

# 第二章 信号

## 2.1 信号的类型

### 2.1.1 确知信号和随机信号

- 什么是确知信号
- 什么是随机信号

### 2.1.2 能量信号和功率信号

- 信号的功率：设  $R = 1$ , 则  $P = V^2/R = I^2R = V^2 = I^2$
- 信号的能量：设  $S$  代表  $V$  或  $I$ , 若  $S$  随时间变化, 则写为  $s(t)$ , 于是, 信号的能量  $E = \int s^2(t)dt$
- 能量信号：满足  $0 < E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt < \infty$
- 平均功率： $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt$ , 故能量信号的  $P = 0$ 。
- 功率信号： $P \neq 0$  的信号, 即持续时间无穷的信号。
- 能量信号的能量有限, 但平均功率为 0。
- 功率信号的平均功率有限, 但能量为无穷大。

$$C(jn\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

## 2.2 确知信号的性质

### 2.2.1 频域性质

- 功率信号的频谱：设 $s(t)$ 为周期性功率信号， $T_0$ 为周期，则有

$$C(jn\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

式中， $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi f_0$

∵  $C(jn\omega_0)$ 是复数，∴  $C(jn\omega_0) = |C_n| e^{j\theta_n}$

式中， $|C_n|$  — 频率为 $nf_0$ 的分量的振幅；

$\theta_n$  — 频率为 $nf_0$ 的分量的相位。

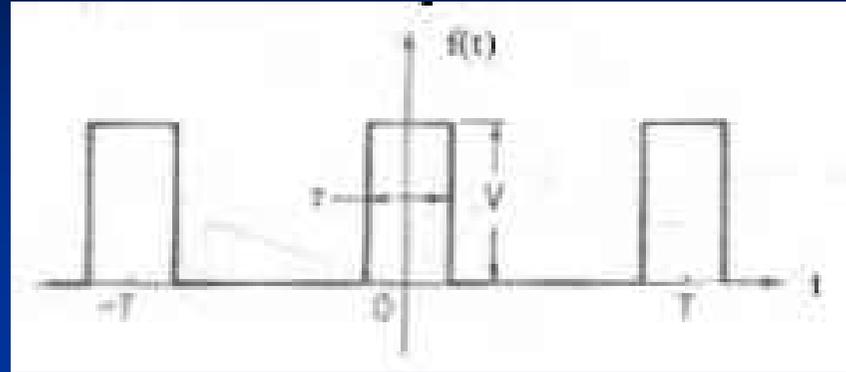
➤ 信号 $s(t)$ 的傅里叶级数表示法：

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

【例2.1】 试求周期性方波的频谱。

解： 设一周期性方波的周期为  $T$ ， 宽度为  $\tau$ ， 幅度为  $V$

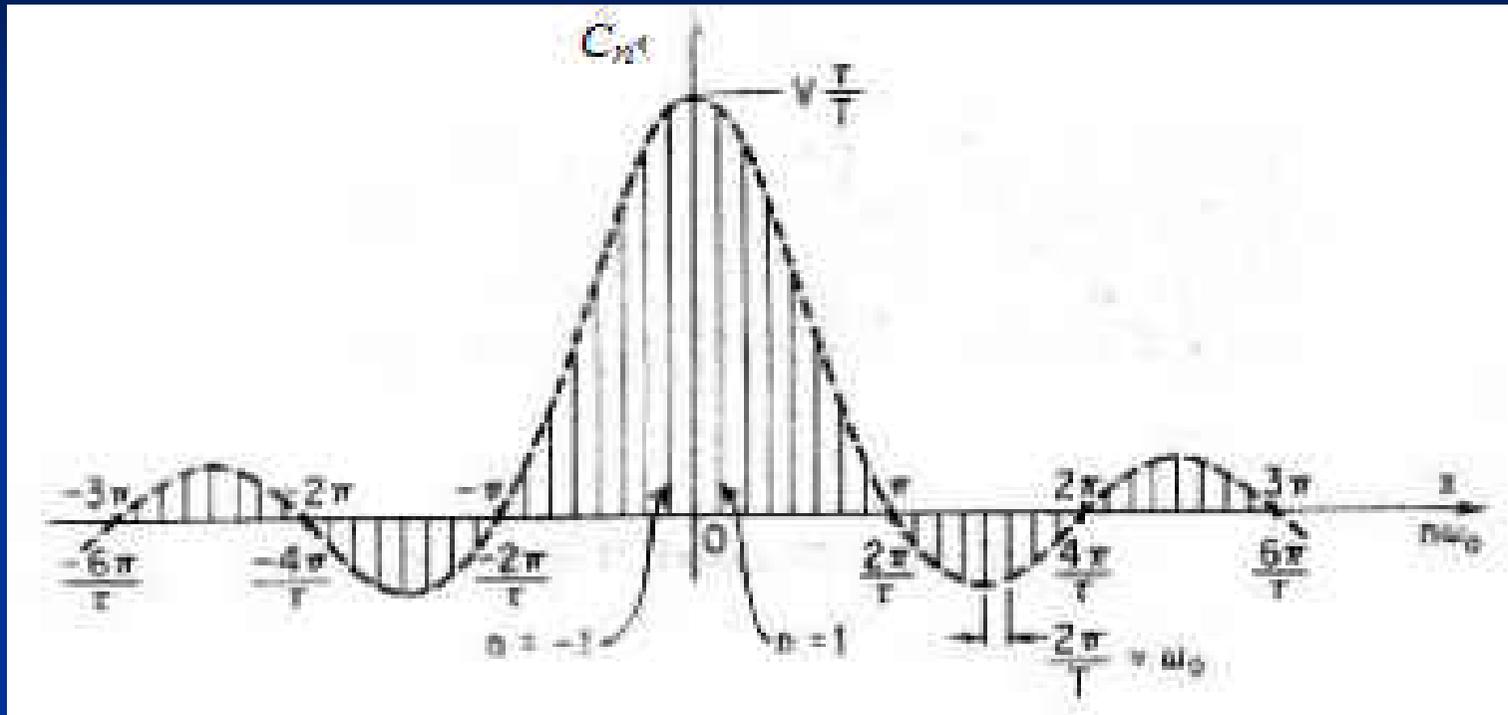
$$f(t) = \begin{cases} V & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \tau/2 < t < (T - \tau/2) \end{cases}$$
$$f(t) = f(t - T) \quad -\infty < t < \infty$$



求频谱：

$$C(jn\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left[ -\frac{V}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$
$$= \frac{V}{T} \times \frac{e^{jn\omega_0 \tau/2} - e^{-jn\omega_0 \tau/2}}{jn\omega_0} = \frac{2V}{n\omega_0 T} \times \sin n\omega_0 \frac{\tau}{2}$$

# 频谱图



【例2.2】试求全波整流后的正弦波的频谱。

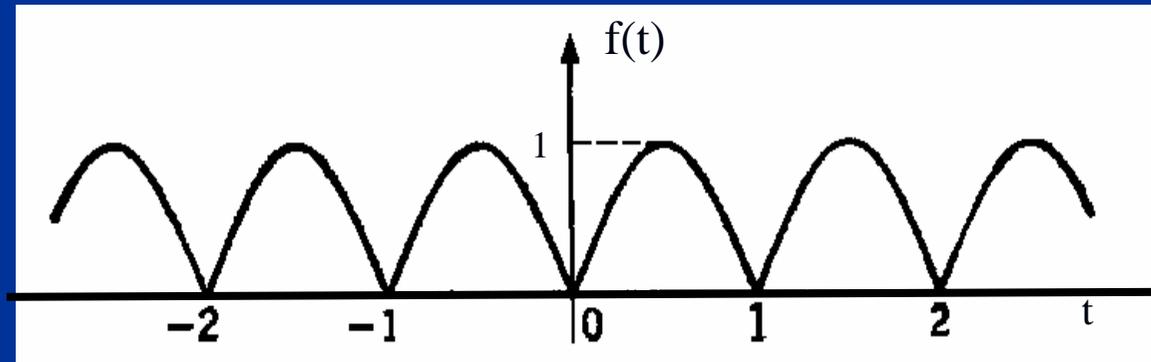
解：设此信号的表示式为

$$f(t) = \sin(\pi t) \quad 0 < t \leq 1$$

$$f(t) = f(t-1) \quad -\infty < t < +\infty$$

求频谱：

$$C(jn\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^1 \sin(\pi t)e^{-j2\pi n t} dt = \frac{-2}{\pi(4n^2 - 1)}$$



信号的傅里叶级数表示式：

$$f(t) = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{j2\pi n t}$$

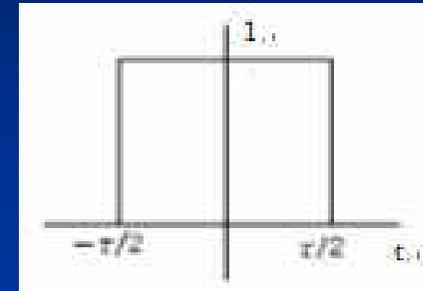
- 能量信号的频谱密度

设一能量信号为 $s(t)$ ，则其频谱密度为：

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

$S(\omega)$ 的逆变换为原信号：

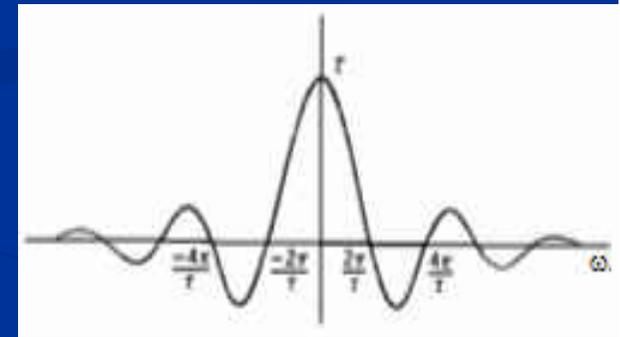
$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} dt$$



