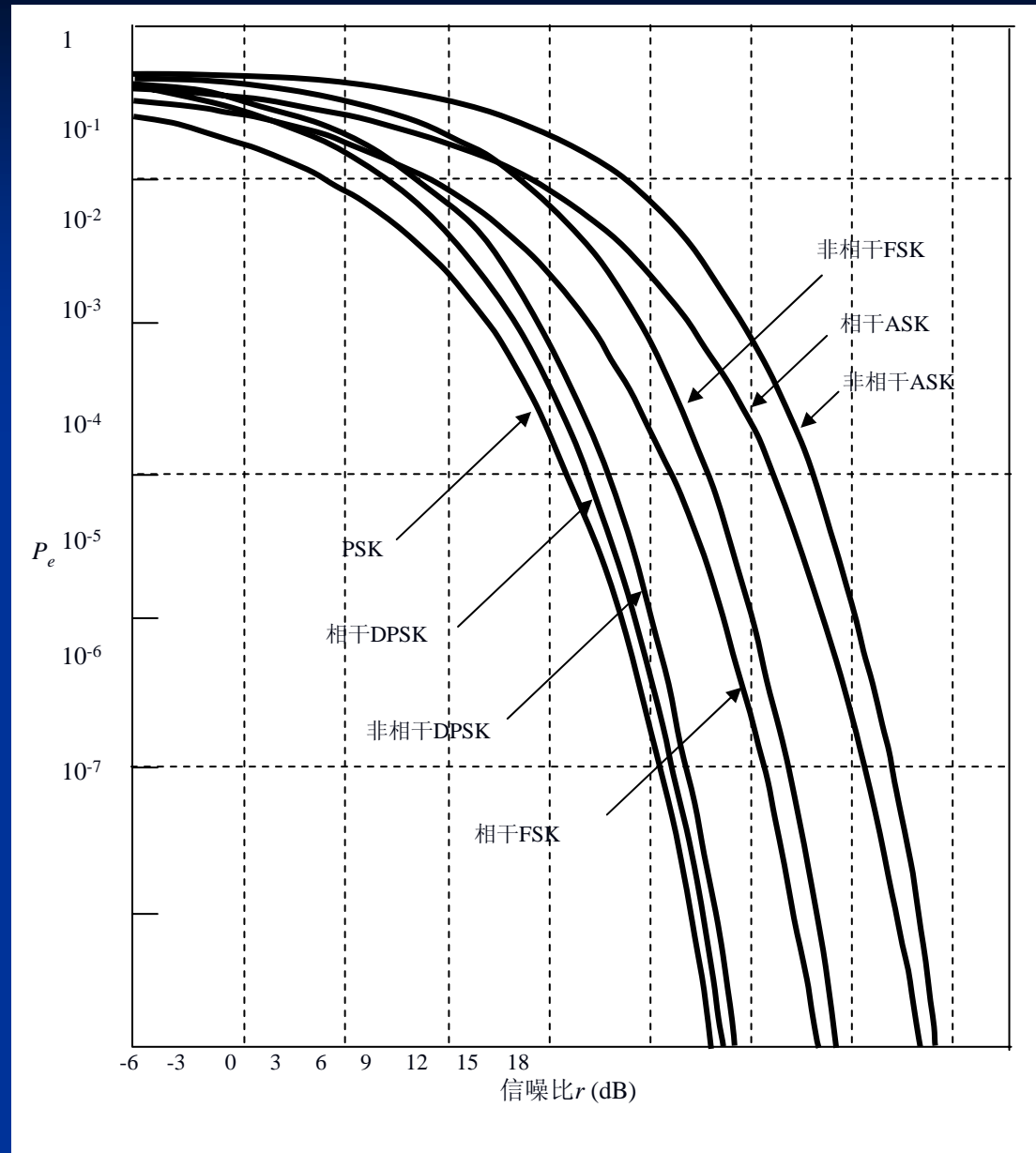
$$r \geq 7.56$$

故要求信号功率

$$P_s = \frac{A^2}{2} \geq 7.56\sigma_n^2 = 7.56 \times 2 \times 10^{-6} = 15.1 \times 10^{-6} \text{ W} = -18.2 \text{ dBm}$$

## 6.6 二进制数字键控传输系统性能比较

### ➤ 误码率曲线



## ➤ 误码率公式

键控方式	误码率公式
非相干2ASK	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}$ 式(6.2-49)
相干2ASK	$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{r}}{2}$ 式(6.2-28)
非相干2FSK	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2}$ 式(6.3-37)
相干2FSK	$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{r}{2}}$ 式(6.3-28)
非相干2DPSK	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r}$ 式(6.5-15)
相干2DPSK	$P_e = \operatorname{erfc} \sqrt{r} (1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r})$ 式(6.5-25)
相干2PSK	$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r}$ 式(6.4-13)



## 6.7 多进制数字键控

### 6.7.0

码元信噪比  $r$ :

$$r = A^2 / 2\sigma_n^2 \quad \text{— 信号码元功率和噪声功率之比}$$

$$r = E / \sigma_0^2 \quad \text{— 码元能量和噪声单边功率谱密度之比}$$

对于  $M$  进制, 1 码元中包含  $k$  比特的信息:  $k = \log_2 M$

码元能量  $E$  平均分配到每比特的能量  $E_b$  等于  $E / k$ , 故有

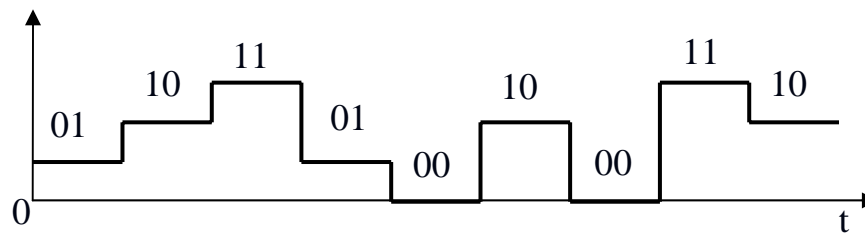
$$\frac{E_b}{\sigma_0^2} = \frac{E}{k \sigma_0^2} = \frac{r}{k} = r_b$$

式中,  $r_b$  是每比特的能量和噪声单边功率谱密度之比。

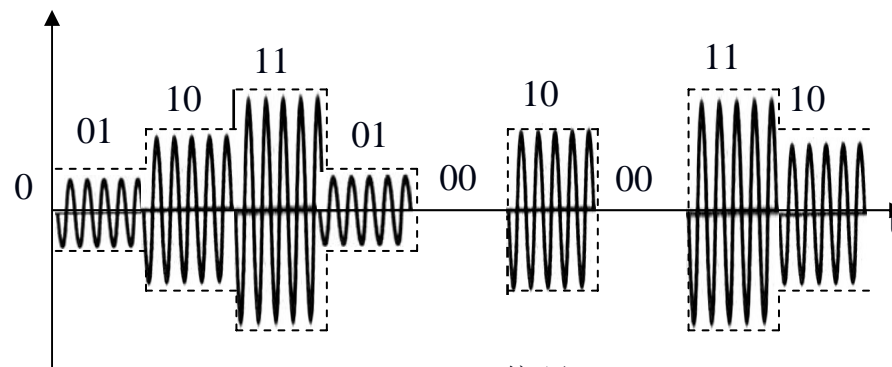
在研究不同  $M$  值下的误码率时, 适合用  $r_b$  为单位来比较。

## 6.7.1 多进制振幅键控(MASK)

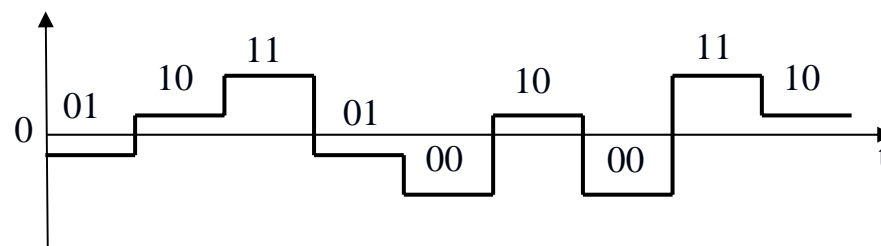
- 多电平单极性不归零信号  
→ MASK信号  
(图a → 图b)
- 多电平双极性不归零信号  
→ 抑制载波MASK信号  
(图c → 图d)
- 图示为4ASK信号:  
每码元含2比特