【例2.3】试求一个矩形脉冲的频谱密度。

解：设此矩形脉冲的表示式为

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau / 2 \\ 0 & |t| > \tau / 2 \end{cases}$$



则它的频谱密度就是它的傅里叶变换：

$$G(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

【例2.4】试求抽样函数的波形和频谱密度。

解：抽样函数的定义是

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

而Sa(t)的频谱密度为：

$$\text{Sa}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} \pi & -1 \leq \omega \leq +1 \\ 0 & \text{其他处} \end{cases}$$

和上例比较可知，Sa(t)的波形和上例中的G(ω)曲线相同，而Sa(t)的频谱密度Sa(ω)的曲线和上例中的g(t)波形相同。

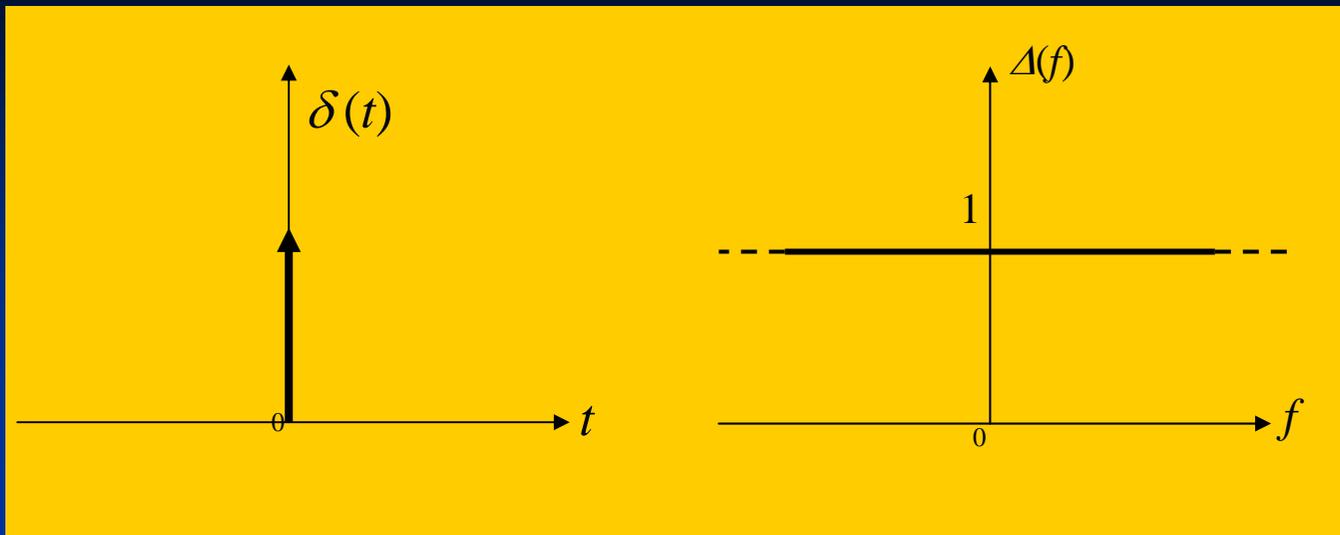
【例2.5】单位冲激函数及其频谱密度。

解：单位冲激函数常简称为δ函数，其定义是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$
$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

δ(t)的频谱密度：
$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

➤ Sa(t) 及其频谱密度的曲线:



➤ δ函数的物理意义:

高度为无穷大, 宽度为无穷小, 面积为1的脉冲。

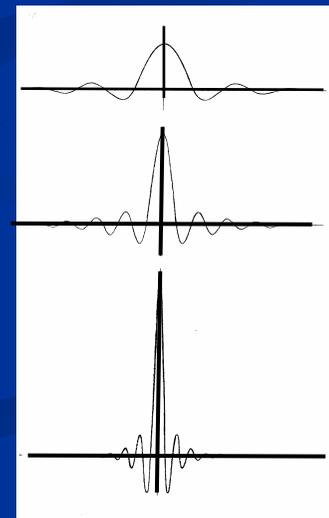
➤ 用抽样函数Sa(t)表示δ函数: Sa(t)有如下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi} Sa(kt) dt = 1$$

当  $k \rightarrow \infty$  时, 振幅  $\rightarrow \infty$ ,  
波形的零点间隔  $\rightarrow 0$ ,

故有

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} Sa(kt)$$



## ➤ $\delta$ 函数的性质

■ 对 $f(t)$ 的抽样:  $f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt$

■  $\delta$ 函数是偶函数:  $\delta(t) = \delta(-t)$   $f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0-t)dt$

■  $\delta$ 函数是单位阶跃函数的导数:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t < 0, \\ 1, & \text{当 } t \geq 0 \end{cases}$$

$$u'(t) = \delta(t)$$

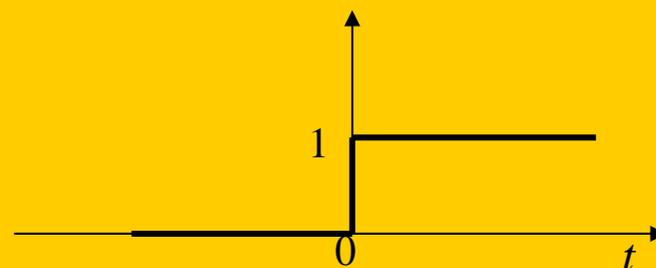


图2.2.6 单位阶跃函数

## ➤ 能量信号的频谱密度 $S(f)$ 和功率信号的频谱 $C(jn\omega_0)$ 的区别:

■  $S(f)$  — 连续谱;  $C(jn\omega_0)$  — 离散谱

■  $S(f)$ 的单位:  $V/Hz$ ;  $C(jn\omega_0)$ 的单位:  $V$

■  $S(f)$ 在一频率点上的幅度=无穷小。

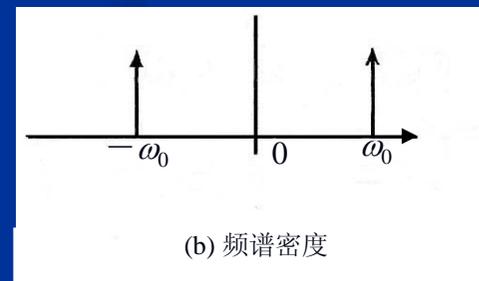
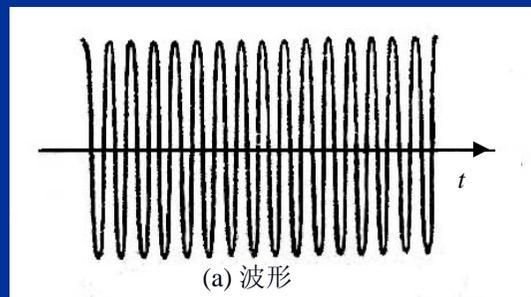
【例2.6】试求无限长余弦波的频谱密度。

解：设一个余弦波的表示式为  $f(t) = \cos\omega_0 t$ ，则其频谱密度  $F(\omega)$  按式(2.2-10)计算，可以写为

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos\omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)\tau/2]}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right\}$$
$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2} \left\{ Sa \left[ \frac{\tau(\omega - \omega_0)}{2} \right] + Sa \left[ \frac{\tau(\omega + \omega_0)}{2} \right] \right\}$$

参照式(2.2-7)，上式可以改写为

$$F(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



➤ 引入  $\delta(t)$ ，就能将频谱密度概念推广到功率信号上。

## ● 能量谱密度

设一个能量信号  $s(t)$  的能量为  $E$ ，则其能量由下式决定：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

若此信号的频谱密度，为  $S(f)$ ，则由巴塞伐尔定理得知：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

上式中  $|S(f)|^2$  称为能量谱密度，也可以看作是单位频带内的信号能量。上式可以改写为：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df$$

式中， $G(f) = |S(f)|^2$  (J / Hz) 为能量谱密度。

➤  $G(f)$  的性质：因  $s(t)$  是实函数，故  $|S(f)|^2$  是偶函数， $\therefore$

$$E = 2 \int_0^{\infty} G(f) df$$

## ● 功率谱密度

令 $s(t)$ 的截短信号为 $s_T(t)$ ,  $-T/2 < t < T/2$ , 则有

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} |S_T(f)|^2 df$$

定义功率谱密度为:  $P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_T(f)|^2$

得到信号功率:  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |S_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df$

## 2.2.2 时域性质

- 自相关函数

- 能量信号的自相关函数定义:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt \quad -\infty < \tau < \infty$$

- 功率信号的自相关函数定义:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t+\tau)dt \quad -\infty < \tau < \infty$$

- 性质:

- $R(\tau)$ 只和  $\tau$  有关, 和  $t$  无关
- 当  $\tau = 0$  时, 能量信号的  $R(\tau)$  等于信号的能量;  
功率信号的  $R(\tau)$  等于信号的平均功率。

## • 互相关函数

➤ 能量信号的互相关函数定义:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \quad -\infty < \tau < \infty$$

➤ 功率信号的互相关函数定义:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \quad -\infty < \tau < \infty$$

➤ 性质:

■  $R_{12}(\tau)$  只和  $\tau$  有关, 和  $t$  无关;

■  $R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$

证: 令  $x = t + \tau$ , 则

$$\begin{aligned} R_{21}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)s_1(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(x-\tau)s_1(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x)s_2[x+(-\tau)]dx = R_{12}(-\tau) \end{aligned}$$

## 2.3 随机信号的性质

### 2.3.1 随机变量的概率分布

- 随机变量的概念：若某种试验 $A$ 的随机结果用 $X$ 表示，则称此 $X$ 为一个随机变量，并设它的取值为 $x$ 。例如，在一定时间内电话交换台收到的呼叫次数是一个随机变量。
- 随机变量的分布函数：
  - 定义： $F_X(x) = P(X \leq x)$
  - 性质： $\because P(a < X \leq b) + P(X \leq a) = P(X \leq b),$   
 $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a),$   
 $\therefore P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