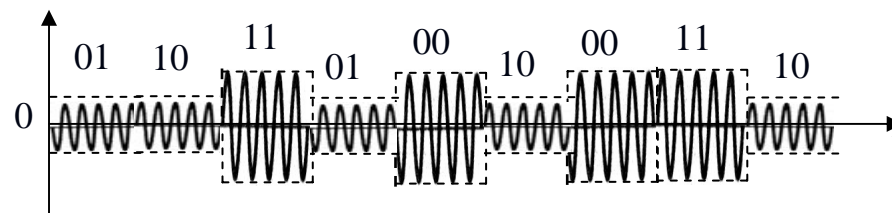
(a) 基带多电平单极性不归零信号



(b) MASK信号



(c) 基带多电平双极性不归零信号



(d) 抑制载波MASK信号

- **MASK信号带宽**

**MASK信号可以看成是多个2ASK信号的叠加。**

**∴两者带宽相同。**

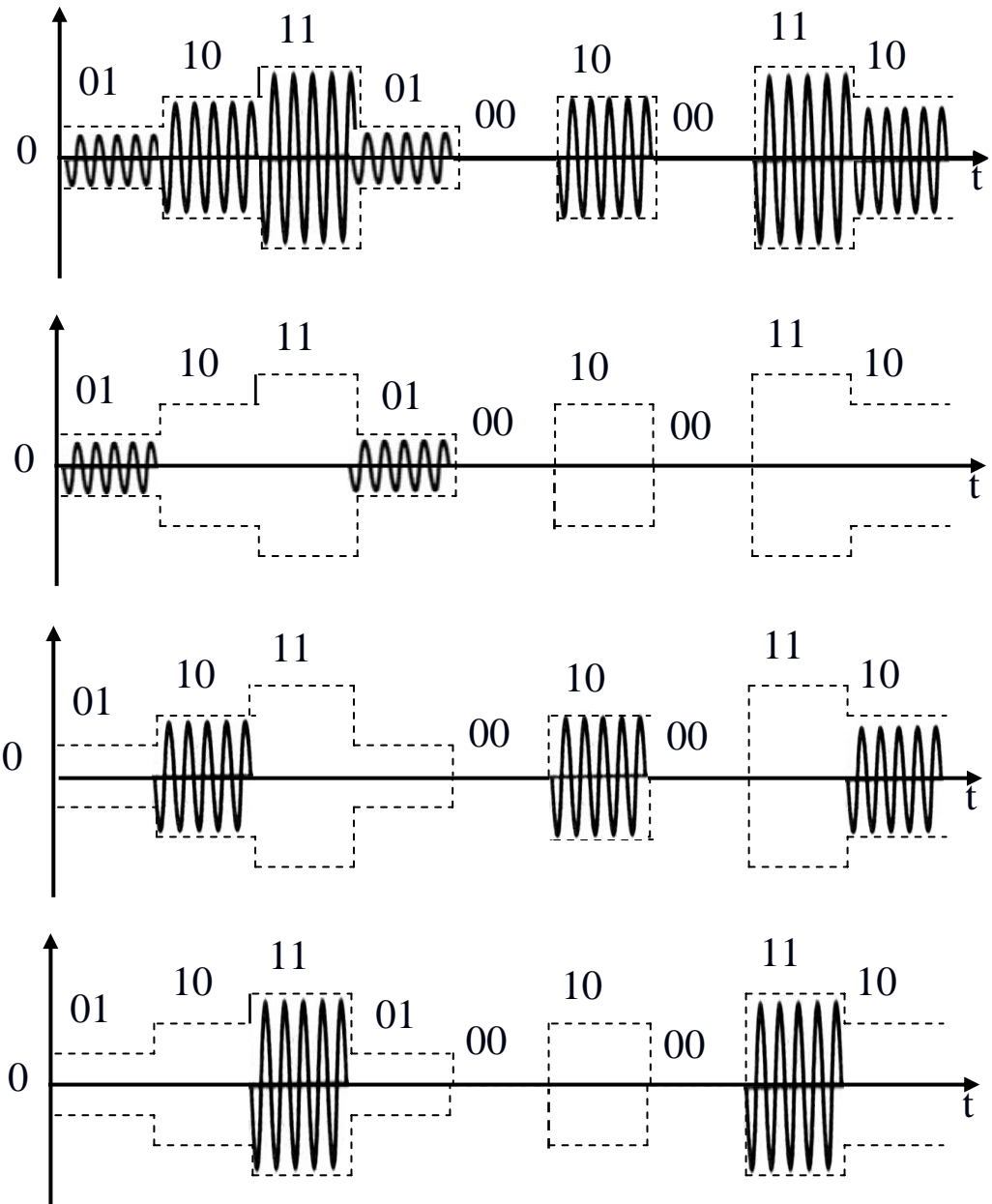
- **MASK信号的频带利用率，超过奈奎斯特准则：**

**基带信号 — 2 b/s·Hz**

**2ASK信号 — 1 b/s·Hz**

- **MASK信号缺点：**

**受信道衰落影响大。**



- 抑制载波MASK信号的误码率

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc} \left( \frac{3}{M^2 - 1} r \right)^{1/2}$$

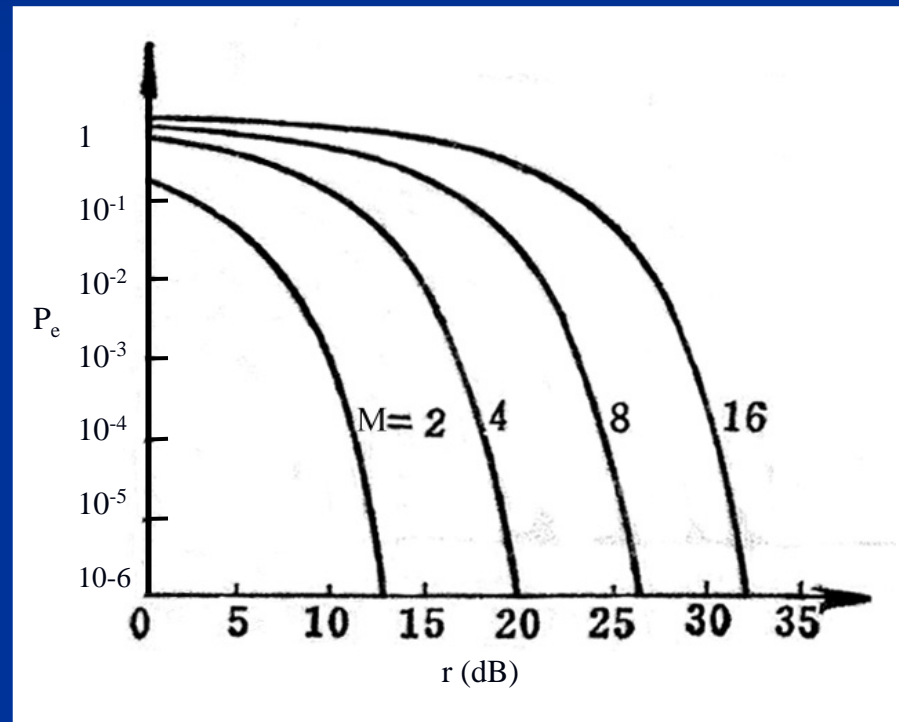
式中， $M$  — 进制数，或振幅数；

$r$  — 信号平均功率与噪声功率比。

- 当 $M = 2$ 时，上式变成

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r}$$

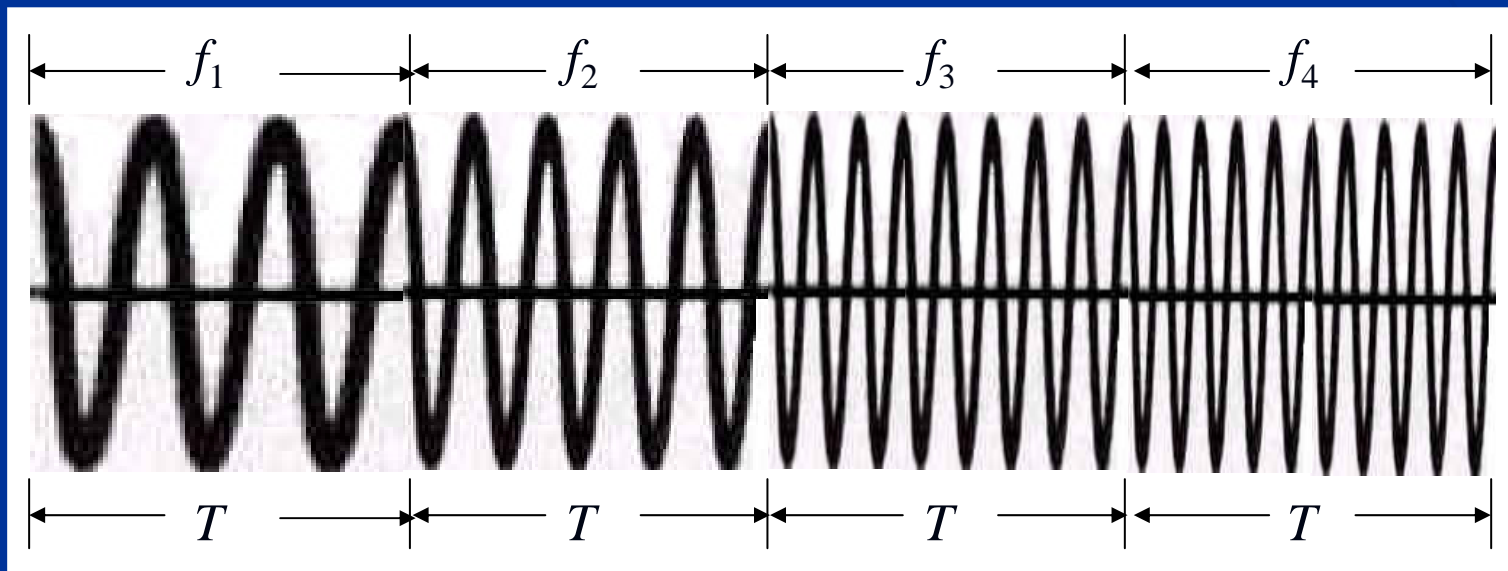
即2PSK相干解调误码率公式。



## 6.7.2 多进制频移键控(MFSK)

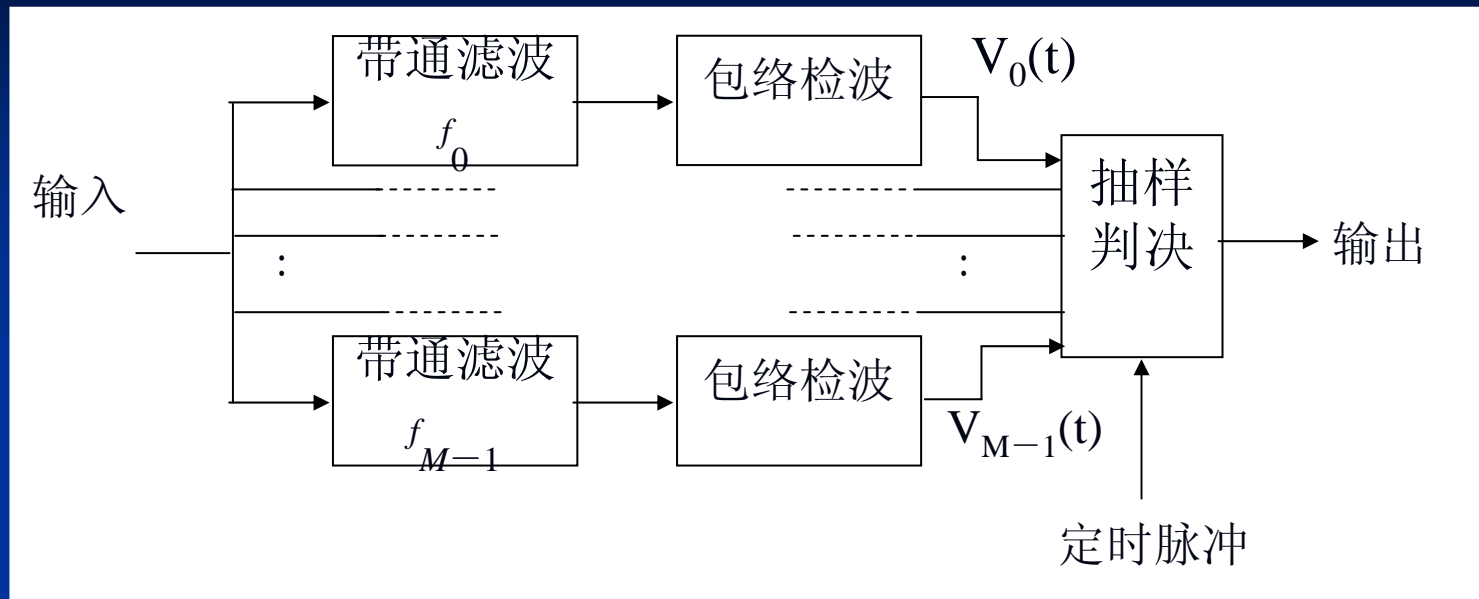
- 基本原理

- MFSK的码元采用 $M$ 个不同频率的载波。
- 设 $f_1$ 为其最低载频,  $f_M$ 为其最高载频, 则MFSK信号的带宽近似等于 $f_M - f_1 + \Delta f$ , 其中 $\Delta f$ 是单个码元的带宽, 它决定于信号传输速率。



- 非相干解调时的误码率

- *MFSK*信号非相干解调器的原理方框图



- $M$ 个带通滤波器的输出中仅有一个是信号加噪声，其他各路都是只有噪声。故这 $(M-1)$ 路噪声的包络都不超过某个门限电平 $h$ 的概率等于

$$[1 - P(h)]^{M-1}$$

式中， $P(h)$  — 1路滤波器的输出噪声包络 $h$ 的概率。

- 设 $M$ 路带通滤波器中的噪声是互相独立的窄带正态分布噪声，则其包络服从瑞利分布。由瑞利分布公式，有

$$P(h) = \int_h^{\infty} \frac{N}{\sigma_n^2} e^{-N/2\sigma_n^2} dN = e^{-h^2/2\sigma_n^2}$$

式中， $N$  — 滤波器输出噪声的包络；

$\sigma_n^2$  — 滤波器输出噪声的功率。

- 若有任意1路或1路以上输出噪声的包络超过门限 $h$ 就将发生错误判决，则此错判的概率将等于

$$P_e(h) = 1 - [1 - P(h)]^{M-1}$$

- $h$ 值如何决定？

有信号的带通滤波器的输出电压是信号和噪声之和，其包络服从广义瑞利分布：

$$p(x) = \frac{x}{\sigma_n^2} I_0 \left( \frac{Ax}{\sigma_n^2} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_n^2} (x^2 + A^2) \right], \quad x \geq 0$$

式中， $x$  — 输出信号和噪声之和的包络；

$A$  — 输出信号振幅； $\sigma_n^2$  — 输出噪声功率。

若其他任何路的输出电压值超过了这路有信号的输出电压值就将发生错判，故输出信号和噪声之和 $x$ 就是上面的门限值 $h$ 。

➤ 发生错误判决的概率：

$$P_e = \int_0^{\infty} p(h)P_e(h)dh$$

将前3式代入上式，得到：

$$P_e = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} e^{-nA^2/2(n+1)\sigma_n^2}$$

上式是一个正负交替的多项式，可以证明它的第1项是它的上

界，即有  $P_e \leq \frac{M-1}{2} e^{-A^2/4\sigma_n^2}$



$$P_e \leq \frac{M-1}{2} e^{-A^2/4\sigma_n^2}$$

可以改写为

$$P_e \leq \frac{M-1}{2} e^{-E/2\sigma_0^2} = \frac{M-1}{2} e^{-r/2}$$

将  $r = kr_b$ , 代入上式得出

$$P_e \leq \frac{M-1}{2} \exp(-kr_b/2)$$

在上式中用  $M$  代替  $(M-1)/2$ , 右端的值将增大, 但是此不等式仍然成立, 所以有

$$P_e < M \exp(-kr_b/2) = \exp\left[-k\left(\frac{r_b}{2} - \ln 2\right)\right]$$

式中利用了关系:  $M = 2^k = e^{\ln 2^k}$

由上式可以看出, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $P_e$  按指数规律趋近于 0, 但要保

证:  $\frac{r_b}{2} - \ln 2 > 0$ , 即  $r_b > 2 \ln 2$

上式条件要求信噪比  $r_b$  保证大于 1.39 dB。

➤ 码元错误率 $P_e$ 和比特错误率 $P_b$ 之间的关系

假设：当一个 $M$ 进制码元发生错误时，将随机地错成其他 $(M-1)$ 个码元之一。

在任一给定比特的位置上，出现“1”和“0”的码元各占一半，即出现信息“1”的码元有 $M/2$ 种，出现信息“0”的码元有 $M/2$ 种。

例： $M = 8$ ， $M = 2^k$ ， $k=3$ ，

在任一列中均有4个“0”和4个“1”。

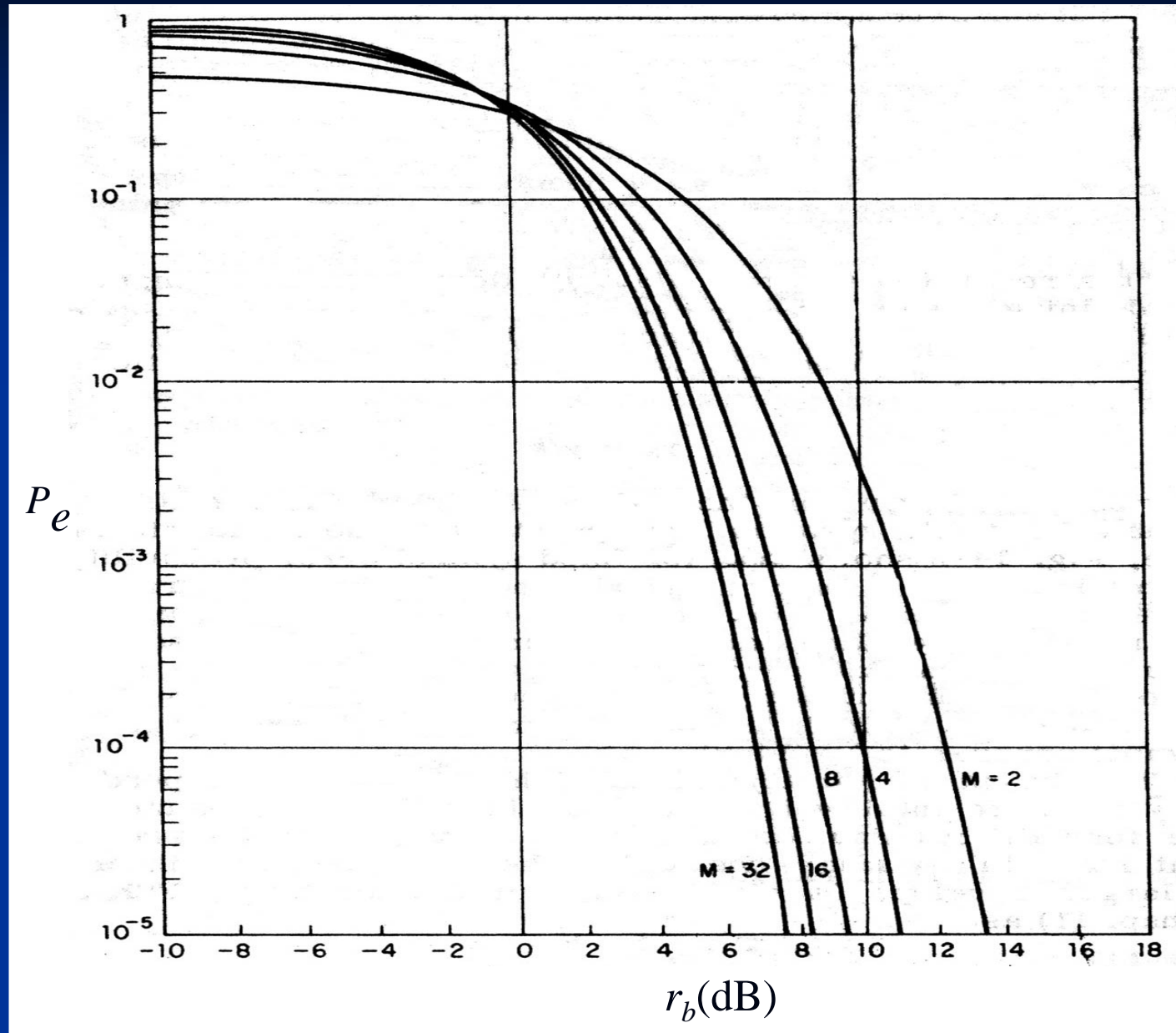
一般而言，在一个给定的码元中，任一比特位置上的信息和其他 $(2^{k-1} - 1)$ 种码元在同一位置上的信息相同，和其他 $2^{k-1}$ 种码元在同一位置上的信息则不同。所以，比特错误率 $P_b$ 和码元错误率 $P_e$ 之间的关系为

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_e = \frac{P_e}{2[1 - (1/2^k)]}$$

当 $k$ 很大时， $P_b \approx P_e / 2$

	$M=8$
0	0 0 0
1	0 0 1
2	0 1 0
3	0 1 1
4	1 0 0
5	1 0 1
6	1 1 0
7	1 1 1

➤  $P_e \sim r_b$  曲线



● 相干解调时的误码率：计算结果如下

$$P_e = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A^2/2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A+\sqrt{2r}} e^{-u^2/2} du \right]^{M-1} dA$$

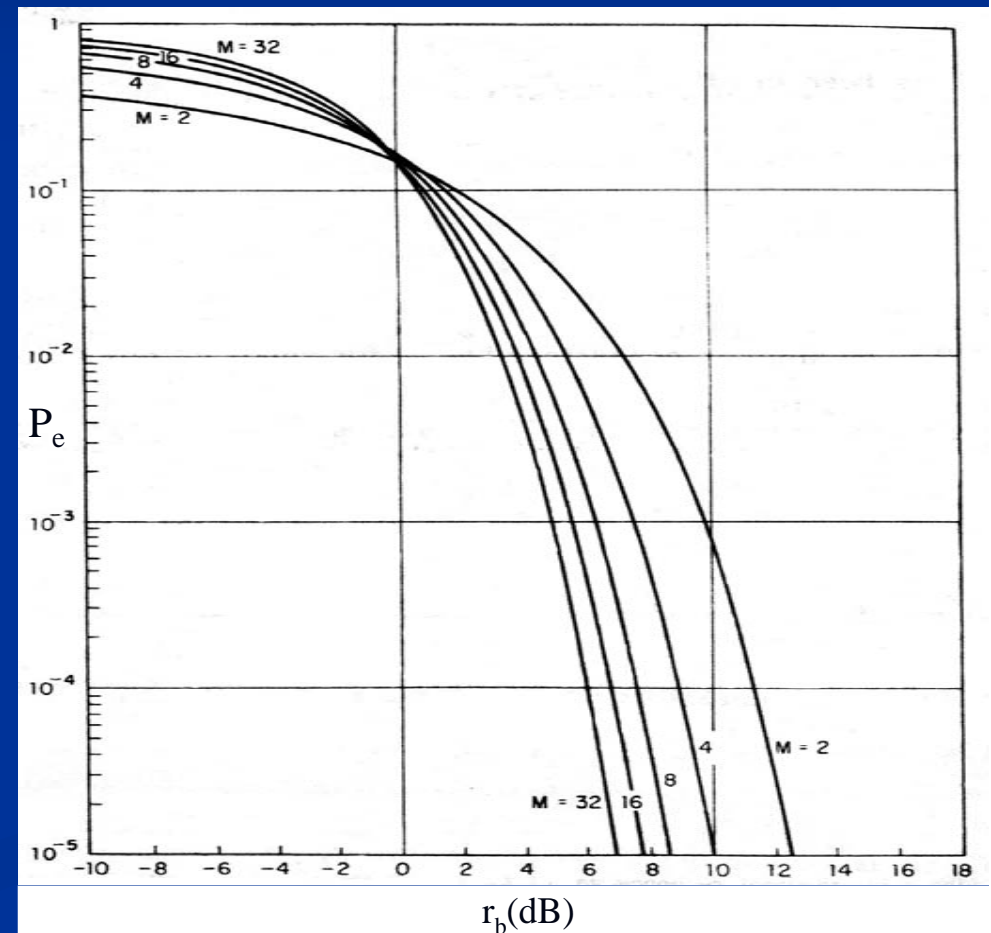
➢ 由图可见，当信息传输速率和误码率给定时，增大 $M$ 值可以降低对信噪比 $r_b$ 的要求。

➢ 误码率上界：

$$P_e \leq (M-1) \operatorname{erfc}(\sqrt{r})$$

➢ 非相干和相干接收误码率比较：

当 $k > 7$ 时，两者的区别可以忽略。



### 6.7.3 多进制相移键控(MPSK)

➤ 基本原理：MPSK信号码元可以表示为

$$s_k(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_k)$$

式中， $\theta_k$  — 受调制的相位，其值决定于基带码元的取值；

$A$  — 信号振幅，为常数；

$k = 1, 2, \dots, M$ 。

令 $A=1$ ，然后将其展开写成

$$s_k(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_k) = a_k \cos \omega_0 t - b_k \sin \omega_0 t$$