➤ 离散随机变量的分布函数:

- 设 $X$ 的取值为:  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq x_n$ , 其取值的概率分别为 $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$ , 则有

$$P(X < x_1) = 0, \quad P(X \leq x_n) = 1$$

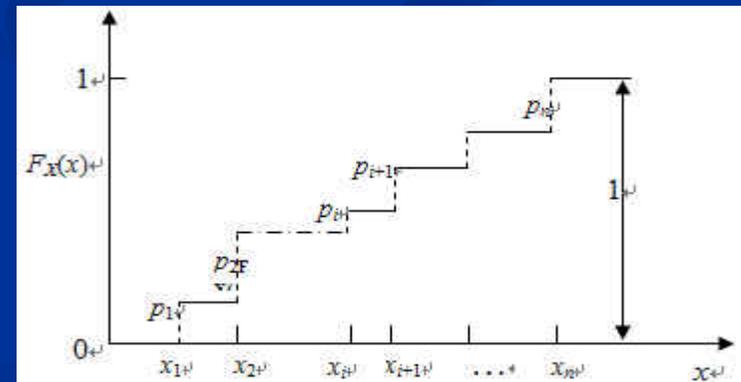
- $\therefore P(X \leq x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_i),$

$\therefore$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \sum_{k=1}^i p_k & x_1 \leq x < x_{i+1} \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

■ 性质:

- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_X(+\infty) = 1$
- 若 $x_1 < x_2$ , 则有:  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ ,  
为单调增函数。

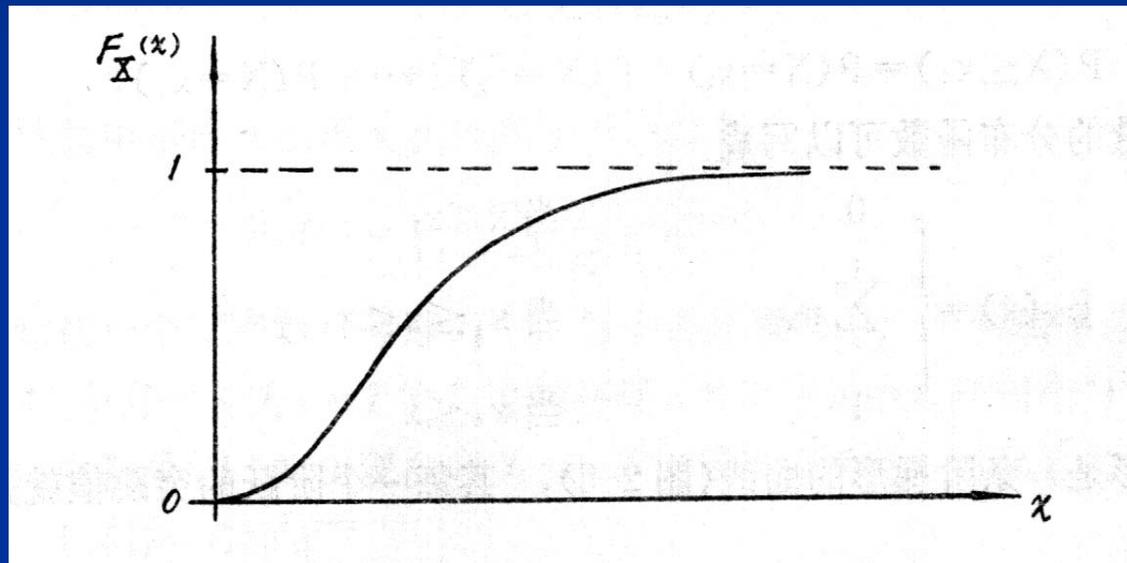


➤ 连续随机变量的分布函数:

当 $x$ 连续时, 由定义分布函数定义

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

可知,  $F_X(x)$  为一连续单调递增函数:



## 2.3.2 随机变量的概率密度

- 连续随机变量的概率密度 $p_X(x)$

➤  $p_X(x)$ 的定义: 
$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

➤  $p_X(x)$ 的意义:

- $p_X(x)$ 是 $F_X(x)$ 的导数, 是 $F_X(x)$ 曲线的斜率
- 能够从 $p_X(x)$ 求出 $P(a < X \leq b)$ :

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b p_X(x) dx$$

➤  $p_X(x)$ 的性质:

- $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y) dy$$

- $$p_X(x) \geq 0$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$$

- 离散随机变量的概率密度

离散随机变量的分布函数可以写为:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^n p_i u(x - x_i)$$

式中,  $p_i$  —  $x = x_i$  的概率

$u(x)$  — 单位阶跃函数

将上式两端求导, 得到其概率密度:

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i)$$

➤ 性质:

当  $x \neq x_i$  时,  $p_X(x) = 0$ ,

当  $x = x_i$  时,  $p_X(x) = \infty$

## 2.4 常见随机变量举例

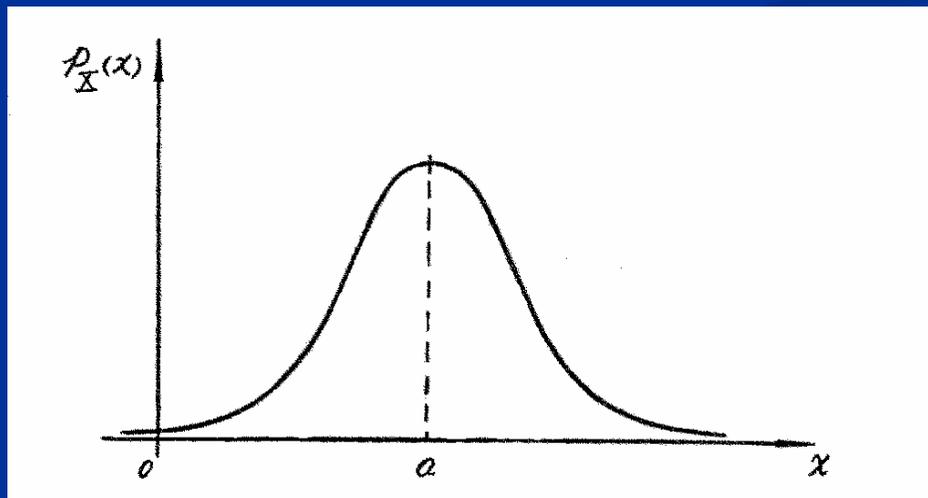
- 正态分布随机变量

- 定义：概率密度

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

式中， $\sigma > 0$ ,  $a = \text{常数}$

- 概率密度曲线：



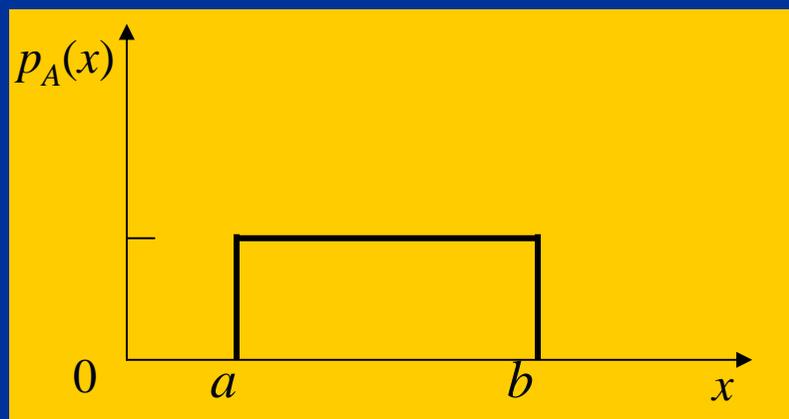
## ● 均匀分布随机变量

➤ 定义：概率密度

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

式中， $a$ ， $b$ 为常数

➤ 概率密度曲线：



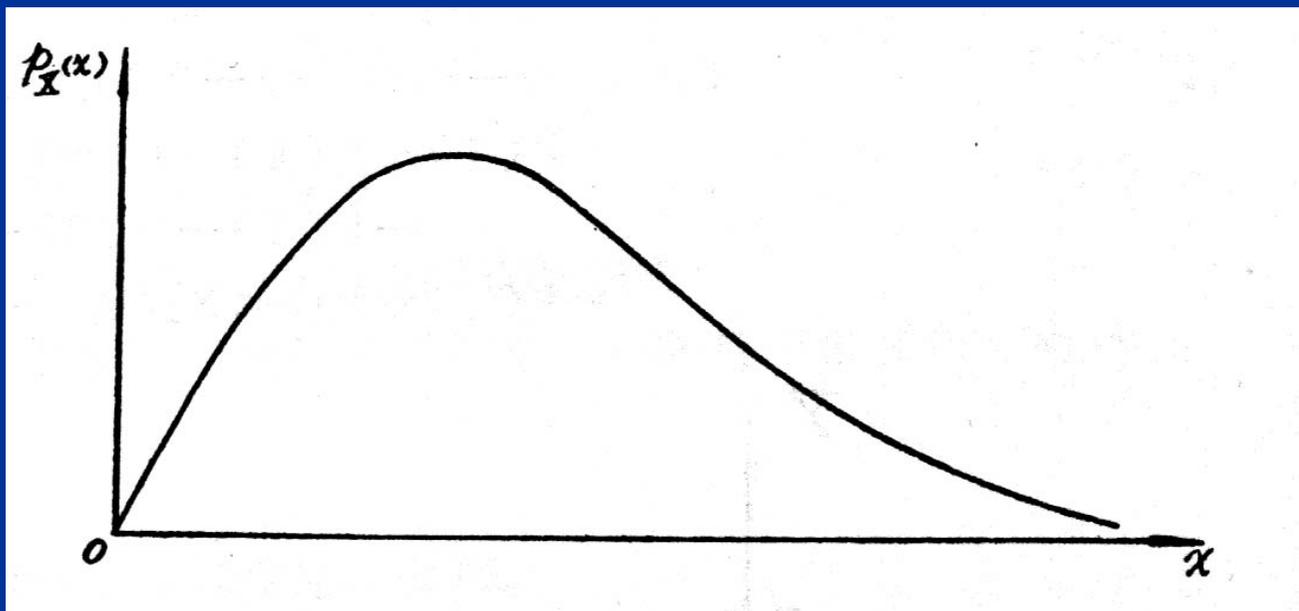
## ● 瑞利(Rayleigh)分布随机变量

➤ 定义：概率密度为

$$p_X(x) = \frac{2x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \quad x \geq 0$$