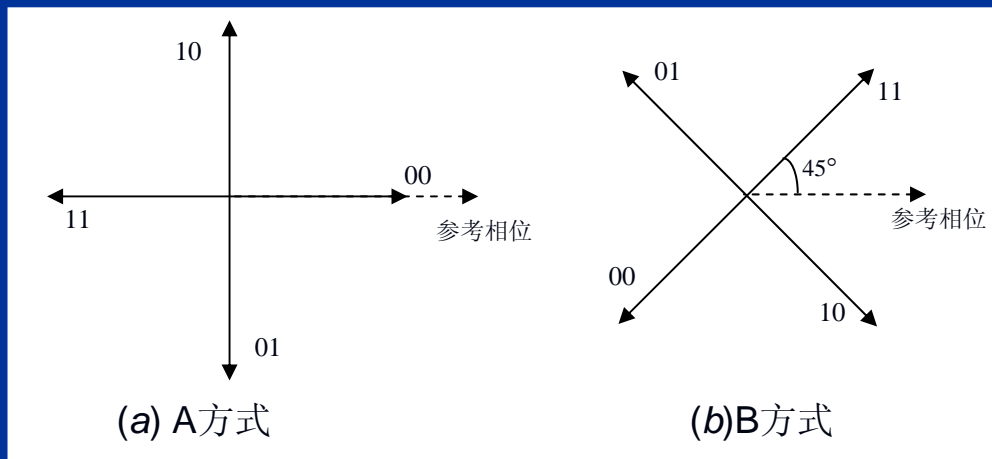
式中， $a_k = \cos \theta_k$      $b_k = \sin \theta_k$

由上式看出，M-PSK信号码元可以看作是两个正交的MASK信号码元之和。因此，其带宽和后者的带宽相同。

## ➤ 正交相移键控(QPSK)

### ■ 编码规则：A和B两种编码方式

a	b	$\theta_k$	
		A方式	B方式
0	0	$0^\circ$	$225^\circ$
1	0	$90^\circ$	$315^\circ$
1	1	$180^\circ$	$45^\circ$
0	1	$270^\circ$	$135^\circ$



序号	格雷码	二进制码
1	00 <b>00</b>	0000
2	00 <b>10</b>	0001
3	00 <b>11</b>	0010
4	00 <b>01</b>	0010
5	0101	0100
6	0111	0101
7	0110	0110
8	0100	0111
9	1100	1000
10	1110	1001
11	1111	1010
12	1101	1011
13	1001	1100
14	1011	1101
15	1010	1110
16	1000	1111

- 格雷(Gray)码规律：
- 相邻 $\theta_k$ 之间仅差1比特。
- 格雷码优点：误比特律小。

## ■ 产生方法

### □ 第一种方法：相乘法

二进制码元“1” → 双极性脉冲“+1”  
二进制码元“0” → 双极性脉冲“-1” } B方式编码

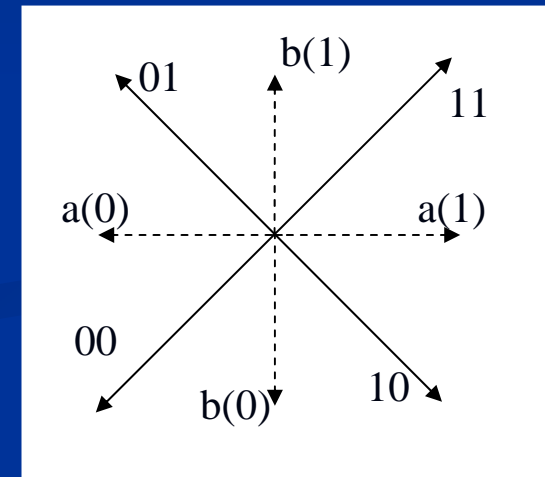
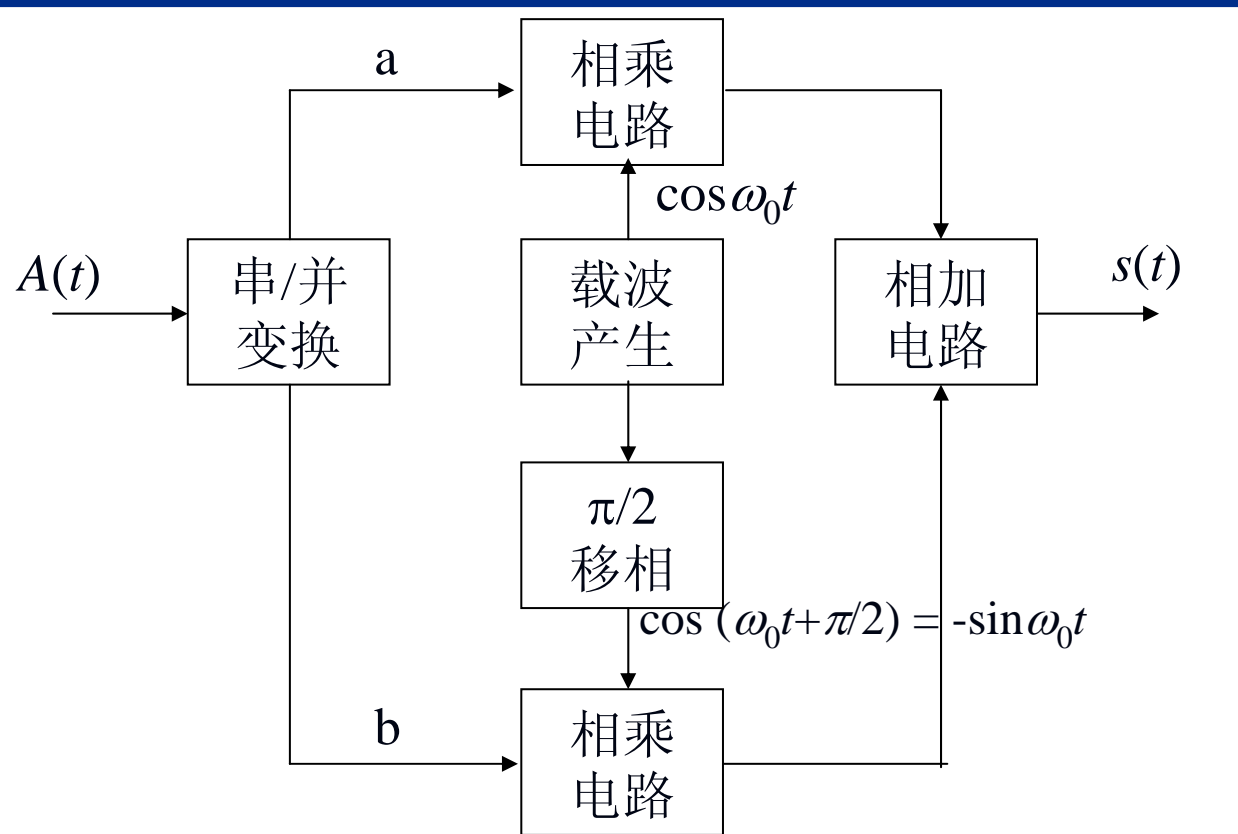
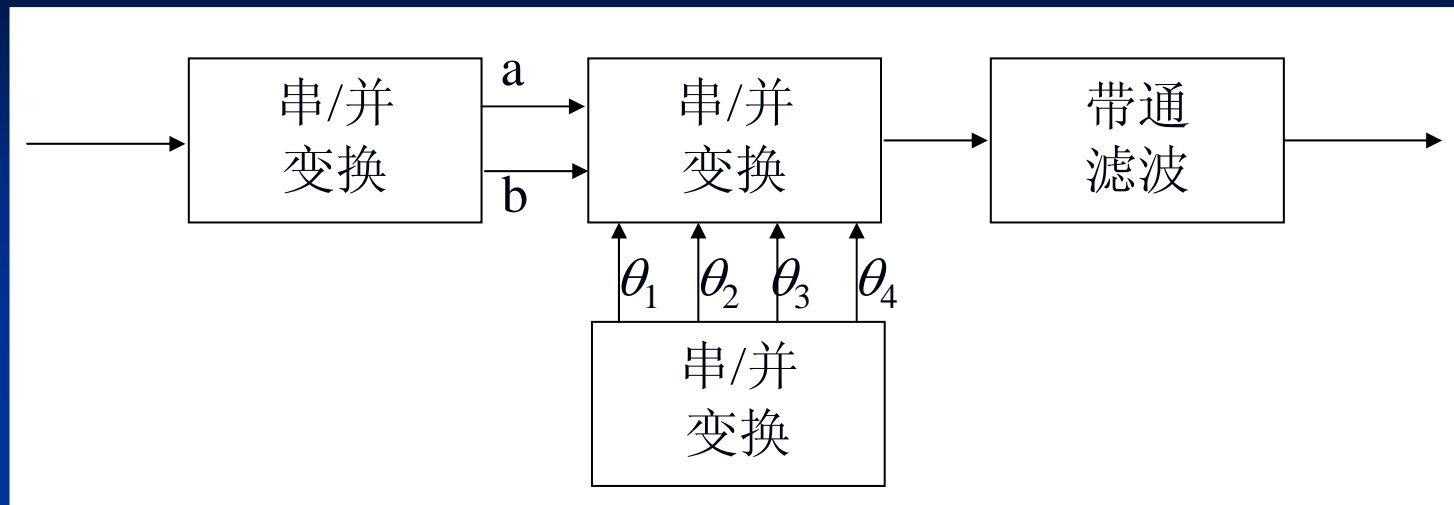