式中， $a > 0$ ，为常数。

➤ 概率密度曲线：



## 2.5 随机变量的数字特征

### 2.5.1 数学期望

- 定义：对于连续随机变量

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx$$

- 性质：

- $E(C) = C$

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

- $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$

- $E(C + X) = C + E(X)$

- $E(XY) = E(X)E(Y)$

若 $X$ 和 $Y$ 互相独立，且 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 存在。

- $E(CX) = CE(X)$

## 2.5.2 方差

• 定义:  $D(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \bar{X})^2]$

式中,  $\sigma_X$ —标准偏差,  $\bar{X}$ — $X$ 的数学期望

➤ 方差的改写:  $D(X) = \overline{X^2} - \bar{X}^2$

证:  $E[(X - \bar{X})^2] = E[X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2] = \overline{X^2} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$

➤ 对于离散随机变量,  $D(X) = \sum_i (x_i - \bar{X})^2 p_i$

➤ 对于连续随机变量,  $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 p_X(x) dx$

• 性质:

➤  $D(C) = 0$

➤  $D(X+C) = D(X)$ ,  $D(CX) = C^2 D(X)$

➤  $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

➤  $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$

## 2.5.3 矩

- 定义：随机变量 $X$ 的 $k$ 阶矩为  $E[(X - a)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k p_X(x) dx$

➤  $k$ 阶原点矩： $a = 0$ 时的矩：

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_X(x) dx$$

➤  $k$ 阶中心矩： $a = \bar{X}$ 时的矩：

$$M_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^k p_X(x) dx$$

- 性质：

➤ 一阶原点矩为数学期望： $m_1(X) = E(X)$

➤ 二阶中心矩为方差： $M_2(X) = D(X) = \sigma_X^2$

## 2.6 随机过程

### 2.6.1 随机过程的基本概念

- $X(A, t)$  — 事件A的全部可能“实现”的总体;
- $X(A_i, t)$  — 事件A的一个实现, 为确定的时间函数;
- $X(A, t_k)$  — 在给定时刻 $t_k$ 上的函数值。

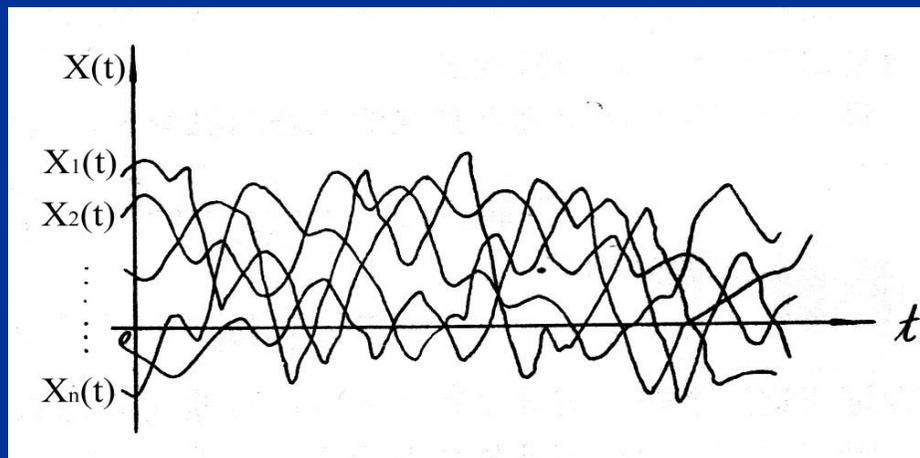
➢ 简记:  $X(A, t) \rightarrow X(t)$   
 $X(A_i, t) \rightarrow X_i(t)$

- 例: 接收机噪声
- 随机过程的数字特征:
  - 统计平均值:

$$E[X(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{X_i}(x)dx = m_X(t_i)$$

➢ 方差:  $D[X(t_i)] = E\{X(t_i) - E[X(t_i)]\}^2$

➢ 自相关函数:  $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$



## 2.6.2 平稳随机过程

- 平稳随机过程的定义：  
统计特性与时间起点无关的随机过程。  
(又称严格平稳随机过程)
- 广义平稳随机过程的定义：  
平均值、方差和自相关函数等与时间起点无关的随机过程。
- 广义平稳随机过程的性质：
  - $E[X(t)] = m_X = \text{常数}$
  - $D[X(t)] = E\{X(t) - E[X(t)]\}^2 = \sigma_X^2 = \text{常数}$
  - $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) \quad \tau = t_1 - t_2$
- 严格平稳随机过程一定也是广义平稳随机过程。但是，广义平稳随机过程就不一定是严格平稳随机过程。

## 2.6.3 各态历经性

- “各态历经”的含义：

平稳随机过程的一个实现能够经历此过程的所有状态。

- 各态历经过程的特点：可用时间平均值代替统计平均值，例
  - 各态历经过程的统计平均值 $m_X$ ：

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_i(t) dt$$

- 各态历经过程的自相关函数 $R_X(\tau)$ ：

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_i(t) X_i(t + \tau) dt$$

- 一个随机过程若具有各态历经性，则它必定是严格平稳随机过程。但是，严格平稳随机过程就不一定具有各态历经性。

- 稳态通信系统的各态历经性：

假设信号和噪声都是各态历经的。

- 一阶原点矩  $m_X = E[X(t)]$  — 是信号的直流分量；
- 一阶原点矩的平方  $m_X^2$  — 是信号直流分量的归一化功率；
- 二阶原点矩  $E[X^2(t)]$  — 是信号归一化平均功率；
- 二阶原点矩的平方根  $\{E[X^2(t)]\}^{1/2}$  — 是信号电流或电压的均方根值（有效值）；
- 二阶中心矩  $\sigma_X^2$  — 是信号交流分量的归一化平均功率；
- 若  $m_X = m_X^2 = 0$ ，则  $\sigma_X^2 = E[X^2(t)]$ ；
- 标准偏离  $\sigma_X$  — 是信号交流分量的均方根值；
- 若  $m_X = 0$ ，则  $\sigma_X$  就是信号的均方根值。

## 2.6.4 平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度

- 自相关函数的性质

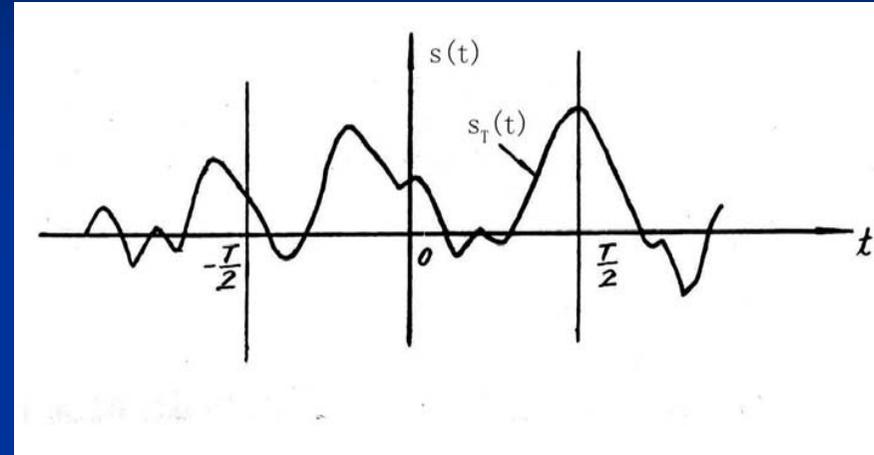
- $R(0) = E[X^2(t)] = P_X$

- $R(\tau) = R(-\tau)$

- $|R(\tau)| \leq R(0)$

- $R(\infty) = E^2[X(t)]$

- $R(0) - R(\infty) = \sigma_X^2$



- 功率频谱密度的性质

- 复习：确知信号的功率谱密度： $P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f)|^2}{T}$

- 类似地，平稳随机过程的功率谱密度为：

$$P_X(f) = E[P(f)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E|S_T(f)|^2}{T}$$

- 平均功率： $P_X = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|S_T(f)|^2]}{T} df$

- 自相关函数和功率谱密度的关系

由

$$\begin{aligned} \frac{E[|S_T(f)|^2]}{T} &= E\left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-T/2}^{T/2} s_T^*(t') e^{j\omega t'} dt'\right] \\ &= E\left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-T/2}^{T/2} s(t') e^{j\omega t'} dt'\right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R(t-t') e^{-j\omega(t-t')} dt' dt \end{aligned}$$

式中,  $R(t-t') = E[s(t)s(t')]$

令  $\tau = t - t'$ ,  $k = t + t'$ , 则上式可以化简成

$$\frac{E[|S_T(f)|^2]}{T} = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

于是有

$$\begin{aligned} P_X(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|S_T(f)|^2]}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