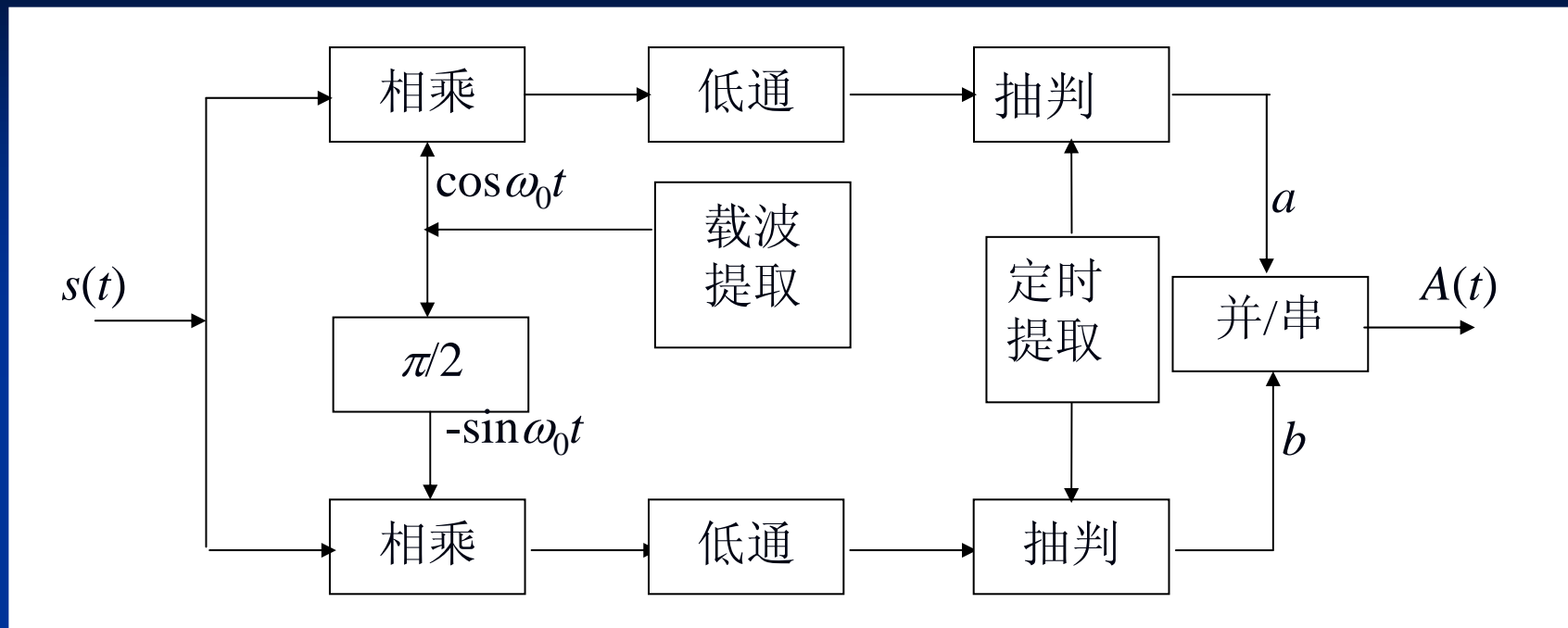
图6.7.8 第一种QPSK信号产生方法

## □ 第二种方法：选择法





## ■ 解调方法 — 相干解调



## ■ 误码率

若发送信号“11”的相位为 $45^\circ$ ，则判决门限应该设在 $0^\circ$ 和 $90^\circ$ 。

设： $f(\theta)$  — 接收矢量相位的概率密度，则错误概率等于：

$$P_e = 1 - \int_0^{\pi/2} f(\theta) d\theta$$

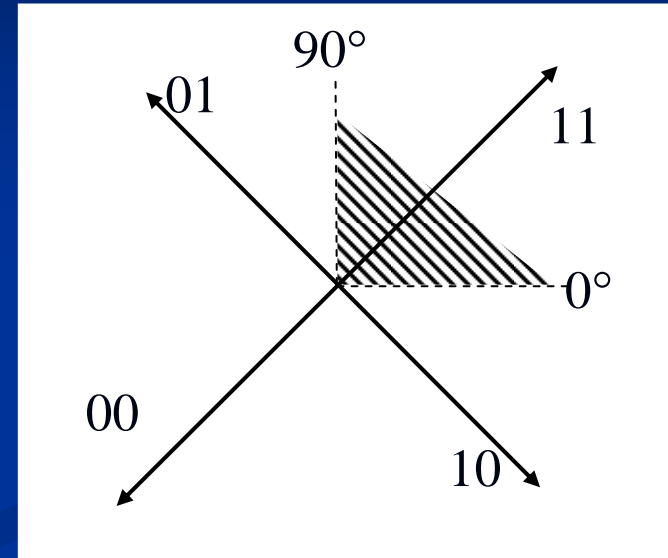
上式计算结果为：

$$P_e = 1 - \left[ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r/2} \right]^2$$

## ■ 误比特率

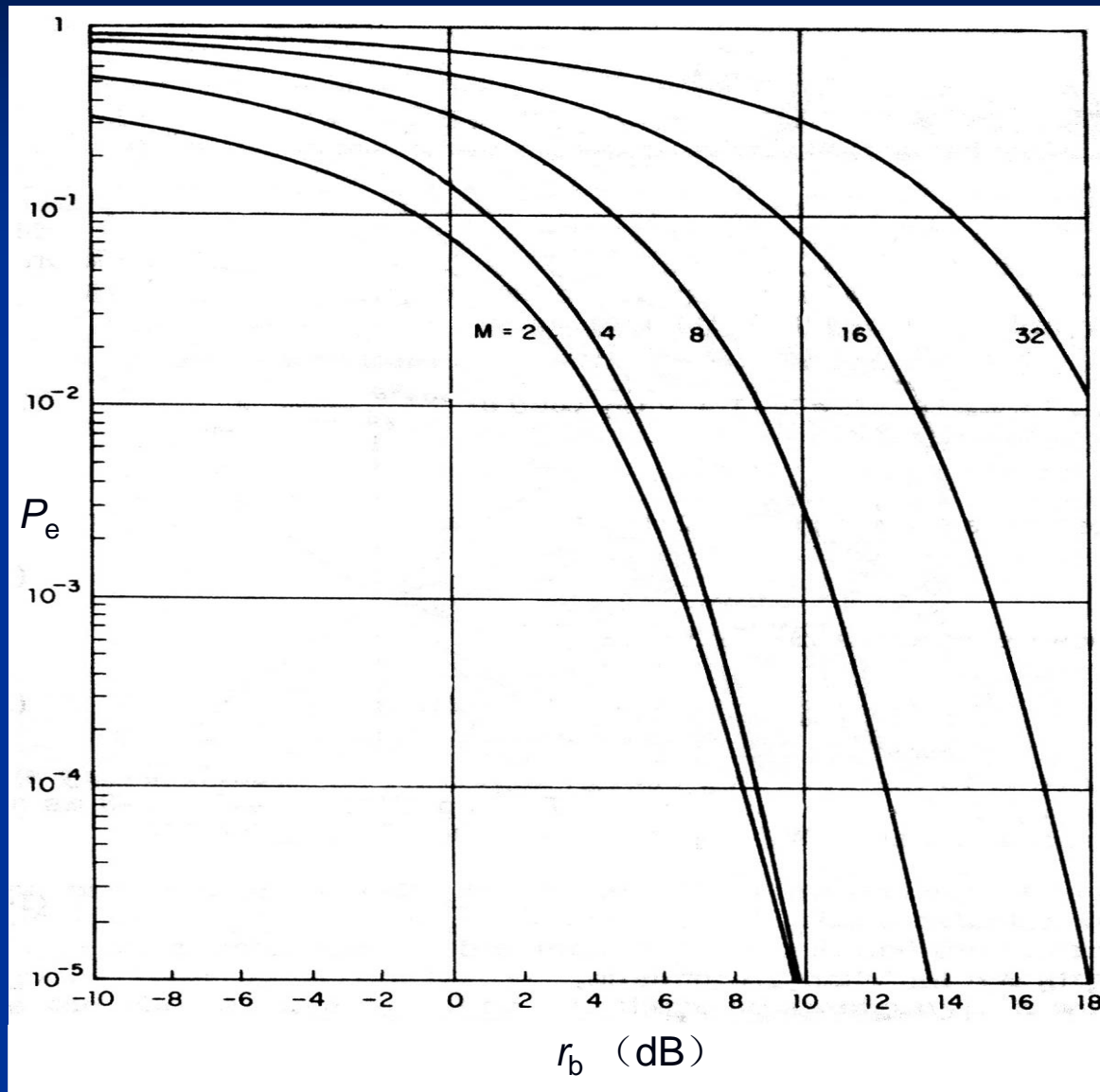
由解调方框图可见，

正交的两路相干解调方法和2PSK中采用的解调方法一样。所以其误比特率的计算公式也和2PSK的误码率公式一样。



➤ **MPSK**信号的误码率  
当信噪比 $r$ 足够大时,

$$P_e \approx e^{-r \sin^2(\pi/M)}$$



## 6.7.4 多进制差分相移键控(MDPSK)

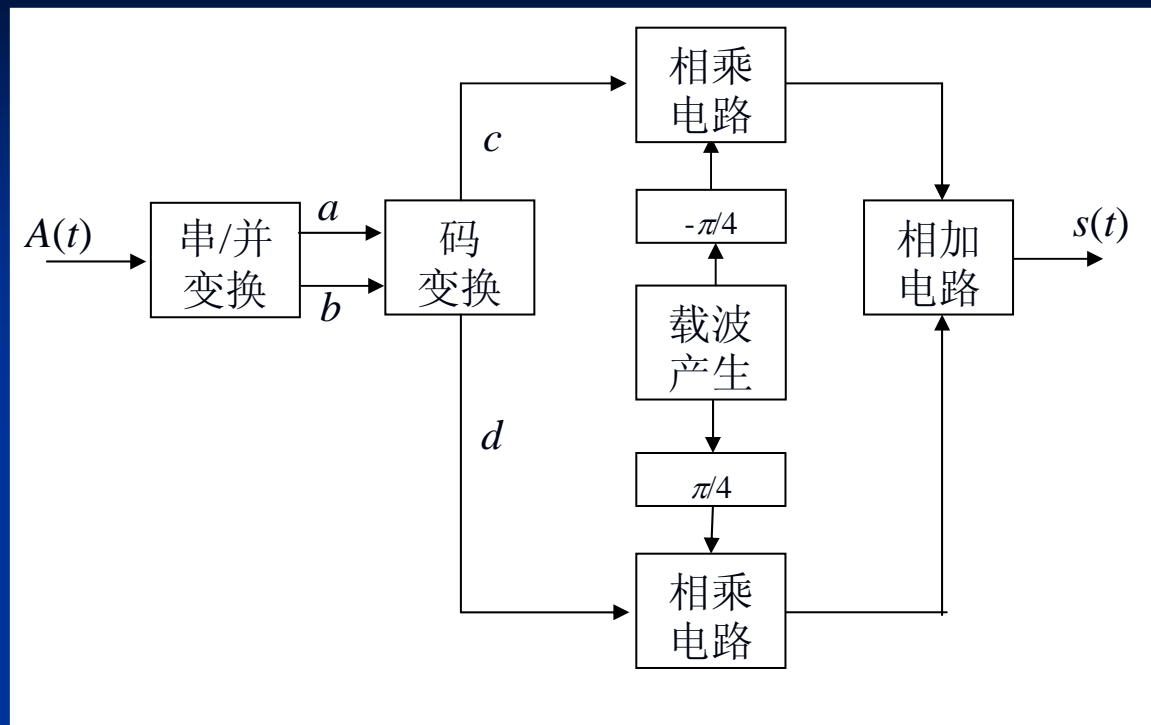
### ➤ 基本原理

以4进制DPSK(QDPSK)信号为例

$a$	$b$	$\Delta\theta_k$
		A方式
0	0	$0^\circ$
1	0	$90^\circ$
1	1	$180^\circ$
0	1	$270^\circ$

表中 $\Delta\theta_k$ 是相对于前一相邻码元的相位变化

## ➤ 产生方法



相乘的信号应该是不归零二进制双极性矩形脉冲“+1”和“-1”，对应关系是：

二进制码元“0” → “+1”  
二进制码元“1” → “-1” } A方式编码

## QDPSK码变换关系:

当前输入的一对码元及要求的相对相移		前一时刻经过码变换后的一对码元及所产生的相位		当前时刻应当给出的变换后一对码元和相位	
$a_k$	$b_k$	$c_{k-1}$	$d_{k-1}$	$c_k$	$d_k$
$\Delta\theta_k$		$\theta_{k-1}$		$\theta_k$	
0	0	0	0	1.0	0°
		1	0	1	90°
		1	1	1	180°
		0	1	0	270°
<b>1</b>	<b>0</b>	0	0	1	90°
	<b>90°</b>	1	0	1	180°
		<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>270°</b>
		0	1	0	<b>0°</b>
1	1	0	0	1	180°
	180°	1	0	0	270°
		1	1	0	0°
		0	1	1	90°
0	1	0	0	0	270°
	270°	1	0	0	0°
		1	1	1	90°
		0	1	1	180°