上式表明， $P_X(f)$ 和 $R(\tau)$ 是一对傅里叶变换：

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{j\omega\tau} df$$

•  $P_X(f)$ 的性质：

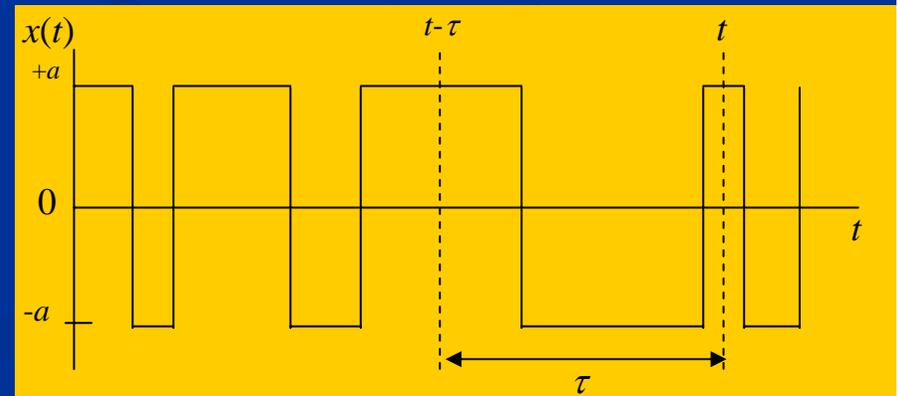
➢  $P_X(f) \geq 0$ ，并且 $P_X(f)$ 是实函数。

➢  $P_X(f) = P_X(-f)$ ，即 $P_X(f)$ 是偶函数。

**【例2.7】** 设有一个二进制数字信号 $x(t)$ ，如图所示，其振幅为 $+a$ 或 $-a$ ；在时间 $T$ 内其符号改变的次数 $k$ 服从泊松分布

$$P(k) = \frac{(\mu T)^k e^{-\mu T}}{k!}, \quad k \geq 0$$

式中， $\mu$ 是单位时间内振幅的符号改变的平均次数。



试求其相关函数 $R(\tau)$ 和功率谱密度 $P(f)$ 。

解：由图可以看出，乘积 $x(t)x(t-\tau)$ 只有两种可能取值： $a^2$ ，或 $-a^2$ 。因此，式

$$R(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$$

可以化简为：

$$R(\tau) = a^2 \times [a^2 \text{出现的概率}] + (-a^2) \times [(-a^2) \text{出现的概率}]$$

式中，“出现的概率”可以按上述泊松分布  $P(k)$  计算。

若在  $\tau$  秒内  $x(t)$  的符号有偶数次变化，则出现  $+a^2$ ；

若在  $\tau$  秒内  $x(t)$  的符号有奇数次变化，则出现  $-a^2$ 。

因此，

$$R(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = a^2 [P(0) + P(2) + P(4) + \dots] - a^2 [P(1) + P(3) + P(5) + \dots]$$

用  $\tau$  代替泊松分布式中的  $T$ ，得到

$$\begin{aligned} R(\tau) &= a^2 e^{-\mu\tau} \left[ 1 - \frac{\mu\tau}{1!} + \frac{(\mu\tau)^2}{2!} - \frac{(\mu\tau)^3}{3!} + \dots \right] \\ &= a^2 e^{-\mu\tau} e^{-\mu\tau} = a^2 e^{-2\mu\tau} \end{aligned}$$

由于在泊松分布中  $\tau$  是时间间隔，所以它应该非负数。所以，在上式中当  $\tau$  取负值时，上式应当改写成

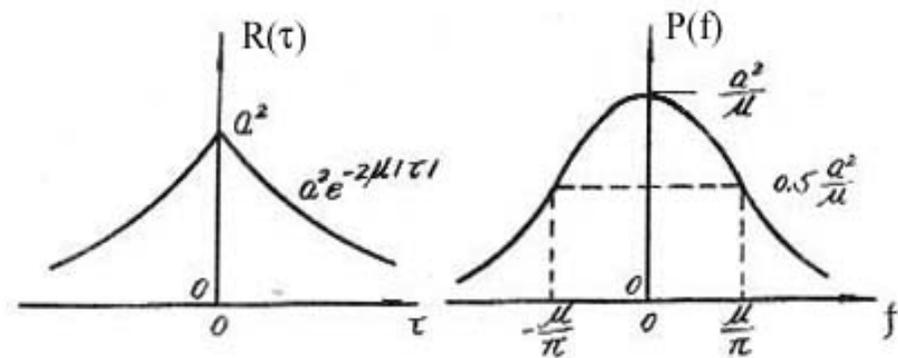
$$R(\tau) = a^2 e^{2\mu\tau}$$

将上两式合并，最后得到： $R(\tau) = a^2 e^{-2\mu|\tau|}$

其功率谱密度  $P(f)$  可以由其自相关函数  $R(\tau)$  的傅里叶变换求出：

$$\begin{aligned} P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 e^{-2\mu|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} a^2 e^{-2\mu\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 a^2 e^{+2\mu\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\mu a^2}{\mu^2 + \frac{\omega^2}{4}} \end{aligned}$$

$P(f)$  和  $R(\tau)$  的曲线：

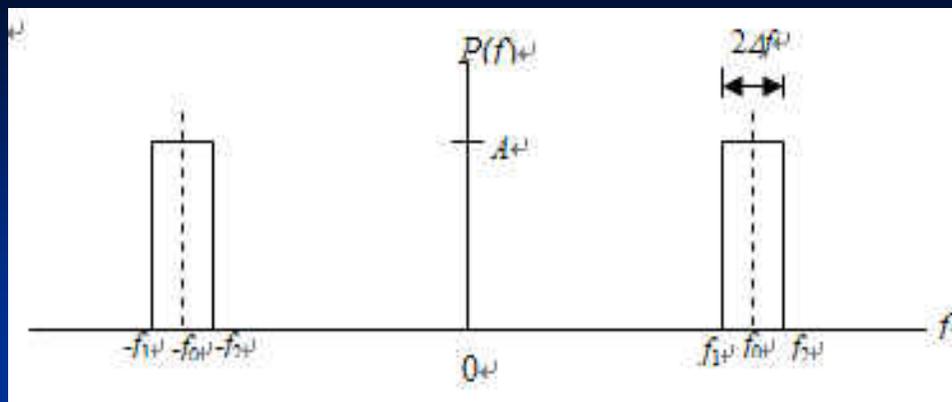


**【例2.8】** 设一随机过程的功率谱密度 $P(f)$ 如图所示。试求其自相关函数 $R(\tau)$ 。

解：

∵ 功率谱密度 $P(f)$ 已知，

∴

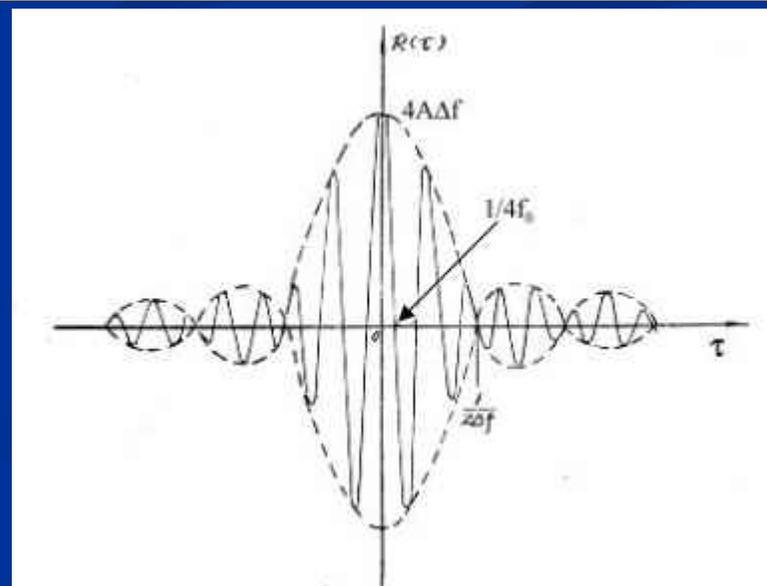


$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{j2\pi f\tau} df = 2 \int_0^{\infty} P(f) \cos 2\pi f\tau df = 2 \int_{f_1}^{f_2} A \cos 2\pi f\tau df$$

$$= 4A\Delta f \frac{\sin 2\pi\Delta f\tau}{2\pi\Delta f\tau} \cos 2\pi f_0\tau$$

式中，  $\Delta f = \frac{f_2 - f_1}{2}$ ,  $f_0 = \frac{f_2 + f_1}{2}$

➤ 自相关函数曲线：



**【例2.9】** 试求白噪声的自相关函数和功率谱密度。

**解：** 白噪声是指具有均匀功率谱密度 $P_n(f)$ 的噪声，即

$$P_n(f) = n_0/2$$

式中， $n_0$ 为单边功率谱密度（W/Hz）

白噪声的自相关函数可以从它的功率谱密度求得：

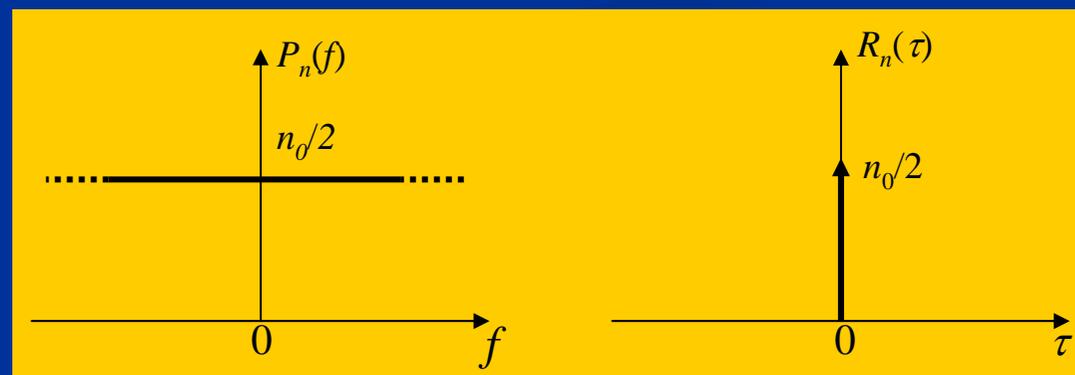
$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{j\omega\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} df = \frac{n_0}{2} \delta(\tau)$$

由上式看出，白噪声的任何两个相邻时间（即 $\tau \neq 0$ 时）的抽样值都是不相关的。

白噪声的平均功率：

$$R(0) = \frac{n_0}{2} \delta(0) = \infty$$

上式表明，白噪声的平均功率为无穷大。



- 带限白噪声的功率谱密度和自相关函数

- 带限白噪声：带宽受到限制的白噪声

- 带限白噪声的功率谱密度：

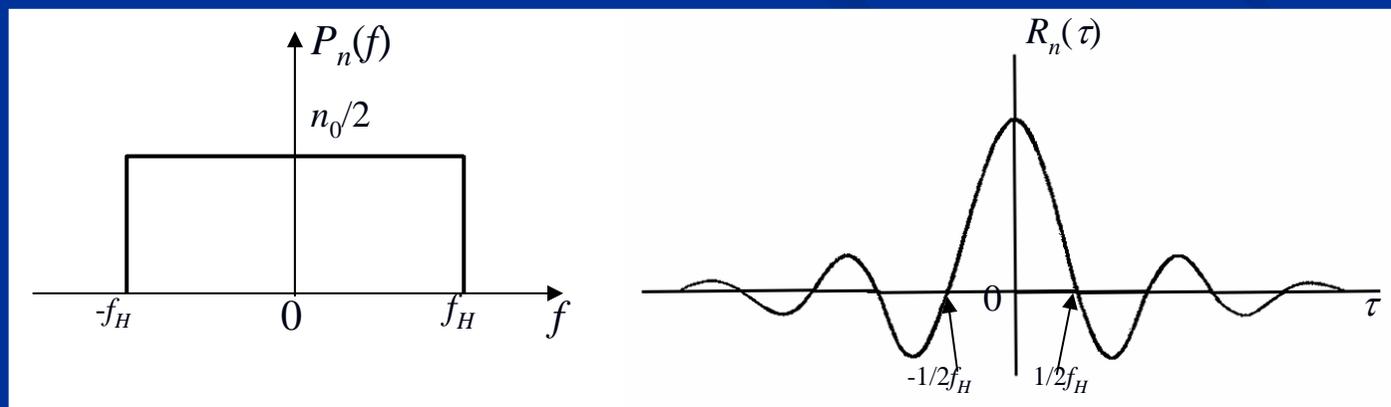
设白噪声的频带限制在 $(-f_H, f_H)$ 之间，则有

$$\begin{cases} P_n(f) = n_0 / 2, & -f_H < f < f_H \\ = 0, & \text{其他处} \end{cases}$$

其自相关函数为：

$$R(\tau) = \int_{-f_H}^{f_H} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} df = \frac{n_0}{2} f_H \frac{\sin 2\pi f_H \tau}{2\pi f_H \tau}$$

- 曲线：



## 2.7 高斯过程（正态随机过程）

- 定义：

- 一维高斯过程的概率密度：

$$p_X(x, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

式中， $a = E[X(t)]$  为均值

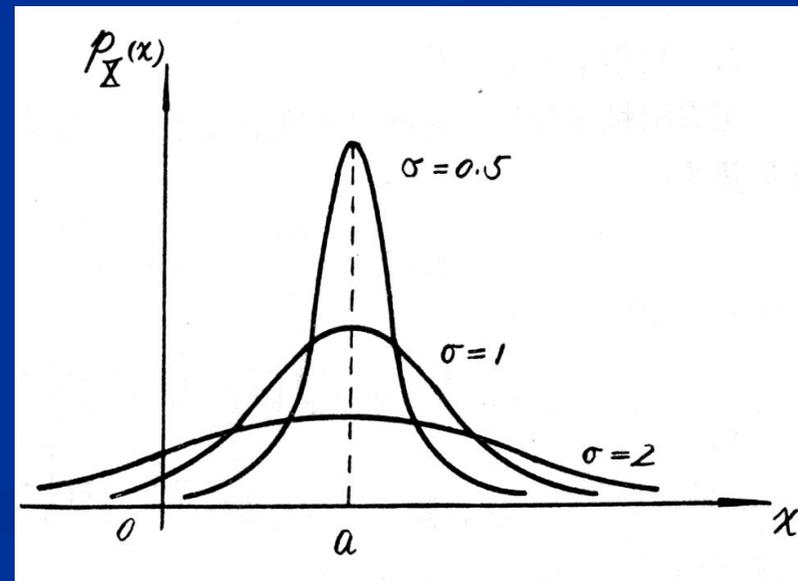
$\sigma^2 = E[X(t) - a]^2$  为方差

$\sigma$  为标准偏差

- $\because$  高斯过程是平稳过程，故其概率密度  $p_X(x, t_1)$  与  $t_1$  无关，

即， $p_X(x, t_1) = p_X(x)$

- $p_X(x)$  的曲线：



➤ 高斯过程的严格定义：任意n维联合概率密度满足：

$$p_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n |B|^{1/2}} \exp \left[ \frac{-1}{2|B|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |B|_{jk} \left( \frac{x_j - a_j}{\sigma_j} \right) \left( \frac{x_k - a_k}{\sigma_k} \right) \right]$$

式中， $a_k$ 为 $x_k$ 的数学期望（统计平均值）；

$\sigma_k$ 为 $x_k$ 的标准偏差；

$|B|$ 为归一化协方差矩阵的行列式，即

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$|B|_{jk}$ 为行列式 $|B|$ 中元素 $b_{jk}$ 的代数余因子；

$b_{jk}$ 为归一化协方差函数，即

$$b_{jk} = \frac{E \left[ (x_j - a_j)(x_k - a_k) \right]}{\sigma_j \sigma_k}$$

## ● n维高斯过程的性质

- $p_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  仅由各个随机变量的数学期望  $a_i$ 、标准偏差  $\sigma_i$  和归一化协方差  $b_{jk}$  决定，因此它是一个广义平稳随机过程。
- 若  $x_1, x_2, \dots, x_n$  等两两之间互不相关，则有当  $j \neq k$  时， $b_{jk} = 0$ 。这时，

$$p_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left[-\frac{(x_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2}\right]$$
$$= p_X(x_1, t_1) \cdot p_X(x_2, t_2) \cdots p_X(x_n, t_n)$$

即，此  $n$  维联合概率密度等于各个一维概率密度的乘积。

- 若两个随机变量的互相关函数等于零，则称为两者互不相关；若两个随机变量的二维联合概率密度等于其一维概率密度之积，则称为两者互相独立。互不相关的两个随机变量不一定互相独立。互相独立的两个随机变量则一定互不相关。
- 高斯过程的随机变量之间既互不相关，又互相独立。

## • 正态概率密度的性质

➤  $p(x)$  对称于直线  $x = a$ , 即有:

$$p(a + x) = p(a - x)$$

➤  $p(x)$  在区间  $(-\infty, a)$  内单调上升, 在区间  $(a, \infty)$  内单调下降, 并且在点  $a$  处达到其极大值  $1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$

当  $x \rightarrow -\infty$  或  $x \rightarrow +\infty$  时,  $p(x) \rightarrow 0$ 。

➤ 
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^a p(x) dx = \int_a^{\infty} p(x) dx = 1/2$$

➤ 若  $a = 0, \sigma = 1$ , 则称这种分布为标准化正态分布:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

## • 正态分布函数

➤ 将正态概率密度函数的积分定义为正态分布函数：

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right] dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right] dz = \phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

式中， $\phi(x)$ 称为概率积分函数：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$$

此积分不易计算，通常用查表方法计算。

## ● 用误差函数表示正态分布

➤ 误差函数定义:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

➤ 补误差函数定义:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz$$

➤ 正态分布表示法:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x \geq a, \\ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x \leq a \end{cases}$$

## 2.8 窄带随机过程

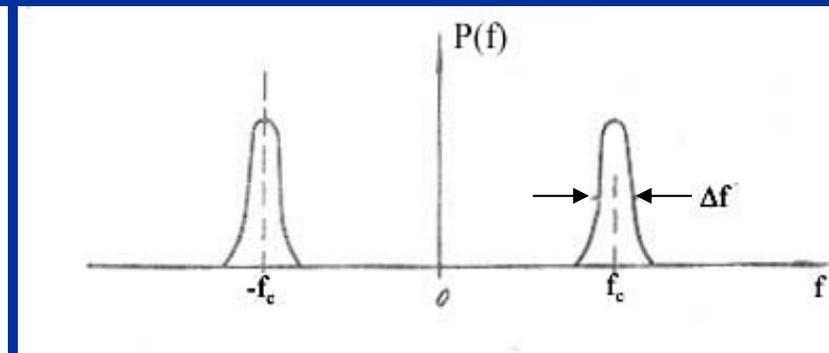
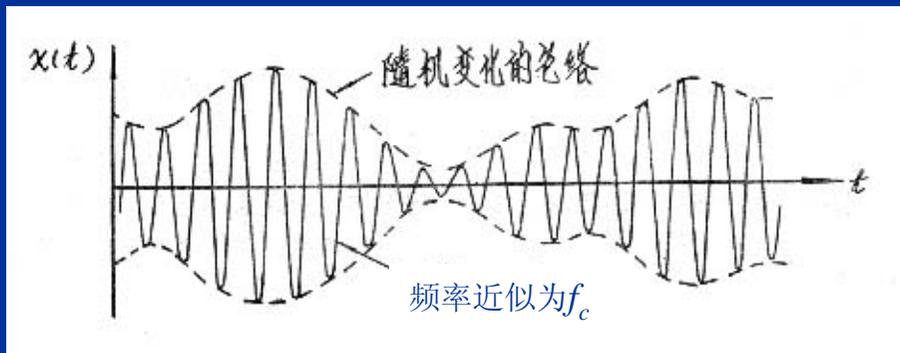
### 2.8.1 窄带随机过程的基本概念