## ➤ 解调方法

### ■ 极性比较法

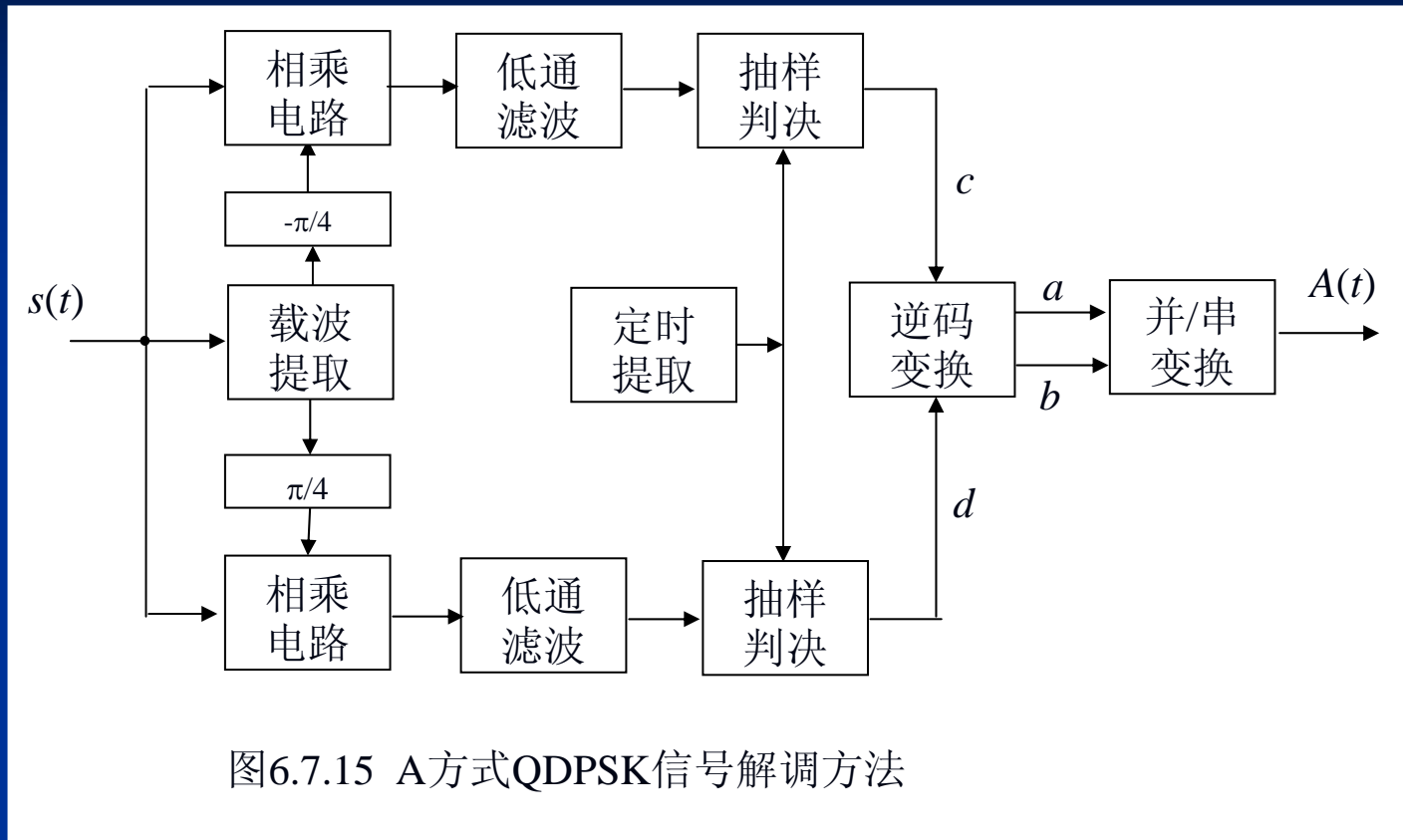


图6.7.15 A方式QDPSK信号解调方法

和QPSK信号极性比较法解调相似，只多一步逆码变换，将相对码变成绝对码。

## □ 码变换原理

设第 $k$ 个接收信号码元可以表示为

$$s_k(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_k) \quad kT < t \leq (k+1)T$$

相乘电路的相干载波

上支路:  $\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$

下支路:  $\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$

相乘电路输出:

上支路:  $\cos(\omega_0 t + \theta_k) \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cos \left[ 2\omega_0 t + (\theta_k - \frac{\pi}{4}) \right] + \frac{1}{2} \cos(\theta_k + \frac{\pi}{4})$

下支路:  $\cos(\omega_0 t + \theta_k) \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cos \left[ 2\omega_0 t + (\theta_k + \frac{\pi}{4}) \right] + \frac{1}{2} \cos(\theta_k - \frac{\pi}{4})$

经过低通滤波后, 上支路:  $\frac{1}{2} \cos(\theta_k + \frac{\pi}{4})$

下支路:  $\frac{1}{2} \cos(\theta_k - \frac{\pi}{4})$



## 判决规则：

“+” → 二进制码元“0”

“-” → 二进制码元“1”

信号码元相位 $\theta_k$	上支路输出	下支路输出	判决器输出	
			c	D
$0^\circ$	+	+	0	0
$90^\circ$	-	+	1	0
$180^\circ$	-	-	1	1
$270^\circ$	+	-	0	1

判决输出将送入逆码变换器恢复出绝对码。

设逆码变换器的当前输入码元为 $c_k$ 和 $d_k$ ，当前输出码元为 $a_k$ 和 $b_k$ ，前一输入码元为 $c_{k-1}$ 和 $d_{k-1}$ 。

# QDPSK逆码变换关系

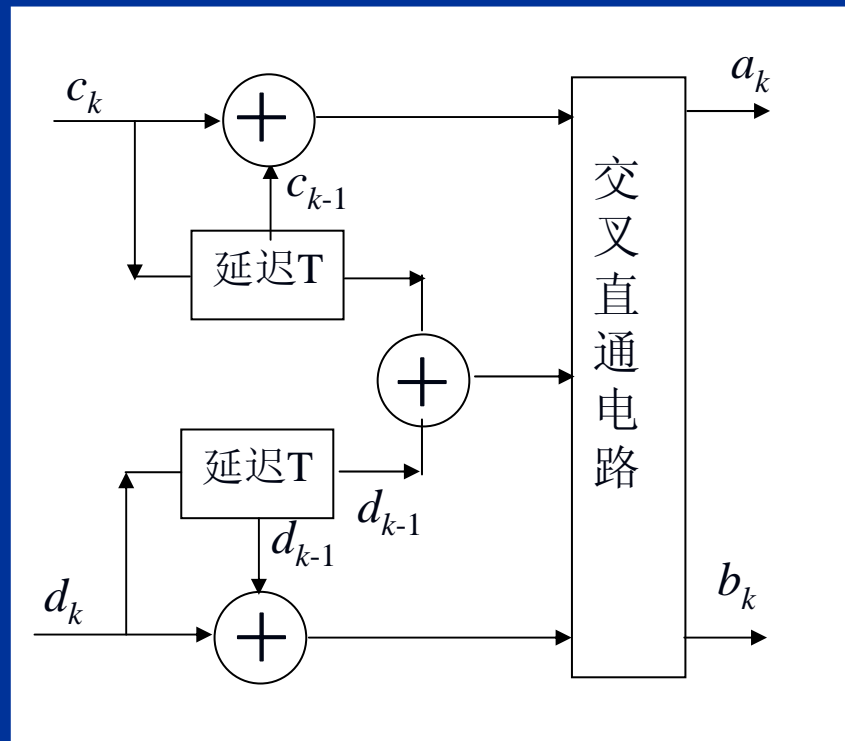
前一时刻输入的一对码元		当前时刻输入的一对码元		当前时刻应当给出的逆变换后的一对码元	
$c_{k-1}$	$d_{k-1}$	$c_k$	$d_k$	$a_k$	$b_k$
0	0	0	0	0	0
		0	1	0	1
		1	1	1	1
		1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
		0	1	0	0
		1	1	0	1
		1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
		0	1	1	0
		1	1	0	0
		1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
		0	1	1	1
		1	1	1	0
		1	0	0	0

上表中的码元关系可以分为两类：

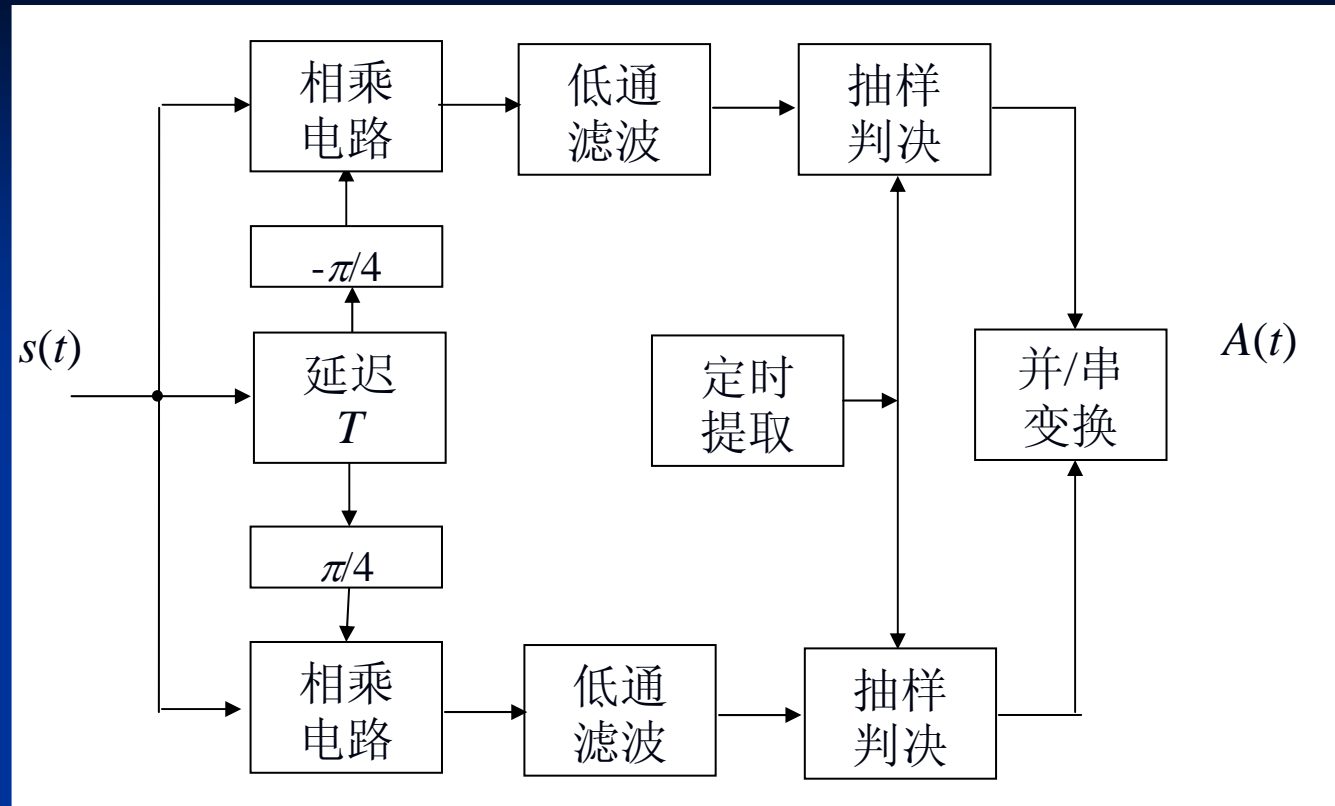
当  $c_{k-1} \oplus d_{k-1} = 0$  时，
$$\begin{cases} a_k = c_k \oplus c_{k-1} \\ b_k = d_k \oplus d_{k-1} \end{cases}$$