- 何谓窄带？

设随机过程的频带宽度为 $\Delta f$ ，中心频率为 $f_c$ 。若 $\Delta f \ll f_c$ ，则称此随机过程为窄带随机过程。

- 窄带随机过程的波形和表示式

- 波形和频谱：



➤ 表示式

$$X(t) = a_X(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_X(t)], \quad a_X(t) \geq 0$$

式中， $a_X(t)$  — 窄带随机过程的随机包络；

$\varphi_X(t)$  — 窄带随机过程的随机相位；

$\omega_0$  — 正弦波的角频率。

上式可以改写为：

$$X(t) = X_c(t) \cos \omega_0 t - X_s(t) \sin \omega_0 t$$

式中，

$$X_c(t) = a_X(t) \cos \varphi_X(t) \quad - X(t) \text{ 的同相分量}$$

$$X_s(t) = a_X(t) \sin \varphi_X(t) \quad - X(t) \text{ 的正交分量}$$

## 2.8.2 窄带随机过程的性质

- $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的统计特性:

设 $X(t)$ 是一个均值为0的平稳窄带高斯过程, 则

- $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 也是高斯过程;
- $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的方差相同, 且等于 $X(t)$ 的方差;
- 在同一时刻上得到的 $X_c$ 和 $X_s$ 是不相关的和统计独立的。

- $a_X(t)$ 和 $\varphi_X(t)$ 的统计特性:

- 窄带平稳随机过程包络 $a_X(t)$ 的概率密度等于:

$$p(a_X) = \frac{a_X}{\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{a_X^2}{2\sigma_X^2}\right] \quad a_X \geq 0$$

- 窄带平稳随机过程相位 $\varphi_X(t)$ 的概率密度等于:

$$p(\varphi_X) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq \varphi_X \leq 2\pi$$

## 2.9 正弦波加窄带高斯过程

- ◆ 通信系统中的正弦波加窄带高斯过程：
- ◆ 正弦波加噪声的表示式：

$$r(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$$

式中， $A$  — 正弦波的确知振幅；

$\omega_0$  — 正弦波的角频率；

$\theta$  — 正弦波的随机相位；

$n(t)$  — 窄带高斯噪声。

- ◆  $r(t)$ 的包络的概率密度：

$$p_r(x) = \frac{x}{\sigma^2} I_0\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + A^2)\right], \quad x \geq 0$$

式中， $\sigma^2$  —  $n(t)$ 的方差；

$I_0(\bullet)$  — 零阶修正贝塞尔函数。

- ◆  $p_r(x)$  称为广义瑞利分布，或称莱斯(Rice)分布。  
当 $A = 0$ 时， $p_r(x)$  变成瑞利概率密度。

◆  $r(t)$ 的相位的条件概率密度：

$$p_r(\varphi/\theta) = \frac{\exp(-A^2/2\sigma^2)}{2\pi} + \frac{A \cos(\theta - \varphi)}{2(2\pi)^{1/2} \sigma} \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2} \sin^2(\theta - \varphi)\right] \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left[\frac{A \cos(\theta - \varphi)}{2^{1/2} \sigma}\right] \right\}$$

式中， $\varphi - r(t)$ 的相位，包括正弦波的相位 $\theta$ 和噪声的相位

$p_r(\varphi/\theta)$  - 给定 $\theta$ 的条件下， $r(t)$ 的相位的条件概率密度

◆  $r(t)$ 的相位的概率密度：

$$p_r(\varphi) = \int_0^{2\pi} p_r(\varphi/\theta) p_r(\theta) d\theta$$

- 当 $\theta = 0$ 时，

$$p_r(\varphi/0) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \left\{ 1 + G\sqrt{\pi} [1 + \operatorname{erf}(G)] \exp G^2 \right\} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

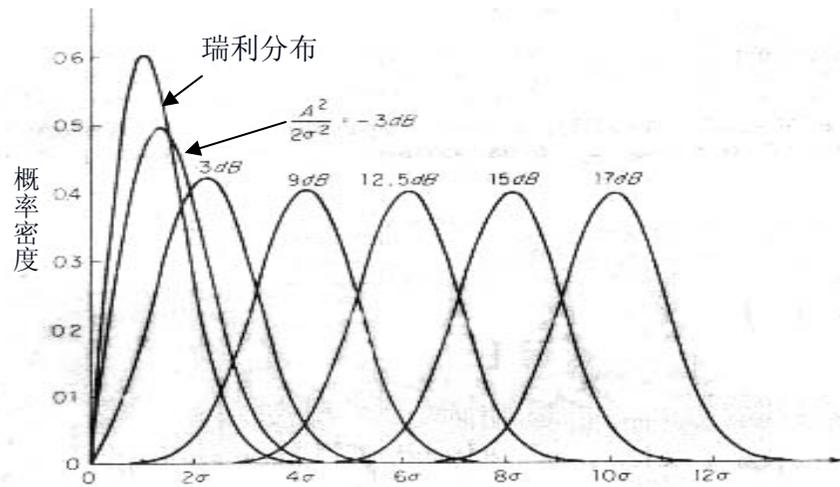
式中，

$$G = \frac{A \cos \varphi}{\sqrt{2} \sigma}$$

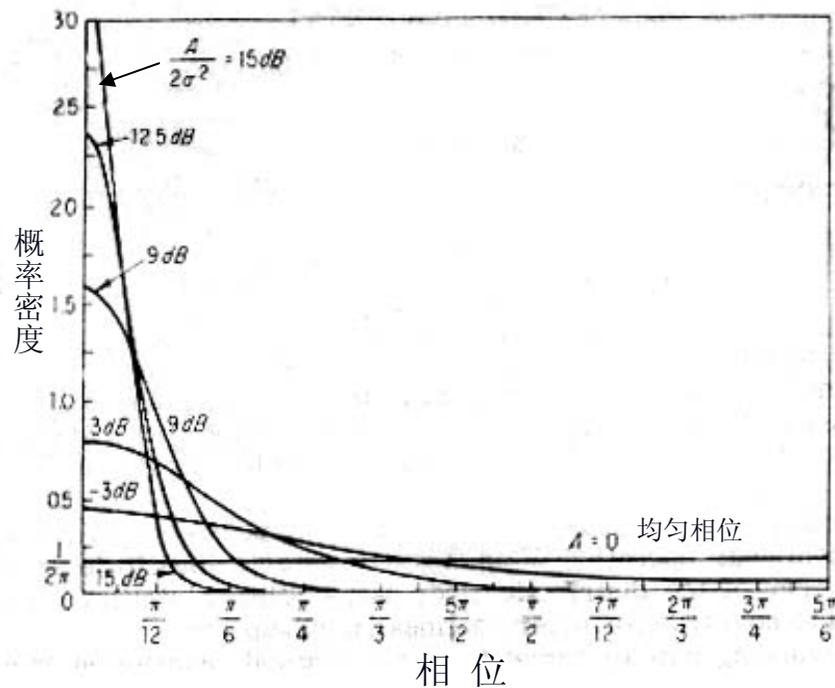
$$\operatorname{erf}(G) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^G e^{-t^2} dt$$

◆ 莱斯分布的曲线

- 当 $A/\sigma = 0$ 时,  
包络→瑞利分布  
相位→均匀分布
- 当 $A/\sigma$ 很大时,  
包络→正态分布  
相位→冲激函数



(a) 莱斯分布包络的概率密度



(b) 莱斯分布相位的概率密度

## 2.10 信号通过线性系统

### 2.10.1 线性系统的基本概念

- 线性系统的特性

- 有一对输入端和一对输出端
- 无源
- 无记忆
- 非时变
- 有因果关系：先有输入、后有输出
- 有线性关系：满足叠加原理

若当输入为 $x_i(t)$ 时，输出为 $y_i(t)$ ，则当输入为

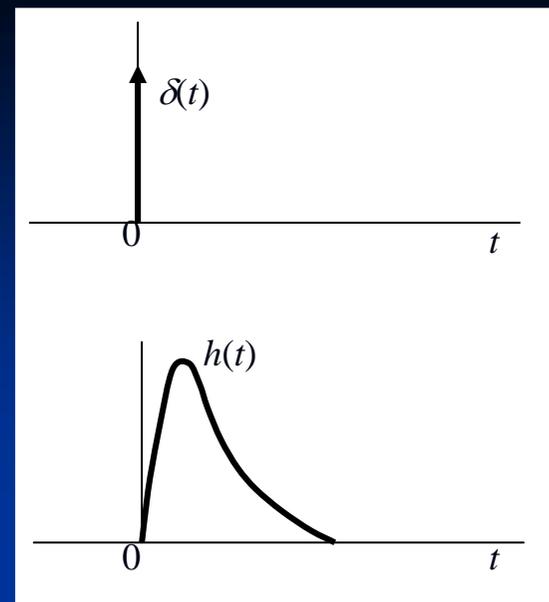
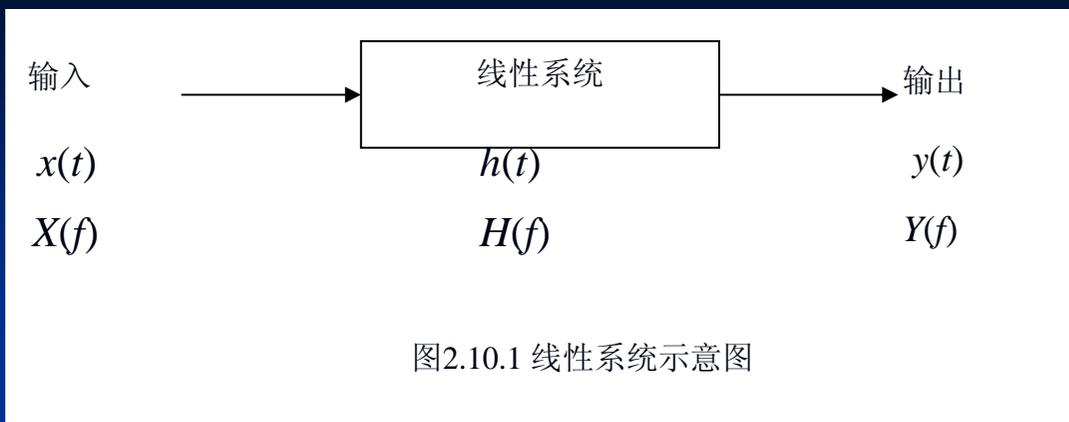
$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

时，输出为：

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

式中， $a_1$ 和 $a_2$ 均为任意常数。

## ● 线性系统的示意图



## 2.10.2 确知信号通过线性系统

### ● 时域分析法

设  $h(t)$  — 系统的冲激响应

$x(t)$  — 输入信号波形

$y(t)$  — 输出信号波形

则有：

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

对于物理可实现系统：

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

- 频域分析法

- 设：输入为能量信号，令

- $x(t)$  — 输入能量信号

- $H(f)$  —  $h(t)$ 的傅里叶变换

- $X(f)$  —  $x(t)$ 的傅里叶变换

- $y(t)$  — 输出信号

则此系统的输出信号 $y(t)$ 的频谱密度 $Y(f)$ 为：

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

- 由 $Y(f)$ 的逆傅里叶变换可以求出 $y(t)$ ：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j\omega t} df$$

➤ 设：输入 $x(t)$ 为周期性功率信号，则有

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

式中，

$$\omega_0 = 2\pi/T_0$$

$T_0$  — 信号的周期

$f_0 = \omega_0 / 2\pi$ 是信号的基频

$$C(jn\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

输出为：

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(jn\omega_0) H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

➤ 设：输入 $x(t)$ 为非周期性功率信号，则当作随机信号处理

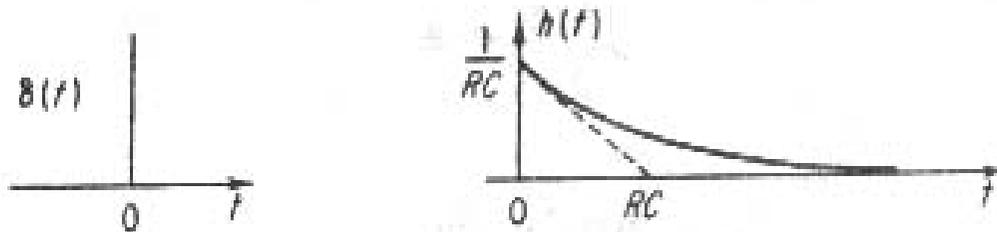
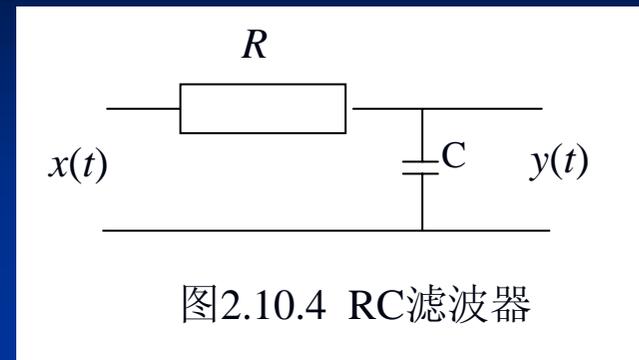
- **【例2.10】** 若有一个RC低通滤波器，如图2.10.4所示。试求出其冲激响应，以及当有按指数衰减的输入时其输出信号表示式。

**解:** 设  $x(t)$  — 输入能量信号  
 $y(t)$  — 输出能量信号  
 $X(f)$  —  $x(t)$  的频谱密度  
 $Y(f)$  —  $y(t)$  的频谱密度  
 则此电路的传输函数为:

$$H(f) = \frac{1/j\omega C}{R + (1/j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

此滤波器的冲激响应  $h(t)$ :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j\omega t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j\omega RC} e^{j\omega t} df = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$



滤波器输出和输入之间的关系：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-(t-\tau)/RC} d\tau$$

假设输入 $x(t)$ 等于：

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

则此滤波器的输出为：

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-a\tau} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = \frac{e^{-t/RC}}{RC} \cdot \frac{e^{\tau(1/RC-a)}}{1/RC-a} \Big|_0^t \\ &= \frac{e^{-at} - e^{-t/RC}}{1-aRC} \end{aligned}$$

- 无失真传输条件

设：系统是无失真的线性传输系统，输入为一能量信号 $x(t)$ ，则其无失真输出信号 $y(t)$ 为：

$$y(t) = kx(t - t_d)$$

式中， $k$  — 衰减常数，

$t_d$  — 延迟时间。

➤ 求系统的传输函数：

对上式作傅里叶变换：

$$Y(f) = kX(f)e^{-j\omega t_d}$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = kX(f)e^{-j\omega t_d}$$

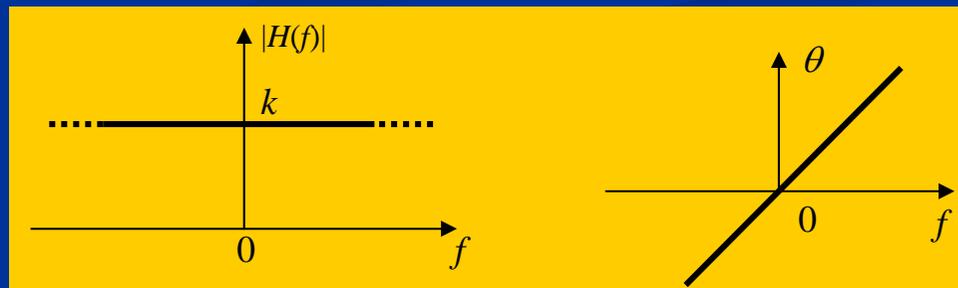
$$\therefore H(f) = ke^{-j\omega t_d} = ke^{-j\theta}$$

式中， $\theta = 2\pi f t_d$

➤ 无失真传输条件：

- 振幅特性与频率无关；
- 相位特性是通过原点的直线。

(实际中， $\theta$ 难测量，常用测量 $t_d$ 代替。)



## 2.10.3 随机信号通过线性系统

- 物理可实现线性系统，若输入为确知信号，则有

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

若输入为平稳随机信号 $X(t)$ ，则输出 $Y(t)$ 为

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau$$

- 输出 $Y(t)$ 的数学期望 $E[Y(t)]$

$$E[Y(t)] = E\left[\int_0^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right] = \int_0^{\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau$$

由于已假设输入是平稳随机过程，故

$$E[X(t-\tau)] = E[X(t)] = k, \quad k = \text{常数。}$$

$$E[Y(t)] = k \int_0^{\infty} h(\tau)d\tau$$

$$\therefore H(0) = H(f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt|_{f=0} = \int_0^{\infty} h(t)dt$$

$$\therefore \text{输出的数学期望: } E[Y(t)] = kH(0)$$

- 输出 $Y(t)$ 的自相关函数

由自相关函数定义，有

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_1 + \tau) &= E[Y(t_1)Y(t_1 + \tau)] \\ &= E\left[\int_0^\infty h(u)X(t_1 - u)du \int_0^\infty h(v)X(t_1 + \tau - v)dv\right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(u)h(v)E[X(t_1 - u)X(t_1 + \tau - v)]dudv \end{aligned}$$

由 $X(t)$ 的平稳性知，上式中的数学期望与 $t_1$ 无关，故有

$$E[X(t_1 - u)X(t_1 + \tau - v)] = R_X(\tau + u - v)$$

$$\therefore R_Y(t_1, t_1 + \tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(u)h(v)R_X(\tau + u - v)dudv = R_Y(\tau)$$

- 由于 $Y(t)$ 的数学期望和自相关函数都和 $t_1$ 无关，故 $Y(t)$ 是广义平稳随机过程。

- 输出 $Y(t)$ 的功率谱密度 $P_Y(f)$ ：

由于功率谱密度是自相关函数的傅里叶变换，故有

$$\begin{aligned} P_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} h(u)h(v)R_X(\tau+u-v)e^{-j\omega\tau} dv \end{aligned}$$

令 $\tau' = \tau + u - v$ 代入上式，得到

$$\begin{aligned} P_Y(f) &= \int_0^{\infty} h(u)e^{j\omega u} du \int_0^{\infty} h(v)e^{-j\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau')e^{-j\omega\tau'} d\tau' \\ &= H^*(f)H(f)P_X(f) = |H(f)|^2 P_X(f) \end{aligned}$$

∴ 输出信号的功率谱密度等于输入信号的功率谱密度乘以 $|H(f)|^2$ 。

**【例2.11】** 已知一个白噪声的双边功率谱密度为  $n_0/2$ 。试求它通过一个理想低通滤波器后的功率谱密度、自相关函数和噪声功率。

**解：** 因为理想低通滤波器的传输特性可以表示成：

$$H(f) = \begin{cases} ke^{-j\omega t_d}, & |f| \leq f_H \\ 0, & \text{其它处} \end{cases}$$

所以有

$$|H(f)|^2 = k^2, \quad |f| \leq f_H$$

输出信号的功率谱密度为

$$P_Y(f) = |H(f)|^2 P_X(f) = k^2 \frac{n_0}{2}, \quad |f| \leq f_H$$

输出信号的自相关函数

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(f) e^{j\omega\tau} df = \left( k^2 n_0 / 4\pi \right) \int_{-f_H}^{f_H} e^{j\omega\tau} df = k^2 n_0 f_H (\sin 2\pi f_H \tau / 2\pi f_H \tau)$$

输出噪声功率： $P_Y = R_Y(0) = k^2 n_0 f_H$

## 2.11 小结