当  $c_{k-1} \oplus d_{k-1} = 1$  时，
$$\begin{cases} a_k = d_k \oplus d_{k-1} \\ b_k = c_k \oplus c_{k-1} \end{cases}$$

从上两式中画出逆码变换器的原理方框图如下：



## ■ 相位比较法



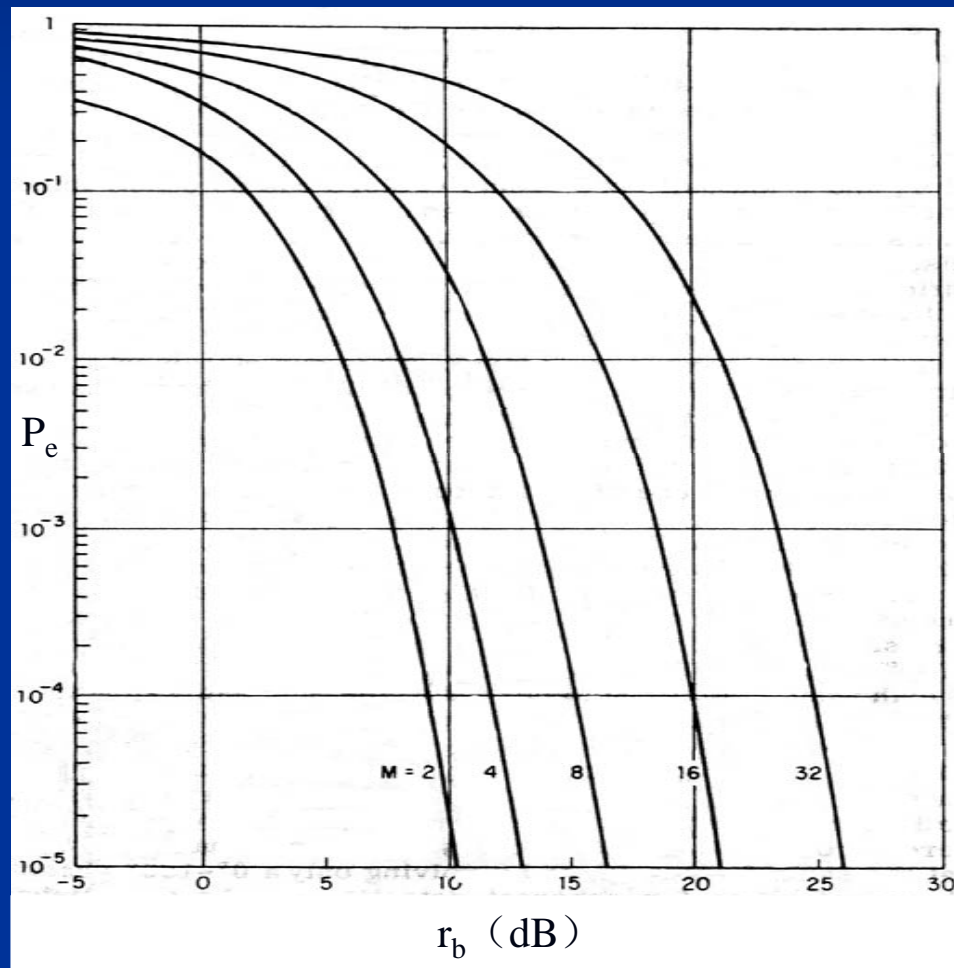
➤ 误码率

在大信噪比条件下，误码率计算公式为

$$P_e \approx e^{-2r \sin^2(\pi / 2M)}$$

当 $M = 4$ 时，上式变成

$$P_e \approx e^{-2r \sin^2(\pi / 8)}$$



## 6.7.5 振幅相位联合键控(APK)

- **APK**信号的振幅和相位独立地同时受到调制：

$$s_k(t) = A_k \cos(\omega_0 t + \theta_k) \quad kT < t \leq (k+1)T$$

式中， $k =$  整数； $A_k$ 和 $\theta_k$ 分别可以取多个离散值。

上式可以展开为

$$s_k(t) = A_k \cos \theta_k \cos \omega_0 t - A_k \sin \theta_k \sin \omega_0 t$$

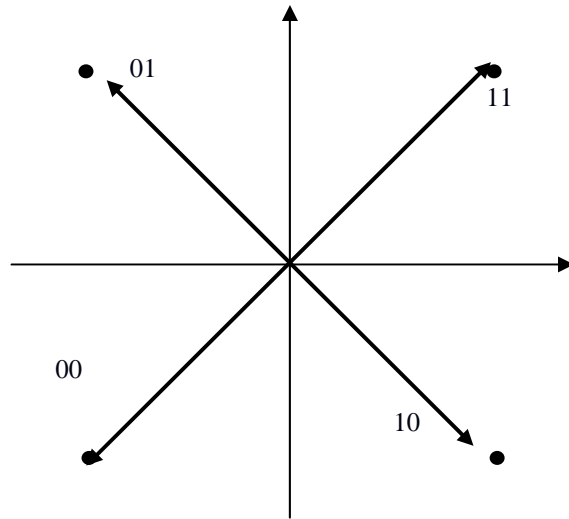
令  $\left. \begin{array}{l} X_k = A_k \cos \theta_k \\ Y_k = -A_k \sin \theta_k \end{array} \right\}$  代入上式，得到

$$s_k(t) = X_k \cos \omega_0 t + Y_k \sin \omega_0 t$$

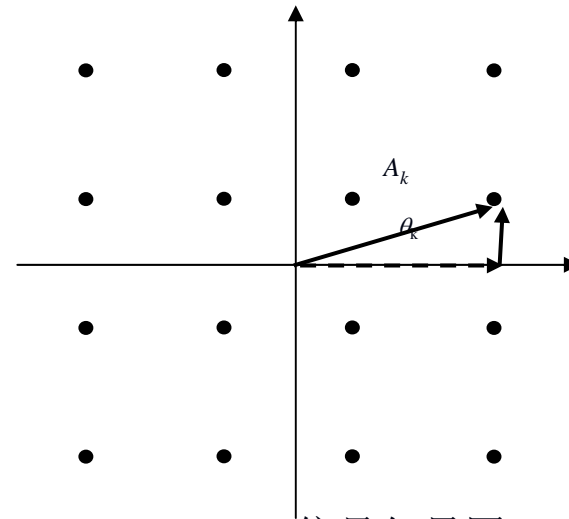
从上式看出， $s_k(t)$ 可以看作是两个正交的振幅键控信号之和  
若 $\theta_k$ 值取 $0^\circ$ 和 $90^\circ$ ， $A_k$ 值取 $+A$ 和 $-A$ ，则

**APK信号  $\rightarrow$  QPSK信号 = 4QAM信号**

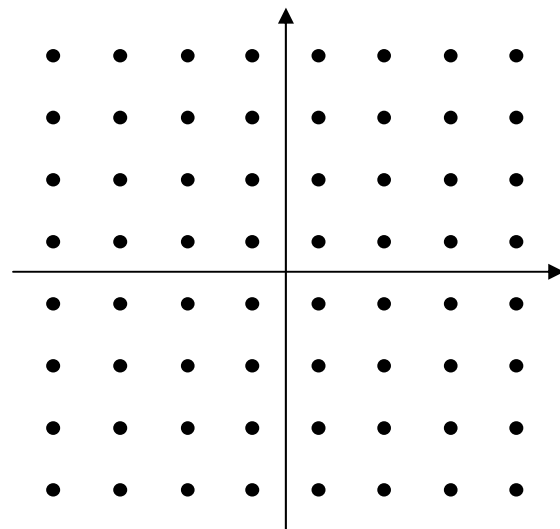
# MQAM又称星座调制



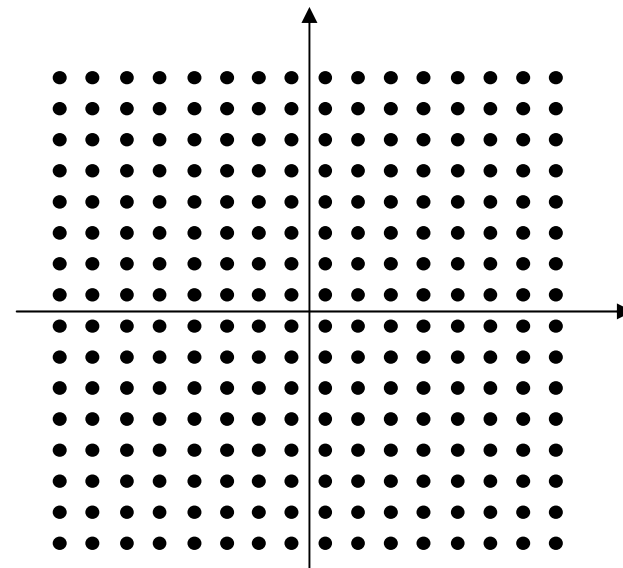
(a) 4QAM信号矢量图



(b) 16QAM信号矢量图



(c) 64QAM信号矢量图



(d) 256QAM信号矢量图

- 16QAM信号的产生方法

- 正交调幅法
- 复合相移法

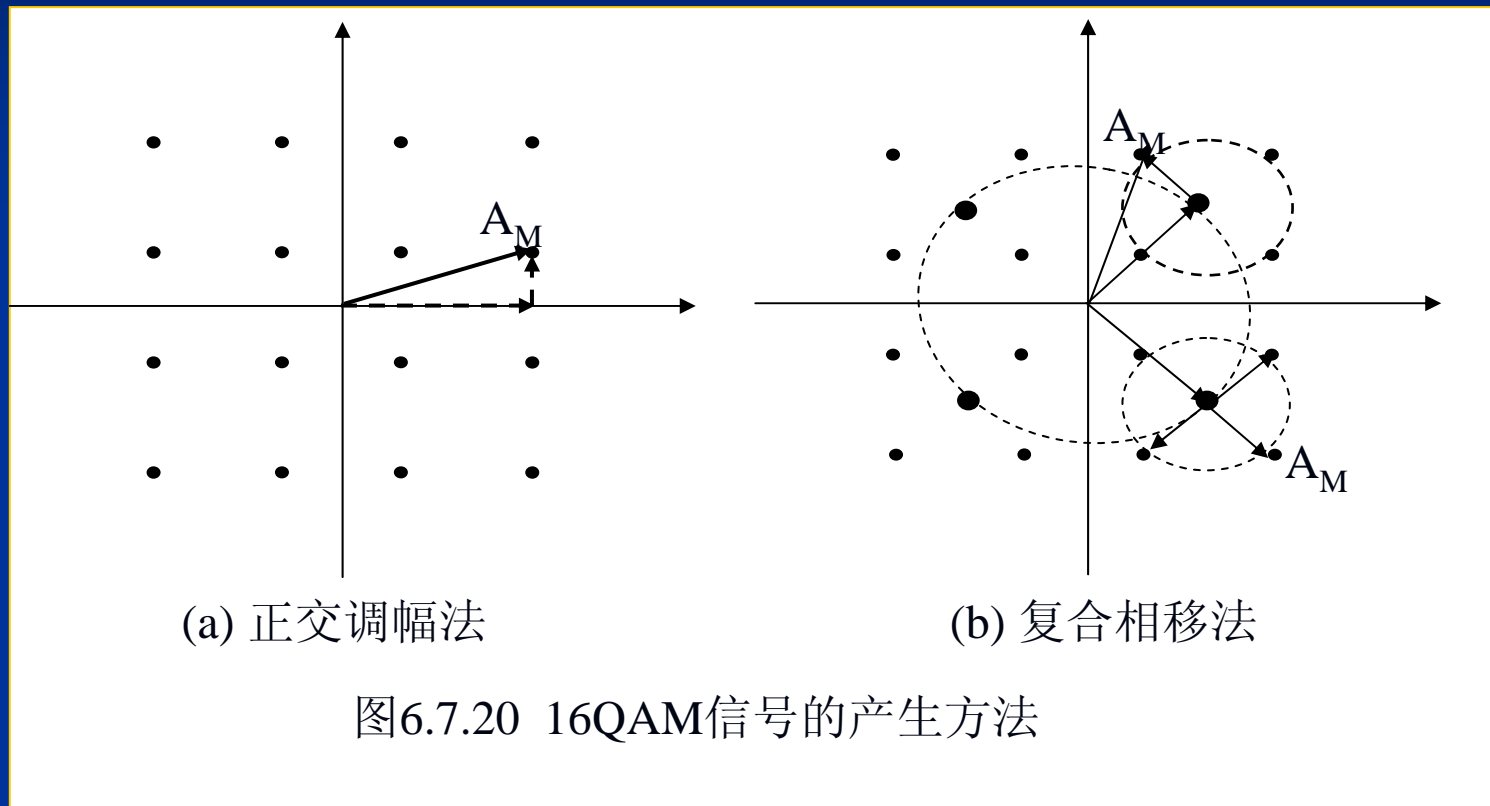
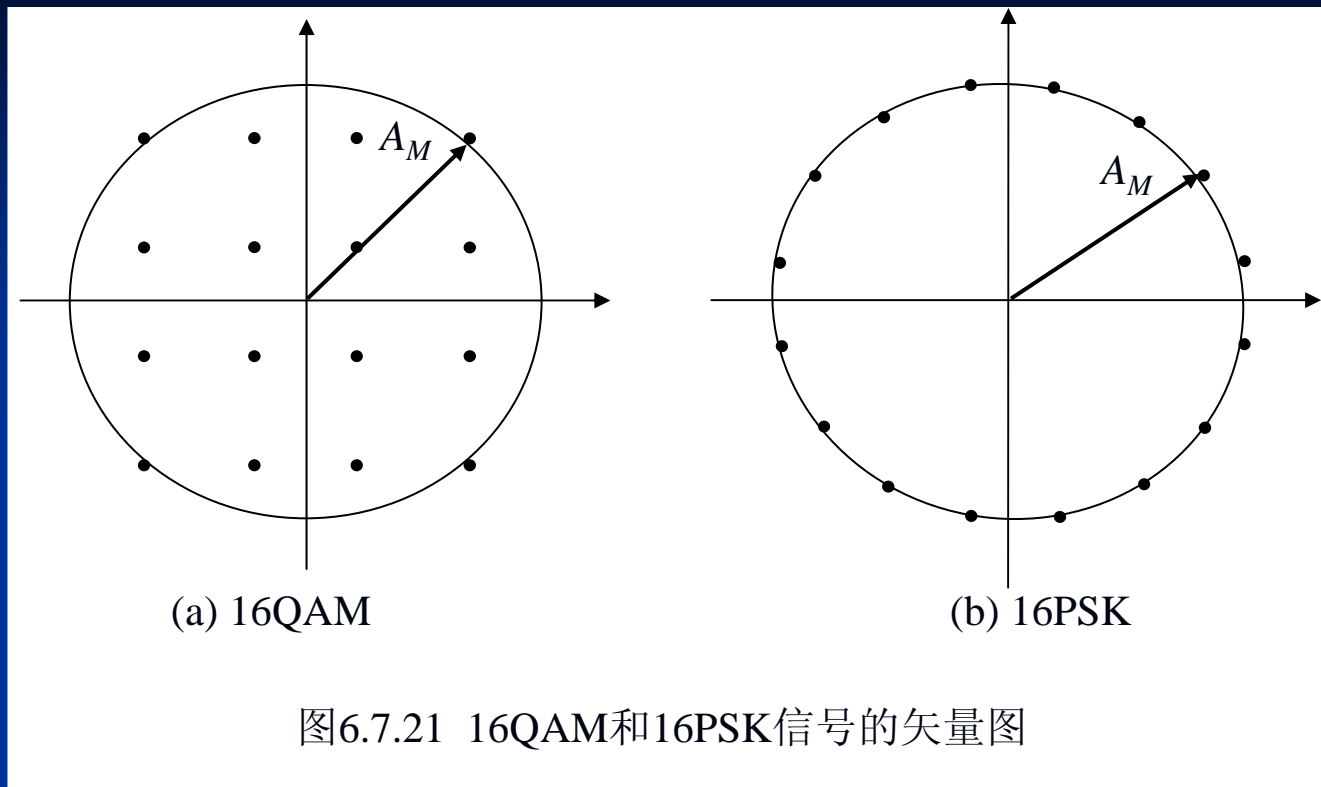


图6.7.20 16QAM信号的产生方法



• 16QAM信号和16PSK信号的误码率



➤ 16PSK信号的相邻点距离:

$$d_1 \approx A_M \left( \frac{\pi}{8} \right) = 0.393 A_M$$

➤ 16QAM信号的相邻点距离:

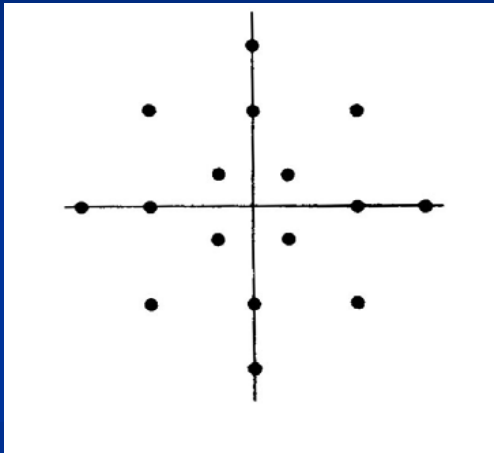
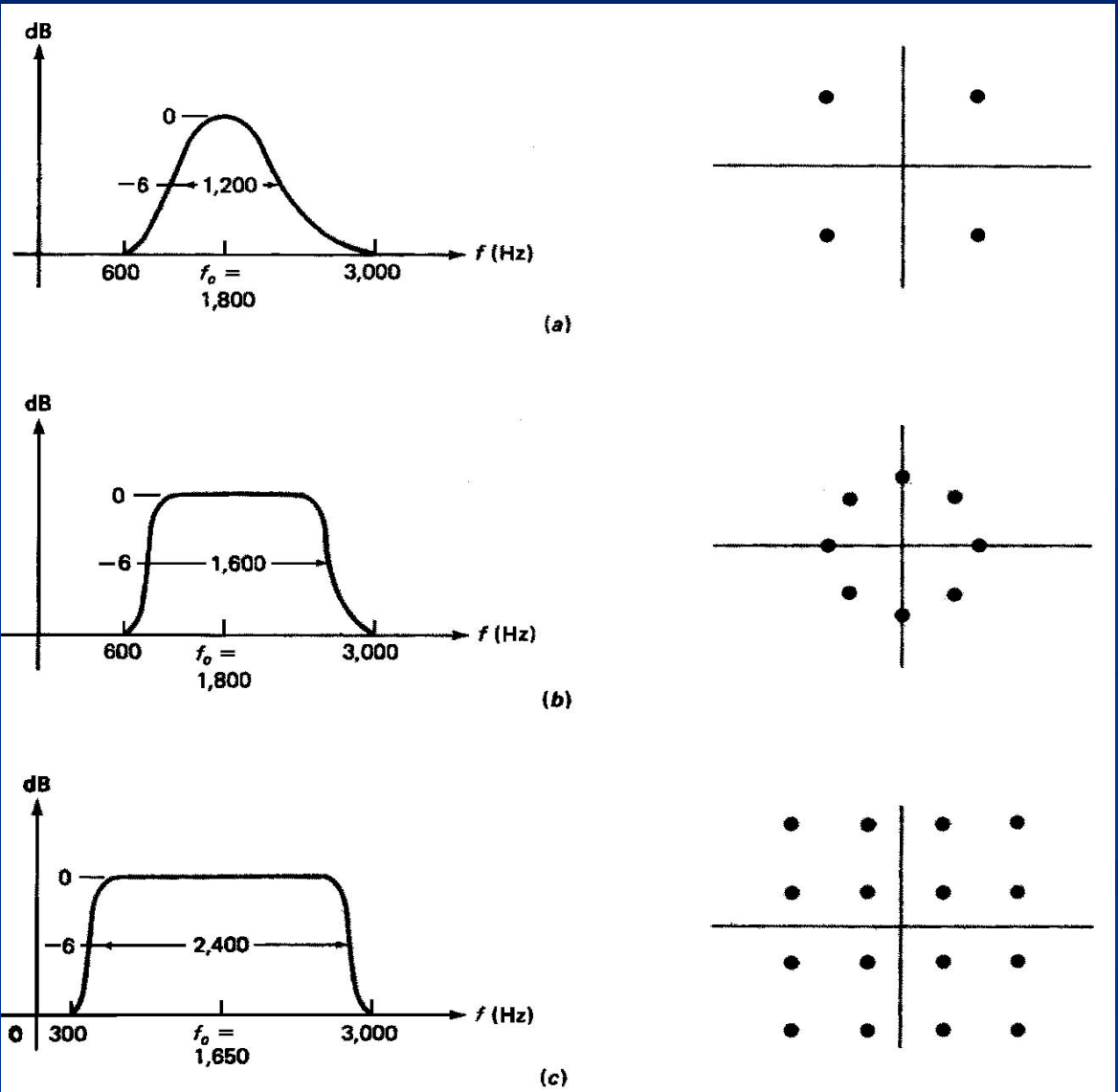
$$d_2 = \frac{\sqrt{2}A_M}{3} = 0.471A_M$$

按上两式计算， $d_2$ 超过 $d_1$ 约**1.57 dB**，但没有考虑两者的平均功率差别。

在平均功率相等条件下，**16QAM**比**16PSK**信号的噪声容限大**4.12 dB**。

## 6.7.6 多进制数字键控实用系统举例

- 几种调制解调器采用的调制体制的星座图和频谱：
- 一种改进的9600 b/s速率方案



## 6.8 小结